This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B. C. R.

APOLLONII
PERGÆI
CONICORVM
LIB. V. VI. VII.
&
ARCHIMEDIS
ASSVMPTORVM LIBER.

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.

PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI

Nunc primùm editi.

ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER,
EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.

SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Profeſſor Latinos reddidit.
IO: ALFONSVS BORELLVS
In Piſana Academia Matheſeos Profeſſor curam in Geometricis verſioni contulit, & notas vberiores in vniuerſum opus adiecit.

AD SERENISSIMVM
COSMVM III.
ETRVRIÆ PRINCIPEM.

* * *

FLORENTIÆ,
Ex Typographia Ioſephi Cocchini ad inſigne Stellæ MDCLXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

AD SERENISSIMVM

COSMVM TERTIVM

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

IO: ALFONSVS BORELLIVS F.

HAVD puto, Sereniſsime Princeps, timorem cœleſtis irę, ſed Amorem potius, & beneficentiam primùm in orbe Deos feciſse; nec alios ab initio habitos cum Prodico cenſeo, quàm res humano generi ſummopere vtiles, & ſalutares. Et ſanè conſentaneum eſt in primorum hominum mentibus, quibus reuelationis lumen non affulſit, excitatam fuiſſe notitiam cuiuſdam naturæ, quæ eſſet mundi veluti Princeps, & Parens, quotieſcumque non perfunctoriè attenderet animum præcipuè ad bonitatis affluentiam, mirabiliumque, & inſignium vtilitatum comprehenſionem, qua Solaris ſplendidiſſima machina lumine ſuo ordinatiſsimè circumacto cuncta viuificat, fouet, ác nutrit; mirarenturque liberalitatem Telluris, cùm tot opes, ac copias plantarum, fructuum, animalium è ſinu ſuo veluti mater benigna mortalibus præbet. Hæc & ſimilia dum priſci homines contemplarentur, fieri non potuit, quin tantorum munerum largitores grato affectu proſequerentur. Neque alia ratione cùm viri heroica virtute præditi artes, & inuenta præclara valdè vtilia ingeniosè iuxta, ac liberaliter mortalibus contuliſtuliſſent, ſumma veneratione talem, ac tantam bonitatem ſuſceperunt, & Diuinitatis honores eis deſignarunt, vt Cereri, Baccho, Herculi, Mercurio, & alijs. Horum autem illi præſtantiora bona attuliſſe humano generi cenſendi ſunt, non qui fragilem, & limo affixam noſtram partem, ſed qui animum Diuinæ auræ participem eruditione, ac ſapientia perfecerunt, & ornarunt. Hìnc artem, & facultatem illam tradentes, qua vaſti maris planitiem intrepidè perambulare non dubitamus coactis ventis imperata facere, ibidemque verſantes acu magnetica itinera ad vnguem menſuramus, & terræ plagas, & cœli, ſtellarumque loca, & ſitus medijs in tenebris conſtituti clarè conſpicimus. Vel hìnc qua pondera immenſa puſillis noſtris viribus tanta facilitate mouemus, vt terram vniuerſam è ſuo loco transferre ſe poſſe non diffiteretur magnus ille Archimedes, ſi haberet, vbi pedem extra illam figeret. Aut qua naturæ miracula in elementis, plantis, animantibus perſcrutamur. Quaue ex fragili vitro linceos oculos veluti efformantes adeò cœlo proximi efficimur, vt ferè ſummas mundi partes, & ſtellas innumeras hactenus inconſpicuas contrectare videamur. Aut eam tandem doctrinam Aſtronomicam, qua in Cęlum transuolamus, duabus nimirum alis Geometriæ, & Arithmeticæ, quibus Diuinæ Sapientiæ theſauros contemplando, ſumma dulcedine in hac mortali vita, gloriæ, felicitatiſque illius ineffabilis participes efficimur.

Sed quia felices admirabilium rerum inuentores vel fortunæ, vel temporum iniuria plerumque nequeunt ſua ſtudia, licet illuſtria, & ſalutaria poſteritati tranſmit-

tranſmittere, ideo viris principibus ſingulari virtute præditis, ſine quorum auctoritate, & munificentia bonæ illæ artes omnino depreſſæ, contemptæ, & ſqualidæ deperirent, dum eas diuino inſtinctu promouent, augent, atque in vitam reuocant, ne dum pares, ſed maiores gratias ijs habendas priſci homines cenſuerunt, quàm inuentoribus ipſis, cùm ipſi bonis illis alioqui non duraturis genus hominum beauerint.

Atqui inter iſtos Heroas digniſsimum ſibi meritò locum vindicarunt Maiores tui, Princeps Sereniſsime, quibus gratitudinis perpetuam deberi memoriam eruditi omnes fatentur. Quippe poſtquam Barbarorum incurſionibus Europa vniuerſa, & Italia Princeps eius prouincia priſco nitore amiſſo, omni ornatu litterarũ, artium, bibliothecarum, lycęorum, imo humanitatis, & politiæ ſpoliata diù iacuiſſet, Diuino fauore primus omnium ſurrexit Magnus ille Coſmus Mediceus, qui viros doctrina eximios cum vniuerſa ſupellectile Gręcæ ſapientiæ Conſtantinopolitani Imperij calamitatem fugientes eo affectu complexus eſt, vt omnium Muſarum parens appellari deberet, qui ob liberalitatem pluſquam regiam, & beneficentiam vbique terrarum effuſam, atque ob alia heroica geſta Pater Patrię prius ſalutatus fuerat. In eius locum ſucceſsit Laurentius nepos, qui non ferro, & cęde, ſed ciuili prudentia, & alto conſilio Patriam, & pene Europam moderatus eſt: nec modo Poëticis leporibus ornatus, ſed profundiſsimæ Philoſophiæ Platonicæ innutritus, eamdem doctrinam opera, & ſtudio potiſsimum Marſilij Ficini è Gręco translatam illuſtratamque poſteris tranſtulit. Bibliothecam inſuper Laurentianam à maioribus inchoatam comparatis vndique manuſcriptis codicibus ſummo impendio, ſummaque cura locupletauit. Iſq; filium reliquit Leonem X. Pont. Max., qui vniuerſi orbis viros eruditos dilexit, fouit, amplificauit: Bibliothecam Vaticanã mirificè inſtruxit: Vrbis Lyceum à fundamentis erexit, codicibus, & viris doctrina magnis ornauit, atq; priſca barbarie omnino deleta aureum litterarum ſæculum reſtituit. Sed Coſmus ille primus Magnus Dux Etruriæ mihi nunc non reticendus, qui præter præclara bellica, & politica facinora, quibus Etruſcum Imperium auxit, atque firmauit, promouendis diſciplinis ſedulò intentus Athenæum Piſanum, vt cum maximè reparauit, vt profeſſoribus diſciplinarum fama præſtantibus nobilitauit: Florentinam Academiam inſtituit, Pandectarum libros ad fidem egregij, & vetuſtiſsimi codicis manuſcripti ampliſsimè excudi iuſſit: tot inſignes Græci, Latini, Etruſci idiomatis ſcriptores vigilijs, & labore eruditiſsimorum virorum illuſtratos typis edendos curauit: Paulum Iouium cum primis, & Io:Baptiſtam Adrianum ad ſui temporis hiſtorias conſcribendas ampliſsimis oblatis præmijs perſuaſit. Virtutes, atque opera tam Magni Parentis imitatus eſt Franciſcus, qui in Imperio ſucceſsit, & antiquitatis ſtudio maximè delectatus, præclaras, atq; innumeras venerandæ vetuſtatis reliquias, lapides, gemmas, numiſmata collegit. Hunc excepit Ferdinandus primus verè litteratorũ Mecoenas, qui Bibliothecam codicibus Hæbreis, Chaldæis, Syriacis, Egyptijs, Perſis, & Arabicis (inter quos hi libri Apollonij, & Archimedis extant) feliciſsimè ditatam reliquit, atque eruditiſsimos viros Hieronymum Mercurialem, Petrum Angelum, Iacobum Mazzonum, Io:

Bapti-

Baptiſtam Raimundum, totq; alios largiſsimis ſtipenpendijs euocauit, atq; aluit; Sacroſanctaq; Euangelia fidei propagandæ ſtudio imprimi, Euclidem quoque, Auicennam, Geographiam Nubienſem typis nitidiſſimis Arabicè omnia edi curauit. Non abſimilis litterarum amore Coſmus Secundus, cuius nomen, ac gloriam magnus ille Galilæus erga Principem de ſe optimè meritum gratiſsimus in cœlum vexit, ac inſculpſit;
„ Vir nempe (vt Gaſſendus ait) ſuper æthera notus; quo
„ alium non extulit ætas hæc noſtra glorioſiorem; quippe
„ tametſi orbis terrarum laudatis virorum illuſtrium
„ dictis, factiſq; circumſtrepit, horum tamen omnium
„ memoriam ſilentium altum breui inuoluet: nomen,
„ quod ille cœlo inſcripſit, donec cœleſtia curæ erunt,
„ apud homines perennabit. Tandem Ferdinandus
Secundus ingenij perſpicacia mirabilis, maieſtate imperij præclarus, virtutibus, & Philoſophia illuſtrior feliciter regnat: is eſt, cuius munificentia, ac fauore Europa vniuerſa in Etruſca hac regia (ne aulicum decus, aut cultum, nobilium obſequia, & famulitium, Muſæum ampliſsimum, ac ditiſsimum referam) eruditorum frequentiam philoſophantium, diſceptationes, ac perpetua exercitia literaria æſtimari, ac florere merito ſuſpicit, & veneratur; cum Muſæ reliquis in aulis tantũ non neglectæ huc ſe ſe recepiſſe veluti in ſedem ſuam videantur; hic enim in delicijs habentur ſectiones anatomicæ, cœleſtes obſeruationes, chimica eſperimenta, vniuerſęque naturalis philoſophiæ accurata inquiſitio. Vno verbo hinc credula philoſophia exulat; non hominum libri in pretio habentur, ſed Dei volumen, ſcilicet rerum natura veris, accuratiſq; experimentis ſummo ſtudio indagatur, & colitur. Præcla-

ris hiſce ſtudijs lactatus, & innutritus es, Princeps Sereniſsimè, tot tantorumq; heroum progenies, quorum virtutes incomparabiles,& egregia geſta conſentaneũ eſt in te vno veluti foco ſpeculi parabolici ſimul collecta, & vnita ſplendeſcere, vt totas vires ſuas ſumma virtus experiatur, atq; ineffabilem bonitatem, beneficentiæq; ſtudium, virtutum, artium, ſcientiarum cultum à maioribus acceptum ſtudiosè, & religiosè conſerues, atq; ad poſteros auctum tranſmittas.

Si igitur hominum genus natura dictante primum Deo Op. Max., & beneficentiſsimo gratias iuſtis honoribus, & memori mente perſoluendas eſſe decreuit; atq; ne memoria beneficiorum deleretur templa, fana, feſtos dies, & ludos inſtituit. Secundo loco eoſdem ferè honores Heroibus, ac Principibus ſtatuit, nõ his qui armis, & cęde potentiam violenter ſibi vindicarunt, ſed qui præſtantibus virtutibus ornati magna beneficia in homines contulerunt, ſique eos non humanis, ſed diuinis laudibus celebrari iuſsit, potiori iure tibi, Princeps Glorioſiſsimè, pręclariſsimorũ heroum, ac virtutum hęredi plauſus debitus, honores, laudes, & grati animi monumenta ab eruditis Europæ viris offeruntur. Quandoquidem magna,& certa illos ſpes tenet ampliſsimum patrimonium heroicarum virtutũ, quod Coſmus Pater Patriæ, Laurentius magnificentiæ exemplar, Leo ſui ſęculi felicitas, inſequenteſque generoſiſsimi Principes, atq; Heroes de genere humano, & bonis litteris optimè meriti tibi reliquerunt non ad faſtum, ſed ad imitationem, & ſtimulum gloriæ, nec externè, ſed in animo, & cordis ſacrario piè a te, ac reuerenter curandum, ſeruandum,amplificandum ea pręcipuè qua polles pręclara indole, ingenijq; acumine,

mine, ac felicitate, amoreq; ſcientiarum, ac bonarum artium, quibus te Deus, & Natura indulgentiſsimè cumulauit. Hoc quidem ſummopere precatur, & vouet eruditorum Reſpublica, ò Princeps longe incomparabilis, idque vaticinatur ex hoc tuo pręclaro decore, & ſummæ bonitatis ſpecimine: Quippe, ò Principum decus, & ſtudioſorum delicium, perbellè docuiſti virtutis heroicę magis proprium eſſe benefacere, & alijs prodeſſe, quàm laudes meritas captare, & exigere; dum veluti epulo lautiſsimo in hac ſolemni pompa tuarum nuptiarum, ſcientiarum cultores donatos voluiſti; quid enim pretioſius, & magis expetitum veritatis ſtudioſis præbere poſſes, quàm Quintum, Sextum, & Septimum libros Conicorum Apollonij Pergæi hactenus deploratos, atq; lemmata Archimedis, quæ Sereniſsimus Ferdinandus Secundus inclytus, atque optimus parens tuus ex Arabico verti, & typis excudi ad communem reipublicæ litterariæ bonum iuſsit? Tanto ergo pro beneficio

— grates perſoluere dignas
— Non opis eſt noſtræ,
Numina tibi
— pręmia digna ferant, quę te tam lęta tulerunt
— ſęcula. qui tanti talem genuere parentes.

CAVE CHRISTIANE LECTOR.

ABalphatus Aſphahanenſis Apollonij Paraphraſtes religione Maumedanus fuit; quapropter aliquot locis more ſuę Gentis non modo Regi ſuo Abicaligiar Carſciaſeph nimium adulatur, verùm etiam impiè loquitur. Nihil tamen omiſsum eſt, vt antiquus Codex integrè, fideliterq; exhiberetur. Hęc eadem de Archimedis interprete dicta ſunto. De his te præmonitum volui, ne inter legendum piæ aures tuæ vel minimùm offenderentur.

Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS.

PROOEMIVM

ABALPHATHI FILII MAHMVDI, FILII ALCASEMI, FILII ALPHADHALI ASPHAHANENSIS.

LAVS DEO VTRIVSQVE SECVLI DOMINO.

⁂

MATHEMATICA quamuis practica ſit ſcientia, ac diſciplina, cuius legibus, & præceptionibus diſponitur, atq; dirigitur intellectiua potentia ad abſolutam, perfectamque imaginum cognitionem, præſcindendo à materijs, qui eſt primus gradus aſcenſionis à ſenſibilibus ad intelligiqilia; nihilominus ſuarum claritate demonſtrationum, non ſolùm ab alijs differt ſcientijs verùm etiam longiſsimè ijs præſtat, atq; præcellit, eò quòd fæcium, ſordiumque dubitationum, & aliorum huiuſmodi generis accidentium expers omninò ſit, atq; libera. Ea autem propter ſe habet ad ſcientificam potentiam, quemadmodùm habent ſe limpidiſsima quæque orbi ſolis oppoſita ad viſiuam potentiam. Ex quo ad illam comparandam, conſequendamq; non excitatur intellectiua duntaxat vis, verùm etiam multùm exacuitur, atq; delectatur, ponderatis præſertim, expenſisq; illius demonſtrationibus, & certiſsima earum comprehenſa, & cognita veritate. Tunc quippè huius veritatis percepta animus odorationis ſuauitate, auidè, & ardentiùs appetit conſequi ea omnia, quæ illius ſuggerunt demonſtrationes, earumque potiri. Subindè verò procedere conatur vltrò ad vltimum finem, nempè ad proprietatum, & obiecti illius cognitionem, excelſitatem, atque præſtantiam comparandam, tandemque ad ea omnia, quæ ad ipſam ſpectant. Quod quidem luminis cùm ipſius affulſerit ſtudioſis, & quàm præcellens ſit, animaduerterint, omnes ſuos contulerunt conatus ad libros componendos, conſcribendoſq; de ipſius elementis, principijs, ac omnibus ijs, quę indè deriuantur, & eò ſpectant. Solidiora porrò profeſsionis huius fundamenta omnium primus iecit Euclides in eo libro, quem de elementis inſcripſit, in quo fundamentales continentur rationes linearum tam rectarum, quàm curuarum, nec non ſuperficierum prouenientium vel ex earum ſingulis vel ex omnibus ſimul ſumptis. Rationes prætereà habentur ſolidorum prouenientium, vel

ex

ex ſuperficiebus rectilineis, qualia ſunt habentia baſes; vel ex curuis, qualia ſunt ſphœrica; vel ex hiſce compoſitis, quales ſunt ſuperficies Cylindrorum, & Conorum. Verùm enim verò figuris ex ſegmentis ſuperficierum planarum prouenientibus, & cuiuſlibet etiam Solidorum Sphœricorum, Cylindricorum, atque Conicorum nullum hactenùs iactum erat fundamentum, aut præmiſſa elementa, vel fundamenta aliqua. Ex quo illi priſci librorum Scriptores aliquid de ijs innuebant duntaxat, & quidem leuiter. De Sphœricis autem aliquid ex eorum legebant proprietatibus, & paſsionibus; ſiue ex proprietatibus ſegmentorum indè prouenientium; vel figurarum in ea incidentium; vel ex accidentibus quibuſdam ipſius Sphœræ, quæ ex eius procedunt motibus; vel quia ſe inuicem includunt, & componunt. Nam Sphœra aliqua opus illi erat ad Sphœræ vniuerſalis cognitionem conſequendam vna cum eius orbibus, ac motibus, & ad inuicem atque ſua centra applicatione. Et id tandem, donec librum Almageſti compoſuit Ptolomæus, in quo ea omnia recondidit copioſè, quæ illi anguſtè, & leuiter hoc de argumento ſuis innuebant ſcriptis, tradens non ſolùm methodum, ac rationem eorum aſſequendi cognitionem, ſed, & inſtrumentorum etiam vſum. Quod profectò iactum fuit tamquàm vniuerſale quoddam fundamentum, ac principium ea omnia comprehendens, quæ ad Sphœrica pertinent; vndè hac in re ſatis abundè ſtudioſorum ſiti, & deſiderio conſultum fuit. Porrò Appollonius profeſsionē, & diſciplinam hanc ad ſupremum per-ſectionis perduxit gradum, Conicorum componendo librum, qui Conicarum ſectionum complectitur proprietates, quæ ſublimiorem, eminentioremque diſciplinæ huius ſibi vindicant locum. Et ſane tot propoſitionibus, totque figuris illum ditauit, vt admirabiles illæ nuncupari meruerint, eò quòd contineant lineas curuas, ſeu medias inter rectas, ac circulares ſeſe inuicem ſecantes; adeoque miros quidem fundunt ſenſus, & proprietates. Quos quidem omnes libros, qui diſciplinæ huius fundamenta ſunt, ad Arabicam tranſtulere linguam illius ſtudioſi. Quamuis autem liber iſte Conicorum præſtantiſsimus ſit, tam ratione ſui, quàm præclariſſimi Auctoris, nihilominùs nimiam ob illius obſcuritatem, difficultateſque obuiam occurrentes, ad profundiſsimos, quos continet ſenſus; tum etiam ob innumeras, & admirabiles figuras, & propoſitiones; tandemque ob temporis diuturnitatem, ingenteſque perferendos labores ab interprete, qui eùm ex Græca transferat lingua, dudum neglectus fuit, ac penè etærnæ datus obliuioni, vt nemò hactenùs illum, vel Commentarijs illuſtrauerit, vel congeſſerit in ordinem, quamquàm ſummè ſit neceſſarius, ac vtiliſsimas complectatur propoſitiones, & figuras. Quapropter diù ſepultus, & ignotus iacuit, & penè ad defectum vſque, ac interitum, cùm apud Diſciplinæ ſtudioſos, tum etiam ipſos profeſſores, & fragmenta ex illo circumferebantur aliqua, & ea ſanè faciliora, quia obſcuriora euitabant omnes, atque declinabant; vno verbo integrum hactenùs viderat nemo. Hinc mihi famulo

viſum

viſum eſt, me Reipublicæ Literariæ gratam rem facturum, ſi eum in integrum reſtituam, ac in vnum congeram volumen, vt ita redactus facilis ſit portatu, ſub omnium verſetur oculis, omnium teratur manibus, & ad reliqua facilior reddatur aditus.* Quem etiam librum comparare ſtudui Bibliothecæ domini noſtri Regis præſtantiſsimi, munificentiſsimi, doctiſsimi, iuſtiſsimi, victoris, triumphatoris, Fidei defenſoris, celſitudinis Monarcharum, gloriationis ſui generis, gloriæ religionis, ſolis Regum, Abicaligiar Carſciaſeph Filij Alì, Filij Phrami, Filij Haſami, Principis Fidelium, quem incolumem, ac ſoſpitem ſeruet Deus, eiuſque deprimat hoſtes, & proterat oſores. Nunc autem aliquid de ordine, & rerum diſpoſitione, ac conciſa breuitate dicendum nobis ſupereſt. Nam rerum ordo, & accommodata diſpoſitio id intelligentiæ afferunt auxilij, quod in ſcientijs comparandis luculentiſsimæ demonſtrationes; conciſa verò breuitas, ac ſuis terminis neceſſarijs expedita, & ritè diſpoſita, eandem penè proportionem habet ad intelligentiam, ac cauſa ad cauſatum. Ea autem propter ordinis conſeruatrix virtus venatio dici ſolita eſt, & ſatis quidem appoſitè, & eleganter. Nam concepti ſenſus, & in mente comparati, ſi intra ordinis cancellos includantur, ſingulos ſuis diſpenſare momentis procliuè poterit conſeruatrix rerum illa virtus. Simillimi, alioquin erunt feris per vaſtas vagantibus ſolitudines, ac nullo coërcitis vallo, quorum imagines, & motus ita ſeſe offerunt conſpicienti, & contemplanti, vt nullo negotio eas

** Impiè adulatur Regi ſuo Paraphraſtes Arabicus.*

capere,

capere, & aucupari ſe poſſe arbitretur, at cum id præſtare tentat, ſtatim dilabuntur, atque euaneſcunt. Ea planè ratione termini rerum ſingulos in mente conceptos ſenſus deſignantes, niſi ſuo coérceantur ordine dilabuntur, & euaneſcunt; præcipuè cùm modò hanc, modò illam fundant ſignificationem, cùm iuxta labentis temporis varietatem, tùm diuerſitatem regionum, & prouinciarum, vt non eadem vbique, & ſemper ſit par ratio, licet ijdem in anima maneant habitus. Ex quo palam, & planè relinquitur, quòd acquiſiti illi termini non inhæreant, quemadmodùm ſubſiſtenti eſſentiales inhærent differentiæ; neque etiam quemadmobùm proprietates neceſſariò conſequentes ſuo inhærent ſubiecto; ſed ea inhærent ratione, quá accidentia difficilè, ac tardè amouibilia. Quandoquidem termini eiuſmodi vocabula ſunt quædam rebus impoſita, & applicata ad ſenſus commodè eliciendos, atque eruendos. Quod autem vel diuino factitatum eſt inſtinctu, vel Prophetica inſpiratione edoctum, ſicut indicat nobis Altiſsimus Deus dicens: *(in Alcorano). &.docuit Adamum cuncta nomina; vel iudicio, & calculo ſapientum virorum, quemadmodùm præſtitiſſe legimus primos illos artium inuentores. & ſcientiarum; vel magna aliqua neceſſitas hominum coégit vulgus ad eiuſmodi excogitandos terminos, rebuſque imponendos, ac tranſlatione quadam vocabula mutuanda, & ad alias, atque alias res transferenda, ex quo ſynonymorum ea enatà eſt copia. Nec vllus profectò ſapientum, qui has profeſsi ſunt Diſciplinas, aut qui ip-

ſorum

** Inſulsè ex Alcorano profert, quæ ſunt in Sacra Geneſi.*

ſorum ſecuti ſunt veſtigia, hanc imponendorum terminorum rationem aſpernatus ſubindè eſt, aut ab illa abhorruit; quinimò acceptiſsima ſemper omnibus fuit, vt quæ maximum rerum intelligentiæ ſplendorem affert, & claritatem. Eandem igitur hanc ob cauſam in colligendis, digerendiſque hiſce famulus libris, antiquorum ſapientum, & artium profeſſorum, inuentorumque inſiſtens veſtigijs, terminos, & vocabula ſingulis rebus imponere, & earum vim breui declarare definitione cenſuit, vt ita ſuis coërcita omnia limitibus nequeant in varias partes, & ſenſus diffluere, ad conciliandam lectori inter legendum hos Apollonij libros eam, quæ fieri poteſt, facilitatem. Innui prætereà eandem etiam ob cauſam obſcurioribus in locis expoſitionem aliquam, ne vlla ſubindè relinqueretur difficultas ad mentem Auctoris cumulatè aſſequendam.

Tandem lectorem meum enixè rogo, vt excuſatum me habeat, ſi mendum aliquod, aut erratum meam ſubterfugerit diligentiam.

Interea Deum ſuppliciter deprecor Altiſsimum, vt nos ad ea, quæ vtiliora nobis ſunt, demúm perducat.

◆

Ne vacaret pagina ipſiusmet Apollonij Pergæi ex Epiſtola ad Eudemum Argumenta in quatuor Conicorum libros poſteriores, qui Græcâ linguâ iniuria temporum perierunt, hic apponuntur, quorum tres ex Arabicis M.SS. nunc exhibentur.

Reliqui autem quatuor libri ad abundatiorem ſcientiam pertinent. Quintus de Minimis, & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & Similibus coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus Problemata conica determinata.

Hæc eadem Pappus Alexandrinus lib. 7. Mathemat. Collect., atq; Eutocius in Commentar. ad Apollonium.

ABRAHAMI ECCHELLENSIS
IN LATINAM EX ARABICIS
Librorum Apollonij Pergæi verſionem
PRAEFATIO.

APOLLONIVS Pergæus vetuſtiſſimus, ac magni nominis Græcus auctor otto de Sectionibus Conicis conſcripſit libros. Horum priores quatuor hactenus omnium teruntur manibus; poſteriores verò, neſcio quo fato, & rerum viciſſitudine ſunt amiſſi, ac non ſine magno literatorum animi mœrore iamdudum deplorati, & nuſquam perdiligenter non quæſiti ab ijs præſertim, qui Geometriæ, & Matheſeos operam nauant ſtudijs, ſed fuſtra diu. Tandem deprehenſum eſt, hos, quemadmodum, & reliquam penè Grecæ ſapientiæ ſupellectilem ad Arabum migraſſe ſcholas, ibique Arabicè conuerſos, & Arabicis indutos ornamentis, in illius gentis tamquam extorres, & inquilinos latitaſſe Bibliothecis. Quamobrem eorum miſerti vicem Sereniſſimi Magni Etruriæ Duces, inde magno ſoluto pretiò redemerunt; ipſorumque tam præclara opera quaſi iure poſtliminij vindicarunt, ac demum patrio ſolo reddiderunt. Attamen ſat non fuit, aut viſum eſt ſummis iſtis Principibus Apollonium in libertatem aſſeruiſſe, & ex Barbarorum eripuiſſe manibus, ac in celeberrrima totius Europæ Auorum repoſuiſſe Biblioteca; ſed omnem nauarunt operam, & ſtudium, vt Latinà etiam donati linguà in literatorum gratiam publici iuris fierent. * Ea propter verè Magnus ille in omnibus Ferdinandus primus celeberrimam eam erexit Typographiam è nomine gentilitio Sereniſſimæ familiæ *Mediceam* nuncupatam, cui nullam ſimilem, aut parem vidit Chriſtianus Orbis, aut viſurus vnquàm eſt; ſiue characterum, præſertim Arabicorum, ſpectes copiam, ſiue varietatem, ſiue nitorem, ſiue elegantiam. Dictis hiſce profectò noſtris ſpectatiſſimam, ac manifeſtiſſimam fidem faciunt Sacroſanti Euangeliorum libri, Auicennæ, Euclidis, aliaque Arabica opera ijs edita typis, quæ omnibus Orientis gentibus admirationi ſunt, atque adeo auidiſſimè expetuntur, ac magno comparantur pretio. Sed hæc non typis duntaxat excudi iuſſit munificentiſſimus Princeps, verùm etiam viros linguarum peritiſſimos ingenti conduxit ſtipendio; qui Arabicorũ Codicum vacarent verſionibus. Hos autem inter principem obtinebat locum Ioannes Baptiſta Raimundus vir, & ſcientiarum cognitione, & linguarum peritia omnium ore celebratiſſimus. Is autem, & ſcriptis literis, & familiaribus cum amicis colloquijs Apollonij librorum verſionem ſæpenumerò pollicitus eſt. Imò erant, qui libris editis verſionem iam à Raimundo confectam, & perfectam eſſe, in vulgus iactarent. Verùm cum nunquam viſa fuerit eiuſmodi verſio, neque inter ipſius ſcripta reperta, neque in Aduerſarijs notata, aut catalogo ipſius librorum adſcripta, quæ omnia religioſè hactenùs conſeruantur, hoc vnum credendum ſupereſt, eam votis ſolùm ſuſceptam, & cogitatione delineatam fuiſſe; rem autem, aut quòd per otium ipſi non licuit, aut ob Codicis lectionem, & ſcripturæ difficultatem, quæ maxima eſt, vel ob orationis abſtruſæ, & ſermonis ancipitem, ac multiplicem verborum poteſtatem, vel tandem aliquam aliam ob cauſam, quàm, conijcere difficile eſt, perficere non potuiſſe.

* *Fallitur C. V. Ger. Io: Voſſius hoc tribuens Sixto V. P. M. C. 17. 29. de ſcient. Mathemat.*

Nihilo

Nihilo tamen minùs Magni Principis, Magni Filij, Magni Nepotes aut ab inceptis deſtiterunt, aut generoſiſſimi animi dudum conceptum ſtudium remiſerunt. Quamobrem ante biennium ſcriptis à Sereniſſimo Principe Leopoldo literis officij plenis, & humanitate, tam proprio, quàm Magni Ferdinandi II. fratris nomine, impoſita mihi fuit hæc prouincia optatæ diu, & penè deſperatæ verſionis. Quo ſanè, vt ingenuè fatear, nihil iucundius, nihil carius, nihil antiquius accidere mihi poterat; quòd hac data occaſione, aliquam grati animi ſignificationem exhibere me poſſe putabam Sereniſſimo illi Principi, cuius ampliſſima in me beneficia ſum expertus. Memini profectò, nec ex animo meo excidet, imo clauo fixum trabali manet, quanta in me contulit Magnus Ferdinandus Secundus ornamenta, quanta in me vſus eſt liberalitate, & beneficentia, non tantùm dum fortuna mihi arridebat, non ſolùm dum res ſuccedebant proſperè, non modò dum ad illum ab Amiro Fachraddino miſſus ſingulari felicitate fruebar, ſed etiam in naufragio, & iactura illa barbarica, in Carrellina coniuratione, & proditione, in aduerſiſſima fortuna. Sed hæc omnia magis à me exprimi poſſunt profundiſſimo ſilentio, quàm verborum copia, aut oratione altius exaggerata. Verùm enim verò dum arbitrabar, mirificam nactum me eſſe opportunitatem gratificandi Principi de me optimè merito, & exhibendi aliquod grati animi ſignum, penè concepta excidi ſpe. Nam aperto Apollonij Codice, & coniectis in eum oculis duæ primo ferè intuitu ſeſe mihi obtulerunt difficultates, quas à me neque ſuperari, neque vinci poſſe prorſus exiſtimaui. Hinc ſummus, & abſtruſus pudor; hinc plurimus ſudor ingenuè omnia fateor. Et eò magis intimis animi ſenſibus angebar, quod ea verſio non in ſeceſſu aliquo fiebat, & remotis arbitris, vbi aciem mentis abducere, difficultates commodè expendere, animoque intento, & libero luſtrare quæ in rem eſſent, ac per otium poſſem, ſed præſentibus grauiſſimis viris, & quidem, ex tempore, & nulla data præmeditandi facultate, interpretationem facere compellebar. Ea fortè illorũ præclariſſimorũ virorũ de me erat opinio, & exiſtimatio, quàm tamen parum abfuit, quin penitus perdidiſſem, cùm vix, & ne vix quidem ſcripturam illam legere poſſem, quæ prima erat difficultas. Nam puncta aberant diacritica imprimis (de punctis vocalibus hic non loquimur, nec eorũ inter legendum à peritis linguæ habetur ratio, aut negotium aliquod faceſſunt), nempè ea, quæ formam dant literis, literaſque conſtituunt, & ſine quibus literæ ſunt pura, ac nuda materia omni ſpoliatæ forma. Quid autem ſit materia omni ſpoliata forma, neque ipſi ſciunt Philoſophi, quorum id ſcire intereſt. Eodem prorſus ſe habent modo Arabum literæ, ſeu potiùs literarum ductus, & lineæ diacriticis hiſce carentes punctis. Eadem enim figura, ſeu linea, exempli gratia, ſi vnum ei ſuperponitur punctum erit N. ſi verò ſupponatur, B. ſi duo ſuperponuntur, T. ſi tria Th. ſi duo ſupponantur, I. & ſic de cæteris ferè omnibus arguendum eſt. Si quis autem percontabitur, quid erit illa figura, & linea, ſi nullum adſit punctum? reſpondetur materia ſine forma, & quid ſit prorsùs ignoratur. Augebant etiam lectionis difficultatem ipſæ literarum figuræ, quæ ita raptim, & curſim, licet elegantiſſimè, ductæ erant, vt vix ab inuicem quandoque, & identim diſtinguerentur. Hæc autem difficultas terruit quidem primo aſpectu ſed breui, & citius quàm credebam, ſuperata fuit, tum ſtudio, & diligentia, tum experientia, quàm ab ipſa ineunte ætate ex lectione eiuſmodi ſcriptorum generis comparauimus.

Altera difficultas, quæ ſe nobis obtulerat, maioris quidem erat ponderis, & momenti; verſabatur quippè circa diſciplinæ vocabulorum intelligentiam, & notionem, quorum ignari eramus, & penitùs ieiuni. At hanc quoque difficultatem facili negotio ſuperauimus ope, & opera Clariſſimi, atque Doctiſſimi Viri D. Ioannis Alphonſi Borelli Matheſeos in Piſana Academia profeſſoris celeberrimi, qui, & verſionem ipſam promouerat apud Sereniſſimos Principes, & Codicem comportauerat idem Romam, ac perpetuus mihi aderat Dux, & Magiſter. Et ita ſanè ea omnia, quæ ad Diſciplinæ, eiuſque vocabulorum notionem pertinebant, clarè, dilucidè, & explicatè ordine inſinuauit, vt breui meis auditoribus Matheſeos profeſſor viderer. Porrò quod hac in re magis mirandum eſt, nec ſilentio prætereundum, ea erat Viro illi Doctiſſimo ſingularis ingenij perſpicacitas, vt ſæpe in abſtruſis quibusdam locis, non ex integris , inquam , præmiſſis , ſed ex vnica dictione totam illationem inde colligeret , non ſenſu , ſed totidem penè verbis , ac ſi Arabica legeret verba , & linguæ veteranus eſſet profeſſor. Proindè verius ipſi , quàm mihi adſcribenda eſt hæc verſio , longè tamen abſit omnis adulatio , & animi propenſio in virum amiciſſimum. Hac mutua contentione , & interpretandi , & vertendi trium Menſium ſpatio verſio noſtra confecta , & abſoluta eſt , in qua horis tantummodò matutinis propter nimios calores æſtiuos conſumpſimus. Et hæc de ratione verſionis poſteriorum librorum Apollonij , & methodo ſatis dicta ſint. Nunc de ipſo Apollonio , eiuſque librorum Arabica verſione , & illius auctoribus nonnihil dicere , par , & conſentaneum eſt.

Apollonium ſub Achaz Filio Ioatham regis Iuda poſt Thaletem Mileſium Floruiſſe , Arabes perhibent Scriptores. Sic enim lib. 3. Chronicorum in Achaz ſcriptum reliquit Gregorius Barhebræus: *Poſt Thaletem celebris fuit in Geometricis præcipuè diſciplinis Apollonius Naggiar.* (ideſt faber lignarius) *Is compoſuit Tractatum de ſcientia Conicor. nempè de lineis , quæ neque rectæ ſunt , neque arcuatæ , ſeu curuæ , ſed inclinatæ.* Notandum hìc eſt vocem *Naggiar* , quæ Apollonio tribuitur , vt cognomen , & nos *fabrum lignarium* vertimus , poni (vt opinor) pro *Geometra* , & id fortè exindè , quòd inſtrumenta , quibus vtebantur Geometræ ex lignis olim conficiebantur. Quod , & indè conijcio , quia hoc idem vocabulum Euclidi quoque tribuitur apud eundem Gregorium ſic de illo ſcribentem. *At Euclides Naggiar ex Vrbe Tyro erat.*

De verſione autem librorum Apollonij in Arabicam linguam ita ſtatim ſubdit mox laudatus Gregorius : *Ex his autem verſi ſunt in Arabicam linguam tempore Almamuni ſeptem libri , eius tamen præfatio indicat , octo fuiſſe libros ; qui quidem Tractatus cum alio Tractatu eiuſdē Apollonij cauſam dedere Euclidi ſuorum componendorum librorū longum poſt tempus.* In his longè videtur diſcrepare Gregorius à communi Chronologorum ſententia , & opinione , qui Apollonium Floruiſſe ſcribunt anno periodi Iulianę 4474. ideſt annis ante Chriſtum Dominum 240. adeoque multò iunior eſt , quàm facit illum Gregorius. Diſcrepat prætereà ab ijſdem Chronologis in ætate Euclidis , quem Apollonio iuniorem agnoſcit ,

vbi

vbi illi eum collocant in anno periodi Iulianæ 4430. ideſt ante Chriſtum Dominum annis 284. iuxta quàm opinionem Apollonius iunior erit Euclide annis 44.

Almamun autem ſub quo facta eſt librorum Apollonij verſio in Arabicam linguam ex laudato Gregorio Chalipha ſecundò ſalutatus eſt An. Heg. 203. ex omnium ſcriptorum ſententia, qui annus ex Tabula Aerarum Iſmaelis Sciahinſciah, quàm refert in hiſtoria Gentium, reſpondet Anno Chriſti Domini ſolari 826. plùs minuſue. Nam Hegiram accidiſſe anno Chriſti 631. habet Iſmaëlis Tabula contra omnium Chronologorum Orientalium opinionem, qui eam reponunt in ann. Chriſti 622. & vndecim Heraclij, vno excepto Eutychio Alexandrino, qui eam reponit in ſua hiſt. Eccleſ. in an. Chriſti 614. ſcribit enim ibi: *A Chriſto Domino noſtro vſque ad Hegiram ſunt anni* 614. In quo octennio integro diſcrepat ab alijs Chronologicis. Sed hæc leuiter tetigiſſe, ſatis eſt; non eſt enim animus hic temporum apices data opera excutere, nec id ſanè vacat, nec huius loci eſt.

Principem autem Almamunum, eam procuraſſe verſionem librorum Apollonij, non ſolùm facilè, ſed procerto credendum eſt. Nam is omnium ſcientiarum ſtudijs vehementiſſimè ardebat, proindeque congerendorum vndique librorum nunquàm finem faciebat, eratque in eorum interpretes prolixiſſimus. Mira ſanè, quæ de illius, ac proaui Abugiahphar Almanſur animi propenſione in literas, & literatos viros refert Sahadus Filius Ahmedi Andaluſij in Hiſt. Arabum. *Is*, inquit ibi, *erat ſtatus Arabum in gentilitate. Poſtquàm verò fauoribus proſequutus eſt Deus Altiſſimus Hacſemitas, deuoluitque ad eos imperium, conuerſæ mentes ſunt, & intellectus à ſtupore, in quo iacebant, & exſuſcitata ingeniorum acumina poſtquàm extincta erant. Horum autem primus, qui promouendis ſcientijs operam nauauit, erat Abugiahphar Almanſur ſecundus Chalipha. Qui tametſi Iuriſprudentiæ deditiſſimus eſſet, & peritiſſimus; nihilominus, & Philoſophiæ vacabat ſtudio, ſed ardentius Aſtronomiæ. Cùm verò Imperij ſuſcepiſſet ſceptra Chalipha ſeptimus Abdalla Almanſun filius Aaronis Raſcidi, abſoluit ea, quæ inceperat Auus ipſius Almanſur, operamque dedit ſcientijs vbique inquirendis. Hinc Græcorum ſcripſit Imperatoribus rogans ſibi mitti quotquot* *haberi poſſunt Philoſophorum libri, qui quotquot comparare potuerunt miſerunt ipſi. Quibus ille vertendis peritiſſimos quoſque ſelegit interpretes, & curam iniunxit interpretandi, & verſi ſunt eo ſtudio maiori, quod fieri poteſt. Quo autem facto homines non ſolùm incitabat, ſed & cogebat quodammodò, vt ijs legendis, & ediſcendis operam darent. Ipſe verò ſapientes viros familiariſſimè conueniebat, eorumque peramicè vtebatur conſuetudine, atque plurimùm illorum delectabatur colloquijs. Nouerat, & quippe optimè, ſapientes viros Deo Altiſſimo mortalium eſſe cariſſimos, ac ipſi coniunctiſſimos, eò quod ſeſe dederunt animæ rationalis virtutibus comparandis, poſthabitis, & contemptis ijs, quibus Sinenſes, ac Turcæ, eorumque ſimiles incumbunt. Hi enim oſtentare amant artium Mechanicarum ſubtilitatem, animæ iraſcibilis gloriantur potentijs, & concupiſcibilis iactant ſe ſe facultatibus. Cùm tamen hæc omnia communia cum ijs ipſa habere bruta, ſcire debeant; imò longè ab illis ſuperantur. Peritia, & ſubtilitate artis ab Apibus, quæ ſua examina, ſeu penarium ſexangula mirà conſtruunt arte. Audacia, & fortitudine à Leonibus, alijſque feris, quibus in hiſce haud comparandus eſt homo. Libidine, & Luxuria à ſuibus, atque alijs, quæ hic memorari neceſſe non eſt. Hacque de cauſa ſapientes viri ſunt lampades in tenebris, & mortalium omnium Domini. Et heu quàm turpe, atque deforme eſt terrarum hoc orbis theatrum, quoties ſuis caret ſapientibus.* Hæc Sahedus in Hiſtoria Arabum.

Noſtram autem verſionem hanc Arabicam quod attinet, alia prorsùs eſt ab ea, quæ ſub Almamuno confecta eſt. Hoc planè patet ex ipſius Auctoris Abalphathi in præfatione verbis. Dicit quippè ibi, ſe eam adornaſſe verſionem pro regis Abicaligiar Bibliotheca. Abicaligiar autem rex ſalutatus eſt, teſte Sciahinſciah, Gregorio, & alijs, Hegiræ anno 372. nempè annis 169. poſt Almamuni inaugurationem ijsdem, quos mox laudauimus, auctoribus.

Verſionem tamen illam, quæ ſub Almamuno facta eſt, nequaquàm vidit noſtræ huius verſionis auctor Abalphath, quemadmodùm ex verbis eius, quæ ad ſeptimi libri adiecit calcem, patet luculenter. Ibi enim, *puto* inquit, *me in hoc*, nempè in hac verſione concinnanda, *quoſcunque alios anteuertiſſe*. Itaque exiſtimat is noſter Auctor, ſe omnium primum Apollonij verſionem Reipublicæ literariæ dediſſe. Quod, & in ipſa quoque innuit præfatione, aſſerens vſque ad ſua tempora nullam integram librorum Apollonij extitiſſe inter Arabes verſionem; ſed fragmenta quædam. Ex quo arguere eſt, aut eum minimè antiquiorem Almamuni vidiſſe verſionem, aut iſtam non fuiſſe integram, ſed Epitomem aliquam ex ſeptem Apollonij decerptam libris, de qua ille in præfatione. Vt vt ſit noſtra hæc alia prorsùs eſt ab ea, & ad ipſius auctoris calculos redacta, atque adeò integra, & omnium perfectiſſima, atque abſolutiſſima.

Cæterũ admonitum volumus benignum lectorem, nos in hac verſione adornanda ſatis preſsè Arabicam ſecutos eſſe phraſim, nec omninò elegantiam, & venuſtatem linguæ expreſſiſſe, arbitrantes id maximè pertinere ad fidelis interpretis partes, & officium.

Ea autem quæ occurrunt circa ipſam phraſim, & vocabula nonnulla obſeruanda, Arabicæ Editioni reſeruauimus, rati ea commodius, & magis ad rem ibi exponenda eſſe, & ſuis exprimenda characteribus. Interim benè vale, & hoc qualicunque fruere ſtudio, & labore.

IO: ALFONSI BORELLI

PRÆFATIO AD LECTOREM.

ACCIPE tandem, ſtudioſe Lector, in ſolemni hac pompa nuptiarum Sereniſſimi Principis Etruriæ Regio ſplendore à Sereniſſimo Magno Duce parata tamdiu deploratos, & expetitos libros poſtremos Conicorum Apollonij Pergæi, vtque ſine mora mens tua epulis hiſce lautiſſimis ſaturari poſſit, non te demorari diutine patiar in limine, recenſendo ſcilicet nomen Apollonij, patriam, ætatem, & opera ab eo conſcripta, neque inſuper doctrinæ conicæ ortum, & progreſſum à primis incunabulis ad virilem vſque, & vegetam ætatem, ad quàm Apollonius eam euexit, propter quod facimus magnus Geometra cognominatus eſt; hæc enim trita iam ſunt, & vulgaria; breuiter tantummodo percurram, quæ ad notitiam horum librorum facere videntur.

Illius pretioſiſſimæ bibliothecæ orientalis, quàm Sereniſſimo Ferdinando Primo gratitudinis ergo reliquerat Ignatius Neama Patriarcha Antiochenſis libellum nitidiſſime Arabicè ſcriptum mihi oſtenderat Sereniſſimus Princeps Leopoldus Muſarum decus, & gloria, noſtrique ſæculi lumen eruditum, Codici inſcripſerat Raimundus, ſiue quis alius: Otto libri de Conici d'Apollonio del Patriarca. *Summa lætitia libellum exoſculatus, licet Arabici idiomatis ſim prorſus ignarus, non potui me continere, quin ſaltem contrectarem, atque reuoluerem paginas illas; cumque præter figuras mihi ſatis notas quatuor priorum Apollonij librorum vidiſſem alias conicas figuras, in quibus ab vno puncto in eis collocato eductæ erant plurimæ rectæ lineæ ad coniſectionem, illico in mentem venere illa Eutocij verba in expoſitione epiſtolæ Apollonij ad Eudemum:* Quintus, *inquit*, liber de Minimis, & Maximis magna ex parte agit; quemadmodum enim in elementis didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipſius circumferentiam pertinent, maximam eſſe, quæ per centrum tranſit, earum vero, quæ ad conuexam, minimam eſſe, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur, ita & de coniſectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, ſeptimi, & octaui libri propoſitum manifeſtè ab ipſo Apollonio explicatur. *Cùmq; poſteà à quodam Maronita Arabicè callente accepiſſem tractatum, ſeu librum quintum Apollonij eſſe illum, in quo figuræ prædictæ delineatæ erant, pariterque in ſubſequenti libro ſexto conſpexiſſem figuras alias exprimentes æqualitatem, & ſimilitudinem ſectionum conicarum, mihi certum fuit, verè Apollonij eſſe libros illos. Haud tamen negabo ſcrupulum, ac dubitationem iniectam, ex eo quod textus ille Arabicus non præferebat in fronte Apollonij, vel vllius alterius nomen, & definitiones primi libri centuriam ſuperabant, cum Apollonius non niſi nouendecim ſuo primo libro appoſuiſſet. Inſuper in prioribus quatuor libris non totidem figuras conſpiciebam, nec omnino ſimiles, eaſdemque, nec eodem ordine diſpoſitas, ac in textu Græco Eutocij videre eſt; quare cenſui librum prædictum epitomen eſſe Conicorum Apollonij ab aliquo alio conſcriptam. Hanc quoq; præclariſſimi Torricellij fuiſſe ſententiam poſtea didici ex eius Epiſtola ad eruditiſſimum Michaelem Angelum Riccium miſſam. Perſtiti tamen debere latinè verti lucubrationem tam eximiam, eruditiſq; optatiſſimam, nam niſi ipſiſſimum opus eſſet Apollonij, ſaltem ex ijſdemmet libris epitome illa deſumpta, & tranſcripta exiſtimari debuerat.*

Igitur Sereniſſimus Ferdinandus Secundus Magnus Dux munificentia verè regia, qua bonas artes promouere ſtudet, annuente, & ſummopere coadiuuante Sereniſſimo Principe Leopoldo fratre Matheſeos, atque omnigenæ Sapientiæ perito cultore, atq; egregio vindice, præcepit, vt volumen Arabicum Romæ latinè redderetur ab Abrahamo Ecchellenſe linguarum Orientalium doctiſſimo, & peritiſſimo profeſſore. Is quidem ſumma alacritate negotio ſuſcepto primùm bono me eſſe animo iuſſit; monuit enim nouum non eſſe apud Arabes libros nomine auctoris in fronte carere, oſtenditque in proemio eiuſdem codicis apertiſſimè declarari eſſe libros Conicorum Apollonij paraphraſticè expoſitos: deinde ex tranſlatione priorum quatuor librorum patuit demonſtrationes propoſitionum penè non differre quoad doctrinam à textu Græco Eutocij, licet verbum verbo non reſponderet: nec mirari paucitatem figurarum, quandoquidem vna, eademq; figura quatuor, aut quinque propoſitionibus inſeruiret. Incomparabili igitur gaudio perfuſus Apollonium penè è manibus ſublatum iterum amplexibus ſtrinxi, & exoſculatus ſum. Sed moleſtum ſummopere fuit octauum librum deeſſe: collegi tamen Io: Baptiſtam Raimundum opuſculum arithmeticum (quod in hoc codice Arabico ſubſequitur libro Septimo Apollonij) pro octauo *eiuſdem libro accepiſſe, pariterq; Hieronymum Lunadorum in libro de Romana Curia nobis impoſuiſse, cum octo Apollonij libros ex Arabico tranſtuliſſe latinè Raimundum typis publicauit; quì enim fieri potuit, vt octo libros dediſſet is, qui an ſeptem, aut octo libri eſſent non animaduerterat?*

Modo operæ pretium erit ante oculos ponere formam, & diſpoſitionem huius paraphraſis ab interprete Abalphatho editæ. Et primo ſciendum eſt eum collegiſſe ſimul ſeptem integros libros Conicorum Apollonij ex fragmentis, quæ hactenus apud Arabes ſparſim circumferebantur, diſpoſuiſſeque propoſitiones eorumdem librorum alio ordine, ac diuerſo ab Apolloniano, relictis tamen numeris antiquis, nam in primo libro poſt primam, & ſecundam propoſitiones ſubſequuntur vndecima, tertia, quarta, ſeptima, & ſic vlterius ſemper ordine perturbato procedendo. Hac nempe ratione ſimul collectis in eadem figura pluribus propoſitionibus, quas in locis diſsitis collocauerat Apollonius, putauit Abalphathus breuiùs ſe eas demonſtraturum retenta ſemper Apollonij ſententia, ſcilicet ijſdem medijs, & eodem progreſſu, quo vſus eſt Apollonius, demonſtrat Paraphraſtes eaſdem propoſitiones. An vero variare noluerit reuerentia retentus, vel potius nequiuerit virium defectu, (quippe ingenio non admodum felici, et inueniendi ſagaci à natura donatus) non auſim affirmare. Superaddit quoq; numeroſam farraginem aliarum definitionum, quibus compendioſiùs, & clariùs demonſtrationes abſolui poſſe profitetur, quod quidem non raro ipſe aßequitur; aliquaudo verò ob affectatam nimiam breuitatem obſcurior efficitur: accidit quoque, vt aliquæ definitiones inutiles, & otioſæ ſint, vel repetitio declarationis earumdem prolixitatem creet maiorem.

Animaduerſione dignum eſt, quod Manuſcriptum licet non diſtinguatur capitibus, aut paragraphis, ſed continuo, perpetuoquè ſermone procedat more Arabum, in eo tamen numerorum tria genera paſsim occurrunt, qui omnes ferè interlineares, pauci quidem in margine poſiti, aliqui rubris characteribus depicti, alij vero poſiti ſuper alios numeros in eadem linea, veluti fractiones numerorum deſcribi ſolent, hac ratione $\overset{9}{49}$. 50. *vel* $\overset{16}{68}$. 69. 70. 71., *& licet raro ſynceri, & veridici ſint, conieci tamen ſupremos numeros indicare partes, ſeu ſectiones, in quas Abalphathus librum diſtribuit, atq; partitur: infimi verò numeri docent quotnam propoſitiones in vnaquaque ſectione contineantur: itaque hi numeri* $\overset{16}{68}$. 69. 70. 71. *ſignificant in lib.* 5. *Sect.* 16. *contineri Apollonij Propoſitiones* 68. 69. 70. 71. *reliqui numeri interlineares ſic diſpoſiti* 24. *ex* 5., *vel* 37. *ex* 6. *citationes ſunt, indicantque Prop.* 24. *lib.* 5. *Conic.*

Apoll., vel Prop. 37. lib. 6. Sed mirum quàm mendoſi ſint omnes ferè numeri huius codicis! in ſolo enim quinto libro frequenter duæ, vel tres propoſitiones diuerſæ vno, & eodem numero deſignantur, & è contra plures, & ſeparati numeri nulli propoſitioni tribuuntur; nuſpiam enim reperies propoſitiones 16. 17. 18. 24. 40., & quamplurimas alias. Citationes poſtea inter propoſitiones interpoſitæ mendoſiſſimæ, obſcuriores tenebras obducunt, quare non parum laboris, & moleſtiæ habui, vt propoſitionibus horum ſubſequentium librorum numeros debitos, & legitimos aſſignarem; nam prioribus quatuor in libris propoſitionum numeri licet perturbato ordine diſpoſitarum facilè reſtitui, & corrigi potuerunt ex Græco exemplari, at in libris 5. 6. & 7. numeros erroneos ſerie propoſitionum alterata niſi ariolando aſſequi quis poterit? Cum ex Arabico codice mendas haſce numericas corrigi poſſe Excellentiſſimus Abrahamus Ecchellenſis deſperaſſet, repetitis litteris, vt coniecturis negotium perficerem, iuſſit; & ſiquidem propoſitiones Apollonij vno, vel altero tantum ordine diſponi potuiſſent, forſan mentem auctoris conijcere arduum non fuiſſet, ſed inter multas, & varias ſeries, quibus conica doctrina exponi poſſet, ſi eam, quàm Abalphathus elegit, aſſecutus fuero, fortunæ tribuendum erit.

Sed quid ego minutias numerorum conſector, cum in textu ipſo inſuperabiles ferè, & maioris momenti difficultates ſuperſint? nulla propoſitio fuit, in qua ſententiæ, verba, aut numeri, aut litteræ non fuerint multifariam permutatæ, mutilatæ, aliæ pro alijs repoſitæ, atque in propoſitionibus pleriſque tituli ipſi, & expoſitiones ſummopere deprauatæ, vt prorſus ignoraretur quidnam demonſtrandum propoſuerit Apollonius. Itaque verba, litteræ, numeri, citationes, imò ſententiæ deficientes, aut permutatæ vna cum affectata Paraphraſtis Arabici breuitate, & multiplici, & noua nomenclatura cimmerias tenebras effundebant. Haſce in anguſtias redactus, quod potui, feci, vt germanum ſenſum Apollonij, & correctiſſimum exhiberem textum.

Hanc tamen cautionem adhibui, vt in notis ſemper bona fide apponerem ipſiſſima verba textus, quæ tranſtulerat ex codice Arabico me præſente Excellentiſſimus Ecchellenſis, ibidemque rationes appoſui mutationis, & correctionis factæ. Itaque perſæpe vbi ſententia videbatur obſcura, neque diſtinctè explanata, tunc quidem meis verbis declaraui. Et quia multoties ob nimiam paraphraſtis breuitatem, vel librariorum vitio propoſitiones nō ſolide demonſtrantur, vel nequeunt ex præcedentibus deduci, addidi ex meo penu lemmata nonnulla, quibus euidenter confirmantur, quæ in

textu

textu ambiguitatem aliquam præſeferebant. Appoſui quoque prolixè propoſitionum caſus omnes neglectos in textu, eorumque demonſtrationes. Sed hiſce omnibus in rebus religioſus adeò fui, vt omnia diuerſo charactere in notis memorauerim, exceptis tamen ijs., quæ minoris momenti ſunt, vt litteræ tranſpoſitæ, & deficientes, & verba aliqua impropria, & non ſignificantia, quæ commemorare non cenſui, ne volumen in immenſum excreſceret.

Tandem potuiſſem quidem abundantioris doctrinæ gratia non pauca meo marte hiſce libris ſuperaddere non omnino forſan contemnenda, ſed parcus adeo fui, vt tantummodo quæ ad illuſtrationem, & ornatum operis facere videbantur, adiecerim ſuntq; nonnullæ propoſitiones additæ, quæ nouæ, & forſan inelegantes non erunt.

Conſiderandæ modo ſunt difficultates à præſtantiſſimo, et doctiſſimo Claudio Midorgio propoſitæ contra Manuſcriptum Arabicum Apollonij, quod Clariſſimus, & de bonis litteris optimè meritus Golius ex oriente detulit, eædemq; difficultates eodem iure noſtrum Manuſcriptum, quod Golianum, petunt. Verba Merſenni in præfatione Conicorum Apollonij ſuæ ſynopſis Mathematicæ hæc ſunt. Suſpicatur autem Claudius Midorgius hos tres libros, (*ſcilicet 5. 6. & 7. Conicorum Apollonij*) eſſe cuiuſdam Arabis ſub Apollonio latentis, quòd in quinto ſuo libro primam propoſitionem ſexti Apollonij ſuperius allatam non ſolum in cono recto, ſed in quouis etiam ſcaleno, & illorum portionibus quibuſcumque datis poſſibilia quæque demonſtrat. *Hæc quidem ratio quanti ponderis ſit æqui rerum æſtimatores iudicent, & ſi quidem omnes, qui in Geometricis mediocriter verſati ſunt optimè norunt ſucceſsiuè aliquid vlteriùs inueniri præter ea, quæ diuini Præceptores Euclides, Archimedes, Apollonius, & Ptolemæus ediderunt, facile enim eſſe inuentis addere quis ignorat? Nulli vnquam venit in mentem librum Spiralium non ab Archimede, ſed ab aliquo alio ſcriptum fuiſſe, propterea quod vniuerſaliùs quarumcumque ſpiralium paſsiones Neoterici demonſtrarunt; Nec quia admirabilis Maurolicus in ſuo quinto Conicorum libro, & alij recentiores, ſicuti præclarus Phyloſophus, & Mathematicus Vincentius Viuianus Patritius Florentinus in ſuo erudito libro de Maximis, & Minimis alia longè diuerſa ab Apollonij ſpeculationibus excogitarunt, hos libros adulterinos eſſe auſi ſunt affirmare. Et ſicuti ipſemet Midorgius non repudiauit librum primum Conicorum ab Eutocio editum, licet ipſe in ſuo libro tertio melius ſe demonſtraſſe propoſitiones 52. 53. 54.*

libri

libri primi ſummopere glorietur, pari iure hi libri adulterini cenſendi non erunt non alia de cauſa, niſi quia propoſitiones horum librorum non correſpondent, nec aſsimilantur admirandis cogitationibus in eius ſublimi mente repoſitis. Et ſane non dubito, quòd ſi Midorgius ipſe hos libros vidiſſet, & contrectaſset, omnino illius magni Apollonij eſſe abſq; vlla hæſitatione affirmaſſet. Nam primi quatuor libri continent eaſdem propoſitiones, & ſæpe numero eadem verba, quæ in textu Græco Eutocij leguntur: reliqui libri ſubſequentes docent ea, quæ in epiſtola ad Eudemum propoſuerat ſe demonſtraturum Apollonius, & quæ Pappus, & Eutocius diſtinctè, & expreſsè ibidem tractari affirmant. Rurſus profunda mentis perſpicacia, methodus ſcribendi, & genius Apollonij adhuc ibidem conſpicitur, nec fieri potuit, vt à translatoribus, à Paraphraſte, à temporis diuturnitate prorſus deleretur, atque mirandum ingenium Apollonij à tanta barbarie omnino occultaretur. Rurſus in confeſſo eſt opera Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolomæi, & aliorum magnorum virorum Arabicè translata fuisſe, & expreſsè grauisſimi ſcriptores Arabi, præcipuè Gregorius Bar-Hebræus lib. 9. Chronicorum ait, opera Apollonij Arabicè translata primò fuisſe anno 200. AEgyræ Maumettanæ ſub Almen Kalypha à Ioanne Patricida, & poſtea ab alijs recentioribus. Quare dubitandum non eſt hos eſſe veros, atque legitimos tres poſtremos Conicorum libros Apollonij Pergæi Paraphraſticè ab Abalphatho deſcriptos.

Fruere modo, mi lector, præclaro, & admirando beneficio Sereniſsimi Principis Etruriæ, qui regali magnificentia, et liberalitate pretioſiſſimum hunc theſaurum humaniſſimè largitur. Vale.

INDEX

Propoſitionum Lib. V. VI. VII. Conic. iuxta ſeriem numerorum ab Apoll. ſeruatam, cum Lemmatibus, & Propoſition. additis,

Vbi indicantur ſectiones, & pagina, in quibus propoſitiones reperiri debent.

Lib. V.

Propoſ.	Sect.	Pag.
i	1	5
ii	1	5
iii	1	6
iv	2	8
v	2	8
vi	2	8
vii	4	24
viii	3	16
ix	3	18
x	3	18
xi	5	26
xii	4	24
xiii	6	27
xiv	6	27
xv	6	27
xvi	16	112
xvii	16	112
xviii	16	112
xix	17	116
xx	17	117
xxi	17	117
xxij	17	117
xxiii	17	118
xxiv	17	118
xxv	17	119
xxvi	7	29
xxvii	7	29
xxviii	7	29
xxix	12	72
xxx	12	72
xxxi	12	72
xxxii	18	124
xxxiii	18	125
xxxiv	18	125
xxxv	18	125
xxxvi	18	126
xxxvii	18	126
xxxviii	18	127
xxxix	18	128
xxxx	18	128
xxxxi	15	109
xxxxii	15	109
xxxxiii	15	110
xxxxiv	10	67
xxxxv	10	68
xxxxvi	18	126
xxxxvii	18	128
xxxxviii	18	129
xxxxix	8	32 33
l	8	33
lj	8	34
lii	8	35
liii	8	35
liv	8	39
lv	8	39
lvi	8	39
lvij	8	40
lviii	9	60
lix	9	60
lx	9	62
lxi	9	62
lxii	9	60
lxiii	9	60
lxiv	13	74
lxv	13	74
lxvi	13	75
lxvii	13	76
lxviii	11	70
lxix	11	70
lxx	11	71
lxxi	11	71
lxxij	13	77
lxxiii	14	88 89
lxxiv	14	90
lxxv	14	90
lxxvi	14	91
lxxvii	14	92

Lib. V.

Lemm. additæ	Paginæ.
i	13
ii	14
iii	15
iv	15
v	30
vi	31
vij	31
viii	57
ix	78
x	78
xi	79
xij	92

Lib. V.

Prop. additæ.	Paginæ.
i	11
ii	11
iii	22
iv	23
v	54
vi	86
vij	101
viii	103
ix	103
x	104
xi	105
xii	106
xiii	107
xiv	107

Lib. VI.

Propoſ.	Sect.	Pag.
i	1	138
ii	1	139
iii	2	146
iv	1	141
v	3	152
vi	2	147
vii	2	147
viii	3	153
ix	2	148
x	1	141
xi	4	154
xii	4	155
xiii	4	156
xiv	4	157
xv	6	175
xvi	6	177
xvii	6	178
xviii	7	191
xix	7	191
xx	8	193
xxi	8	195
xxij	8	197
xxiij	8	198
xxiv	8	198
xxv	9	207
xxvi	10	237
xxvii	10	238
xxviii	10	240

Prop.	Sect.	Pag.
xxix	11	247
xxx	11	248
xxxi	11	251

Antiquæ Propoſ.		Præmiſſæ.
i	5	168
ii	5	168
iii	5	168
iv	5	168
v	5	168
vi	5	171

Lib. VI.

Lemm. addita.	Pag.
i	150
ii	158
iii	159
iv	160
v	161
vi	183
vii	184
viii	186
ix	229
x	246

Lib. VI.

Prop. additæ.	Pag.
i	151
ii	210
iii	211
iv	214
v	216
vi	219
vii	220
viii	222
ix	226
x	227
xi	230
xii	231
xiii	233
xiv	236
xv	261
xvi	262
xvii	265
xviii	267
xix	267

Prop.	Pag.
xx	268
xxi	269
xxii	270

Lib. VII.

Propoſ.	Sect.		Pag.
i	1		273
ii	2		276
iii	2		276
iv	2		277
v	1		274
vi	2		278
vii	2		278
viii	3		282
ix	3		283
x	3		283
xi	3		283
xii	4		291
xiii	4		291
xiv	4		291
xv	3		283
xvi	3		283
xvii	3		283
xviii	3		283
xix	3		283
xx	3		283
xxi	5		299
xxii	4		291
xxiii	1		274
xxiv	5	298	303
xxv	4		291
xxvi	5	298	300
xxvii	4		291
xxviii	5	299	300
xxix	4		291
xxx	4		291
xxxi	11		370
xxxii	11		370
xxxiii	6		314
xxxiv	6		315
xxxv	6		316
xxxvi	6		316
xxxvii	5		304
xxxviii	7		323
xxxix	7		324
xxxx	7		325
xxxxi	9	341	343

Prop.	Sect.		Pag.
xxxxii	5		301
xxxxiii	5	298	302
xxxxiv	8		333
xxxxv	8		333
xxxxvi	8		335
xxxxvii	9	342	344
xxxxviii	9	342	347
xxxxix	10		358
L	10		358
Lj	10		358

Lib. VII.

Lemm. addita.	Pag.
i	306
ii	318
iii	318
iv	318
v	319
vi	327
vii	327
viii	328
ix	328
x	336
xi	336
xii	337
xiii	349
xiv	350
xv	350
xvi	361
xvii	361
xviii	364

Lib. VII.

Prop. additæ.	Pag.
i	322
ii	323
iii	331
iv	332
v	341
vi	341
vii	357
viii	357
ix	368
x	368

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. V.

DEFINITIONES.

I.

Si à puncto aliquo in axe ſectionis conicæ ſumpto egrediantur aliquę rectæ lineæ ad ſectionem, vocabo punctum illud, ORIGINEM.

II.

Et lineas, RAMOS.

III.

Segmentum autem axis intèr illud, & verticem ſectionis ei proximiorem, MENSVRAM.

IV.

Sed ſi fuerit menſura æqualis ſemiſſi erecti, vocabo illam, COMPARATAM.

V.

Et perpendiculares cadentes ab extremitatibus ramorum ſuper axim vocabo, POTENTES illorum ramorum.

VI.

Abſciſſa verò illarum potentium, ABSCISSA ramorum.

VII.

Et inuerſa illarum potentium, INVERSA ramorum.

VIII.

Atque rectangulum contentum ſub inclinato, & aggregato inclinati, & erecti, vel differentia tranſuerſi, & erecti vocabo, FIGVRAM COMPARATAM.

IX.

In quolibet rectangulo applicato ad ſegmentum axis, ſi illud ſegmentum ad latitudinem illius rectanguli eandem proportionem habuerit, quam axis ad latitudinem figurę comparatæ vocabo illud, EXEMPLAR.

X.

Si ex puncto ſuper axim educatur perpendicularis ad vtraſque partes ſectionis, & ex puncto aliquo illius perpendicularis educantur lineæ terminatæ ad ſectionem ex vtraque parte, vocabo punctum illud in perpendiculari ſumptum, CONCVRSVM.

XI.

Et lineas etiam, RAMOS.

XII.

Et qui ſecant menſuram, & terminantur ad ſectionem ex altera parte concurſus, RAMOS SECANTES.

XIII.

At qui non ſecat illam, & tranſit per concurſum, & terminatur ad axim, & ſectionem ſimul, RAMVM TERMINATVM.

XIV.

Sed cuiuſcumque rami ſecantis, cuius portio inter ſectionem, & axim intercepta eſt linea breuiſſima, vocabo illum, BREVISECANTEM.

XV.

Et vocabo ſegmentum axis inter perpendicularem, & verticem ſectionis proximiorem interceptum, MENSVRAM, quoque.

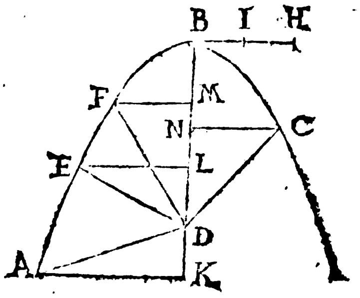
XIV.

Et portionem ſectionis conicæ diſſectam ab ordinatione axis tranſeuntis per originem, ſiuè per concurſum propè verticem proximiorem ſectionis, vocabo, SEGMENTVM illius puncti.

N O T Æ.

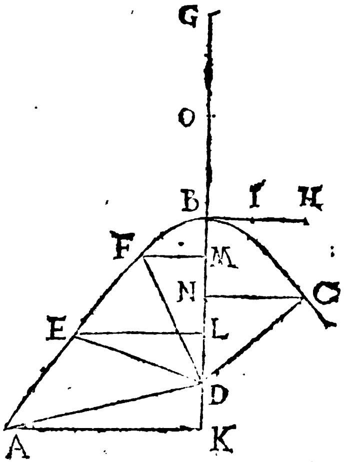
HAE definitiones non ſunt Apollonÿ, ſed Interpretis Arabici, qui in proemio huius operis apertè ait, addidiſſe plurimas definitiones in libris Apollonÿ, quibus theoremata breuiſsimè proponi poſſe profitetur, vt in prioribus quatuor libris videre eſt. Eas autem exemplis illuſtrare conabor.

I. *Sit qualibet coni ſectio A B C, cuius axis B D, & in eo ſumatur quodlibet punctum D intrà ſectionem, à quo educantur rectæ lineæ D A, D E, D F, D C vſque ad ſectionem. Tùnc vocatnr punctum D, Origo.*



II. *Et lineæ D A, D E, & cæteræ vocantur, Rami.*

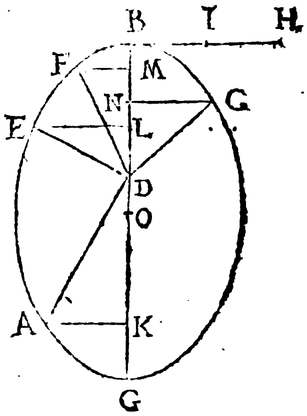
III. *Portio verò axis B D intèr originem D, & verticem B interpoſita vocatur Menſura. Sed in ellipſi A B C G, ſi axis portiones D B, & D G inæqualès fuerint, tantummodò minor portio B D vocatur Mēſura, non autem maior D G.*



IV. *Sit poſteà recta B I ſemiſsis lateris recti B H iam ſi menſura D B æqualis fuerit ſemierecto B I, vocatur D B, Menſura comparata.*

V. *At ſi à terminis ramorum A, E, F C educantur ad axim perpendiculares A K, E L, F M, C N, ipſum ſecantes in K, L, M, N vocantur illæ rectæ lineæ Potentes illorum ramorum.*

VI. *Recta verò K B vocatur Abſciſſa rami D A, & L B Abſciſſa rami D E, & ſic reliquæ omnes.*



VII. *Sit poſteà O centrum ſectionis, iam axis portio ex centro O vſquè ad potentialem A K educta, ſcilicet O K vocatur Inuerſa rami D A, pariterque O M eſt Inuerſa rami D F.*

VIII. *Si ponatur recta linea B P ad axim perpendicularis, quæ in hyperbola fiat æqualis aggregato; in ellipſi verò fiat æqualis differentiæ laterum recti B H, & tranſuerſi G B, tunc rectangulum contentum ſub G B, & B P vocatur, Figura comparata.*

IX. *Poſteà ſi, vt G B ad B P ità fiat ſeg-*

mentum axis D B ad D R, & compleatur parallelogrãmum rectãgulum B R, tunc ſpatium B R vocatur Exemplar. Pari ratione ſi, vt G B ad D P ità fiat ſegmentum axis D K ad latitudinem K S, compleaturque parallelogrammum rectangulum D S, vocabitur paritèr D S Exemplar.

X. *Et ſi C D perpendicularis fuerit ad axim B D, & producatur vltrà axim in E, atquè à puncto E extendantur vſquè ad ſectionem rectæ lineæ E B, E F, E G, vocabitur E punctum Concurſus.*

XI. *Et lineæ rectæ E B, E F, E G vocantur etiam Rami.*

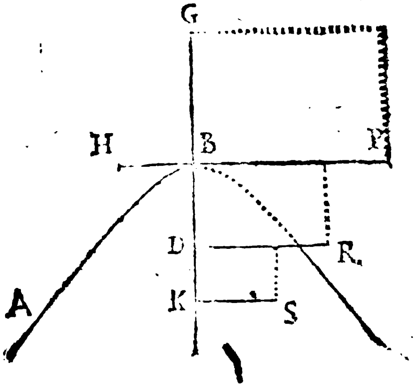
VII. *Atquè linea recta E F ſecans axim in H vocatur Ramus ſecans.*

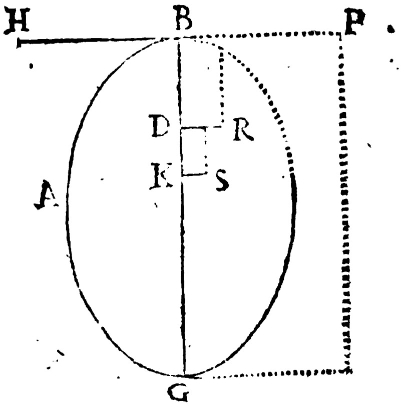
XIII. *Et recta linea E B conueniens cum axi in vertice ſectionis vocatur Ramus terminatus.*

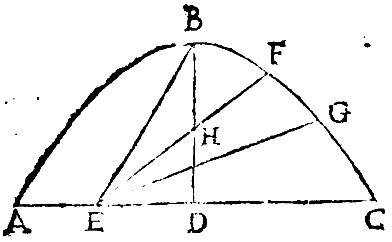
XIV. *Si verò rami ſecantis E F portio eius H F inter ſectionem, & axim intercepta fuerit breuiſſima omnium linearum, quæ ex puncto H ad ſectionem duci poſſunt, tunc ramus E F vocabitur Breuiſecans. In textu Arabico ſecans ramus vocabatur, mendoſè, vt arbitror, non enim hæc definitio diſtingueretur à duodecima definitione.*

XV. *Similitèr ſegmentum axis D B ſectum à perpendiculari ad axim ex origine E ducta, vocatur quoquè Menſura.*

XVI. *Tandem ſi per punctum originis D, vel concurſus E ducatur ordinata A C, tunc figura contenta ab ordinata A C, & ſectione conica A B C, vocatur Segmentum illius puncti.*





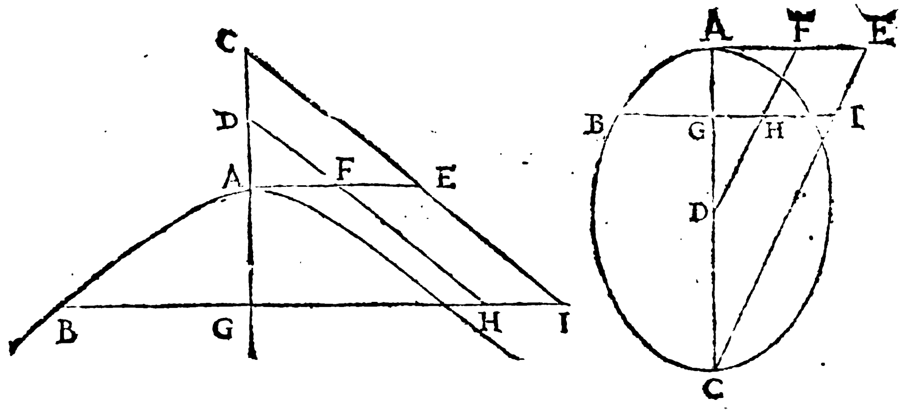


SECTIO PRIMA

Continens propoſitiones I. II. & III. Apollonij.

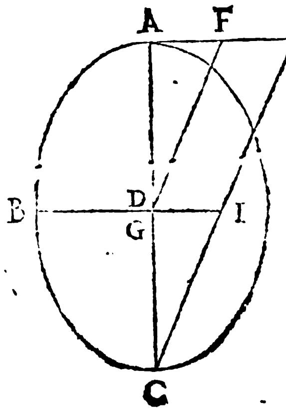
PROPOSITIO I.

Si ex centro D ſectionis A B (habentis centrum) egrediatur linea recta D F H bifariam diuidens A E erectum illius axis, quod ſit perpendiculare ſuper axim C A G, ſecans axis ordinationem B G I; vtiquè dimidium illius ordinationis, videlicet B G, poterit duplum plani, quod producit illa linea cum axi inter erectum, & illam ordinationem, nempè duplum A G H F.



a QVia B G poteſt comparatum applicatum ad abſciſſam A G, & pla-
num G F dimidium eſt illius comparati; ergò B G poterit duplum
b plani G F; & hoc erat oſtendendum.

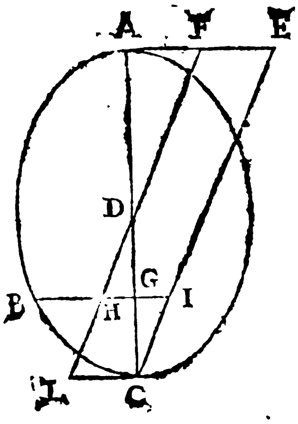
PROPOS. II.



PAritèr quoquè oſtendetur, ſi potens tranſierit per centrum ellipſis, quod BG poterit duplum trianguli A F G.

PROPOS. III.

SI verò in ellipſi cadat B G infrà centrum, poterit duplum differentię duorum triangulorum D A F, & D G H, nempè duplum plani G L, Et hoc erat propoſitum.

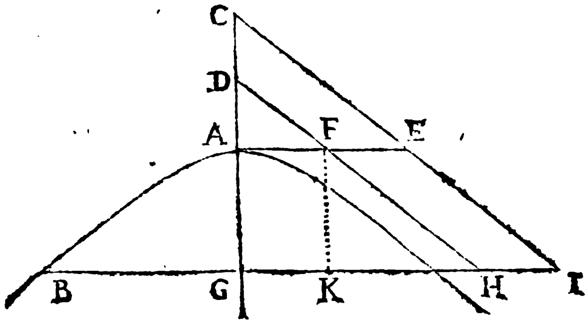


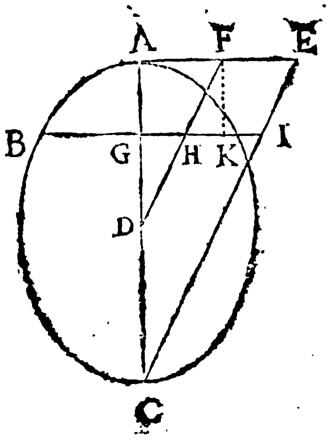
Notæ in Propoſitionem primam.

Vocat in primo libro interpres ſectiones habentes centrum hyperbolem, & ellipſim, & vocat erectum latus rectum ſectionis, vocat etiam ordinationem axis eam, quam nos ordinatim ad axim applicatam appellamus.

Quia B G poteſt comparatum applicatum ad abſciſſam A G, &c. *Vocat inſuper parallelogrammum comparatum applicatum ad axis abſciſſam A G rectangulum ipſum A G I, quod quidem adiacet lateri recto A E latitudinem habens abſciſſam A G excedens in hyperbola, & deficiens in ellipſi rectangulo ſimile ei, quod latere recto, & tranſuerſo continetur; ſcilicèt rectangulo C A E.* a

12. 13. lib. primi.



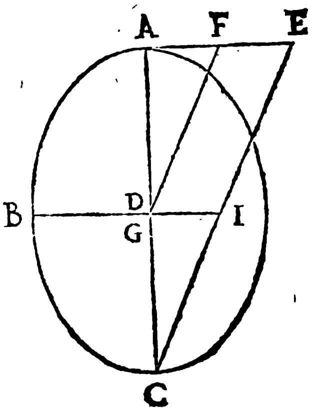


Et planum G F dimidium eſt illius comparati, &c. *Non erit inutile paulo fuſius oſtendere id quod ob nimiam facilitatem Apollonius tantummodò innuit. Ducatur recta linea F K parallela axi D A ſecans ordinatam B G productam in K: quia figuræ latera C A, & A E ſunt ipſarum D A, A F duplicia ergo C E, & D F H parallelæ ſunt, eſtque K H parallela A E, cum ambo poſitæ ſint perpendiculares ad axim, & C A, F K ſunt quoquè æquidiſtantes, ergò triangulum F K H ſimile eſt triangulo C A E, & propterea parallelogramma rectangula F K H, & C A E ſimilia erunt. Et quoniam quadratum ordinatæ B G æquale eſt rectangulo contento ſub latere recto E A, & abſciſſa A G excedente* b

Ibidem.

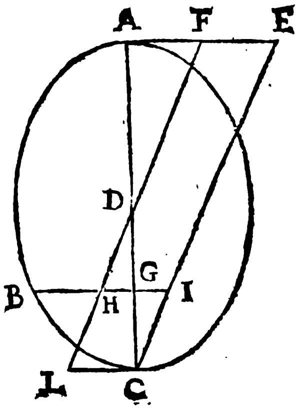
dente in hyperbola, & deficiente in ellipſi rectangulo FKH ſimile ei, quod lateribus recto, & tranſuerſo continetur, ſcilicet CAE, & eſt AF ſemiſsis lateris recti, igitur quadratum BG æquale eſt ſummæ in hyperbole, & differentiæ in ellipſi rectanguli GAF bis ſumpti, & rectanguli FKH, quod eſt æquale duplo trianguli FKH: ſed quadrilaterum AGHF æquale eſt aggregato in hyperbola, & differentiæ in ellipſi rectanguli GAF, & trianguli FKH, ergò quadratum BG æquale eſt duplo quadrilateri AGHF, ſeù differentiæ triangulorum DAF, & DGH.

Notæ in Propoſitionem ſecundam.



SEcunda propoſitio facilè ex prima deducitur; nam, quando ordinata BGHI tranſit per centrum D ellipſis; tunc tria puncta G, D, H conueniunt, & triangulum DGH euaneſcit, & ideò differentia trianguli DAF, & trianguli DGH nullum ſpatium habentis, erit triangulum ipſum DAF.

Notæ in Propoſitionem tertiam.



IN tertia propoſitione ſimilitèr, quandò ordinata BHGI cadit infrà centrum D ellipſis, tunc ducta CL parallela ipſi AE, erunt duo triangula DAF, & DCL æqualia inter ſe, cum ſint ſimilia, & latera homologa DA, DC ſint æqualia, quia ſunt ſemiaxes; propterea differentia triangulorum DGH, & DAF, ſeù DCL erit trapezium CGHL, quod ſubduplum eſt quadrati ordinatæ BG.

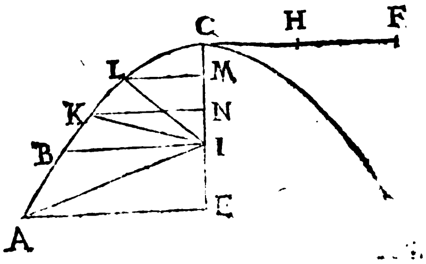
SECTIO SECVNDA

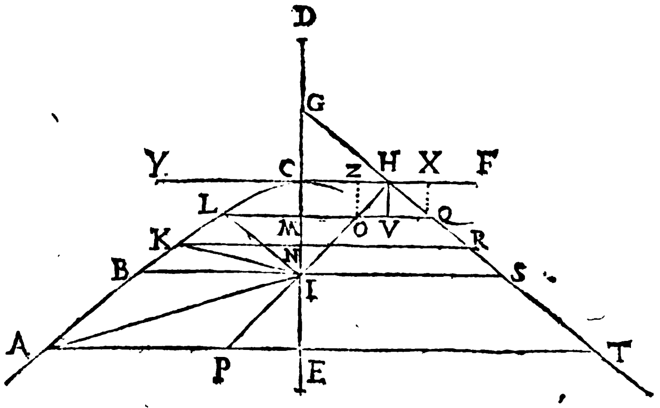
Continens propoſitiones IV. V. VI. Apollonij.

COmparata eſt minima ramorum egredientium ex ſua origine (4) in parabola (5) & hyperbola (6) pariterque in ellipſi (ſi comparata fuerit portio maioris duorum axium, & tunc maximus eſt reſiduum tranſuerſi axis.) Reliquorum verò propinquior minimo remotiore minor eſt. Quadratum autem menſuræ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati (4) in parabola quidem quadrato ſuæ abſciſſæ (5) & in hyperbola (6) & ellipſi exemplari applicato ad abſciſſam illius rami.

PROPOSITIO IV.

Sit ſectio A B C, & axis eius C E, & inclinatus, ſiue tranſuerſa D C centrum G, atque erectum C F, & ex C E ſecetur C I æqualis C H (quæ ſit ſemiſſis erecti) & ex puncto originis I educantur rami I B perpendicularis, & I K, I L, I A, & per H, I in hyperbola, & ellipſi ducatur H I P, & per H, G recta H G T, ad quam ex A, B, K, L extendantur A P E T, B I S, K N R, L M O Q perpendiculares ſuper C E. Dico, quod C I, comparata minor eſt, quam I L, & I L, quam I K, & I K, quam I B, & maximus ramorum in ellipſi eſt I D, & quod quadratum menſuræ I C minus eſt quadrato I L, in parabola quidem quadrato C M, & in hyperbola, & ellipſi exemplari applicato ad C M. Quoniam in parabola L M poteſt a duplum M C in C H, nempè C I (12. ex primo) & quadratum I L æquale eſt aggregato duorum quadratorum L M, & M I, quadratum itaque L I æquale eſt quadrato M I, & M C in C I bis, quæ ſunt æqualia duobus quadratis C I, M C. Quadratum igitur C I minus eſt quadrato L I quadrato ipſius M C, quæ eſt eius abſciſſa, & pariter oſtendetur, quod quadratum C I minus eſt quadrato I K quadrato N C, & minus quadrato I B quadrato C I, & minus quadrato A I quadrato E C.

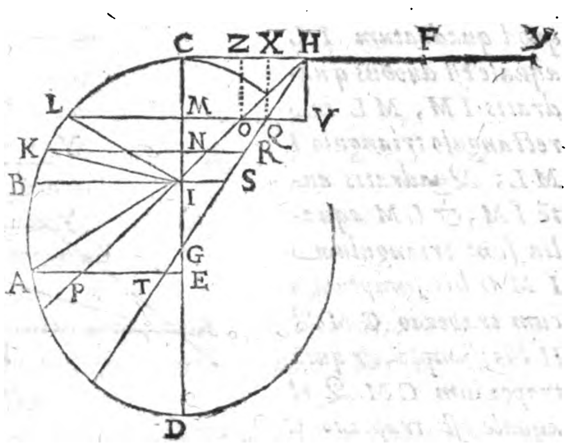




PROPOSITIO V. & VI.

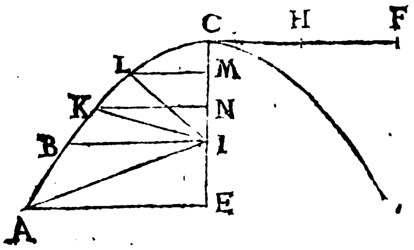
At verò in hyperbola, & ellipſi producantur ex Q, O, H lineæ parallelæ ipſi M C, & quia I C ex hypotheſi æqualis eſt H C, erit I a M æqualis M O, quadratum itaque I M duplum eſt trianguli I M O, & b quadratum L M duplum eſt trapezij C M Q H (prima ex 5.) ergo quadratum I L tum IL duplum eſt trianguli ICH vnà cum duplo trianguli QHO, nempe cum plano rectanguli QZ; ſed quadratum IC eſt duplum trianguli IHC (eò quod CH æqualis eſt CI) ergo quadratum CI minus eſt quadrato LI plano rectanguli QZ.

c Deindè ponamus in ellipſi YF æqualem differentiæ, & in hyperbola
d æqualem aggregato DC, CF; ergo propter ſimilitudinem duorum trian-
gulorum GMQ, HVQ, & HVO, MIO, erit HV æqualis VO, & H
e V, vel ei æqualis OV ad VQ eſt, vt MG ad MQ, nempe vt GC ad
HC, ſeù vt DC ad CF, igi-
f tur VO ad VQ eſt vt DC
ad CF, & comparando ſum-
mas terminorum ad antece-
dentes in hyperbola, & dif-
ferentias eorundem ad ante-
cedentes in ellipſi fiet OQ
ad VO (quæ æqualis eſt O
g Z, nempè MC) vt YF ad
YC, & eſt YC, æqualis D
C, & YF æqualis ſummæ
in hyperbola, & differentiæ
in ellipſi ipſarum DC, & C
F; quadratum igitur IC mi-
h nus eſt quadrato IL rectangulo QZ, quod eſt exemplar ſimile Def. 8. 9. huius.
plano rectanguli CD in YF, quæ eſt figura comparata. Atque ſic de-
monſtrabitur, quod quadratum IC minus ſit quadrato IK exemplari ap-
plicato ad NC, & minus eſt quadrato BI exemplari applicato ad I.C,
& minus quadrato AI exemplari applicato ad EC: Eſtque MC minor,
quàm NC, & NC, quam CI, & CI, quàm CE; igitur LI maior eſt,
quàm IC, & IK maior, quàm LI, & IB maior, quàm IK, & IA, quàm
IB. Et hoc erat oſtendendum.



Notæ in propoſitionem quartam.

a QVoniam in parabola LM poteſt duplum MC, &c. *Quadratum enim LM æquale eſt rectangulo ſub abſciſſa MC, & latere recto CF, eſtque CH ſemiſsis erecti CF; ergo LM poteſt duplum rectanguli MCH.* 11. Lib. 1.

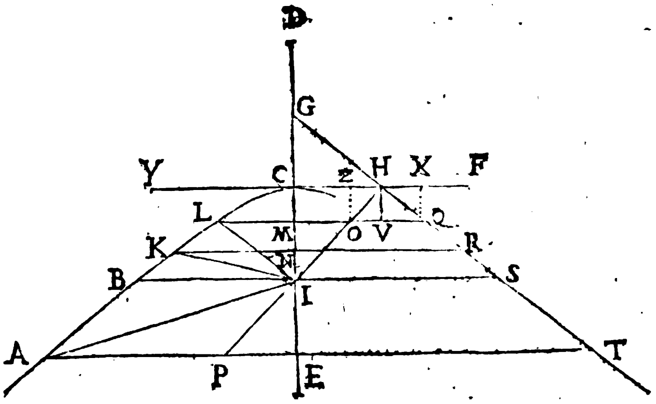


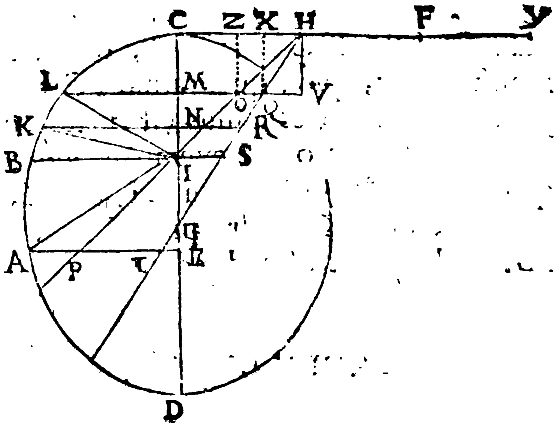
Notæ in propoſitionem quintam.

ERit I M æqualis M O, &c. *Propter parallelas M O, C H, & ſimilitudinem triangulorum I M O, & I C H.* a

b Ergo quadratum I L duplum eſt triãguli I C H, &c. *Eo quod quadratum I L æquale eſt duobus quadratis I M, M L in rectangulo triangulo I M L; Quadratis autẽ I M, & L M æqualia ſunt triangulum I M O bis ſumptum cum trapezio C M Q H bis ſumpto; & quia trapezium C M Q H æquale eſt trapezio C M O H, cum triangulo H O Q; at triangulo I M O, & trapezio C M Q H ſimul ſumptis æqualia ſunt triangulum I C H, cum triangulo H O Q. Ergo quadratum L I æquale erit duplo trianguli I C H cum duplo trianguli H O Q.*

1. huius.





Deindè ponamus in ellipſi Y F æqualem D C, & in hyperbola, &c. *Textus videtur corruptus, quem ſic corrigendum puto. Ponamus Y F in ellipſi æqualem differentiæ, & in hyperbola æqualem aggregato D C, & C F.* c

Propter ſimilitudinem triangulorum, &c. *Sunt enim duæ rectæ lineæ C G, & V H æquidiſtantes, quæ ſecant rectas lineas conuenientes in Q, & O.* d

Erit H V æqualis V O, &c. *Eo quòd M I oſtenſa eſt æqualis M O, eſtque H V ad V O in eadem proportione æqualitatis propter iam dictam ſimilitudinem triangulorum.* e

Igitur V O ad V Q eſt, vt D C ad C F, & conuerſa proportione deindè componendo in hyperbola, & inuertendo in ellipſi fiet in hyperbola Q O ad O V, &c. *Textum corruptum, atque confuſum clariùs exponi poſſe cenſeo per Lemma inferius appoſitum hac ratione. Et comparando ſummas in hyperbola, & differentias terminorum in ellipſi ad antecedentes.* f

Vt Y F ad Y C, & in ellipſi, vt F C ad C F, & Y F in ellipſi æqualis g

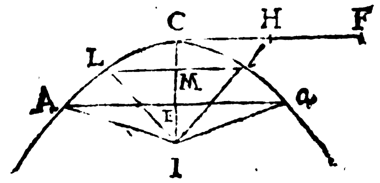
D C,

DC, quadratum igitur, &c. *Textum corruptum ſic corrigendum puto; & eſt YC æqualis DC, atque YF æqualis ſummæ in hyperbola, & differentiæ in ellipſi laterum DC, & CF.*

h Exemplar ſimile plano rectanguli CD in YF in hyperbola, & YC in ellipſi, &c. *Hæc poſtrema verba expungenda duxi, tanquam ſuperuacanea.*

PROP. I. Additar.

Poteſt etiam ad imitationem Euclidis reperiri multitudo ramorum inter ſe æqualium, qui ex origine duci poſſunt in eadem coniſectione. Itaque quoties menſura fuerit comparata, ſcilicet æqualis ſemiſsi lateris recti, tunc duo tantum rami inter ſe æquales a puncto originis ad vtraſque partes axis duci poſſunt in qualibet coniſectione, eruntque illi, qui ad terminos L l cuiuslibet ordinatim applicatæ L l ducuntur ab origine I, nam efficiuntur duo triangula I M L, & I M l, quæ circa angulos æquales ad M, nẽpe rectos, habent latera æqualia, ſcilicet L M, & l M medietates ordinatim applicatæ, & ſegmentum axis I M inter ordinatam, & originem eſt latus commune; ergo baſes, ſeu rami I L, & I l ſunt æquales. Reliqui verò rami ſupra, vel infra terminum eiuſdem ordinatim applicatæ minores, aut maiores ſunt ramo ad eius terminum ducto; quare duo tantum rami ad vtraſque partes axis inter ſe æquales duci poſſunt.



PROP. II. Add.

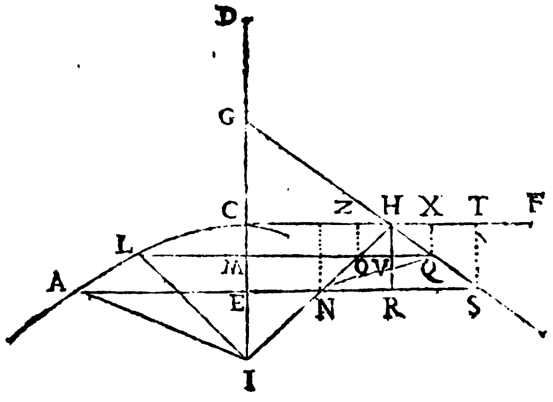
Rurſus quadratum rami I A remotioris a comparata ſuperat quadratum rami I L propinquioris (in parabola quidem) rectangulo ſub differentia, & ſub aggregato abſciſſarum eorundem ramorum; in reliquis verò ſectionibus rectangulo ſub differentia abſciſſarum, & ſub recta linea, ad quam ſumma abſciſſarum eandem proportionem habet, quam latus tranſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti.

4. huius.

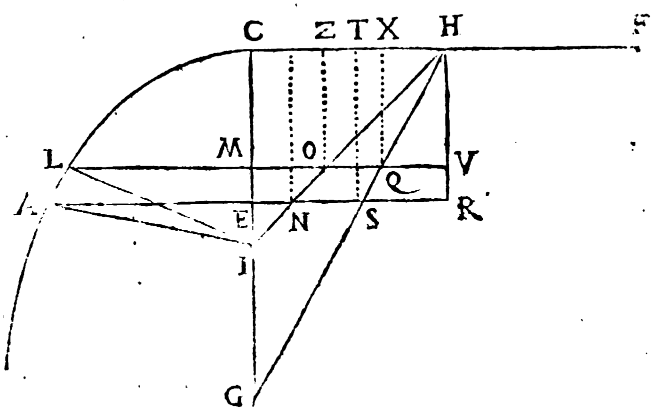
ibidem.

Et primò in parabola, quia quadratum I A æquale eſt quadrato I C cum quadrato abſciſſæ C E; pariterque quadratum I L æquale eſt quadrato eiuſdem I C cum quadrato abſciſſæ C M; ergo exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt differentiæ quadratorum E C, & C M; ſed exceſſus quadrati E C ſupra quadratum M C æqualis eſt rectangulo, cuius baſis æqualis eſt ſumma laterum E C, & C M; altitudo verò æqualis eſt E M differentiæ laterum eorundem quadratorum (vt deducitur ex elementis) igitur exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt rectangulo, cuius baſis eſt ſumma abſciſſarum E C, C M, altitudo verò E M differentia earundem abſciſſarum.

Secundò in hyperbola, & ellipſi fiat exemplar N T applicatum ab abſciſſam C E. Et quia quadratum I A æquale eſt quadrato eiuſdem



I C cum exemplari N T, & quadratum I L æquale eſt quadrato eiuſdem I C cum exemplari Q Z. Ergò exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt differentiæ exemplarium N T, & Q Z. Poſteà ducatur recta Q N: quia triangula Q N S, O N Q æqualia ſunt triangulo, cuius baſis æqualis eſt ſumma rectarum N S, & O Q, altitudo verò V R, vel M E, ſuntque illa duo triãgula æqualia trapezio N O Q S ſiue exceſſui trianguli N H S, ſupra triangulum H O Q: ergo triãgulum cuius baſis æquatur ſummæ ipſarum N S, O Q altitudo verò E M, æquale eſt differentiæ triãgulorum N H S, O H Q. Et ſimiliter eorum dupla, ſcilicet rectangulum, cuius baſis æqualis eſt ſumma N S, O Q, altitudo verò æqualis M E, erit differentia exemplarium rectãgulorum N T, & Q Z; ſed ſumma altitudinum V H, H R, ſeu ſumma abſciſſarum C M, C E ad ſummam baſium N S, O Q eandem proportionem habet, quam vna H V ad vnam O Q, ſeu quam latus tranſuerſum D C ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi D C, & recti C F: Igitur differentia exemplarium N T, Q Z, ſeu exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt rectangulo contento ſub E M differentia abſciſſarum, & ſub ſumma ipſarum N S, & O Q, ad quam ſumma abſciſſarum eandem proportionem habet, quam latus tranſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, quod fuerat propoſitum.



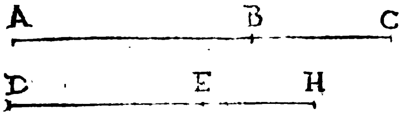
MONITVM.

EX varia diſpoſitione terminorum proportionalitatis ſcilicet duorum antecedentium, & duorum conſequentium conſurgunt plures modi argumentandi, quorum aliqui in elementis expoſiti non ſunt, aliqui verò ſignificantiſsimis vocibus, & breuiùs indicantur in textu Arabico, igitur, ne ſepiùs repetatur prolixa expoſitio modorum argumentandi in proportionalibus, & non proportionalibus, qui cumulatè inſeruntur in demonſtrationibus Apollonij opere pretium erit eos ſemel hìc exponere.

LEMMA I.

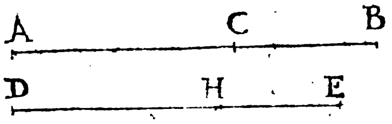
Si quatuor quantitates eandem proportionem habuerint, antecedentes, vel conſequentes ad terminorum ſummas, vel differentias in eadem ratione erunt; & è contra.

Habeat AB ad BC eandem proportionem, quàm DE ad EH: ſequitur primò, quod AC ad CB ſit, vt DH ad HE; & huiuſmodi argumentatio vocatur in elementis compoſitio terminorum proportionis: itaque ſummæ antecedentium, & conſequentium ad eaſdem conſequentes ſunt etiam proportionales: ſi vero ex eadem hypotheſi concludatur, quod AC ad AB, ſit vt DH ad DE, vt nimirum ſummæ terminorum proportionis ad antecedentes ſint proportionales: quod quidem manifeſtum eſt; nam poſita fuit AB ad BC, vt DE ad EH; erit inuertendo CB ad BA, vt HE ad ED, & componendo CA ad AB erit vt HD ad DE: modo huiuſmodi argumentandi forma innominata eſt; poteſt autem breuitatis gratia appellari, Per comparationem ſummæ terminorum ad antecedentes.



Secundò concludi poteſt, quod AB ad AC ſit vt DE ad DH; quia, vt in prima parte dictum eſt, AC ad AB erat vt DH ad DE, ergo inuertendo AB ad AC erit vt DE ad DH: hæc argumentandi forma vocari poteſt, Per comparationem antecedentium ad terminorum ſummas.

Tertiò concludi poteſt: quod BC ad CA, ſit vt EH ad HD; nam componendo AC ad CB, erat vt DH ad HE, quare inuertendo BC ad CA erit vt EH ad HD, & hæc argumentatio fieri dicetur comparando conſequentes ad terminorum ſummas.



Deindè ſint eadem quatuor proportionales in ſecunda figura, nimirum totum AB ad ſegmentum eius BC ſit vt totum DE ad portionem eius EH; tunc reſiduum AC ad CB erit, vt reſiduum DH ad HE; hæc argumentatio fieri dicitur in elementis, diuidendo terminos proportionis, eſtque comparatio differentiarum terminorum ad conſequentes.

At ſi concludatur ex eadem hypotheſi quod AB ad AC ſit vt DE ad DH; hæc argumentatio in elementis fieri dicitur per conuerſionem rationis eſtque comparatio antecedentium ad differentias terminorum.

Poſtea ex eadem hypotheſi ſequitur quod AC ad AB ſit vt DH ad DE: quia per conuerſionem rationis, ſeu referendo antecedentes ad differentias terminorum eſt AB ad AC, vt DE ad DH; ergo inuertendo AC ad AB erit vt DH ad DE, & hæc argumentatio innominata fiet comparando differentias terminorum ad antecedentes.

Tandem

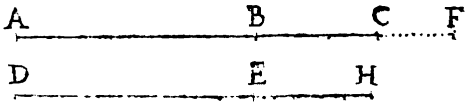
Tandem ex eadem hypotheſi ſequitur, quod C B ad C A ſit vt E H ad H D: nam diuidendo eſt vt A C ad C B, ita D H ad H E; ergo inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D: & hac argumentatio innominata fieri dicetur comparando conſequentes ad dereniſſtias terminorum.

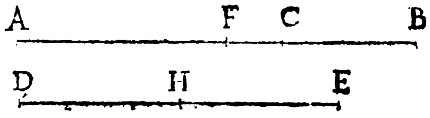
LEMMA II.

Si prima AB ad ſecundam BC maiorem proportionem habuerit quàm tertia DE ad quartam EH; comparando antecedentes ad terminorum ſummas habebit AB ad AC maiorem proportionem quàm DE ad DH.

Lem.1. *Fiat A B ad B F, vt D E ad E H; erit B F maior quàm B C, atque A F maior quàm A C; ergo A B ad A F eandem proportionem habebit quàm D E ad D H; ſed eadem A B ad minorem A C maiorem proportionem habet quàm ad A F maiorem, ergo A B ad A C maiorem proportionem habet quàm D E ad D H.*

Secundò ijſdem poſitis, dico comparando terminorum ſummas ad antecedẽtes A C ad A B habere minorem proportionem quàm D H ad D E. Quoniam ex præcedenti caſu A B ad A C maiorem proportionem habebat quàm D E ad D H; igitur inuertendo C A ad A B minorem proportionem habebit quàm D H ad D E.





Tertiò, dico quod comparando conſequentes ad terminorum ſummas B C ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D; quia (ex hypotheſi) A B ad B C maiorem proportionem habet quàm D E ad E H componendo A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E, & inuertendo B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E H ad H D.

Quartò, ijſdem poſitis in quarta figura, dico quod comparando differentias terminorum ad conſequentes A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E: quia ex conſtructione A B ad B F eſt, vt D E ad E H, diuidendo A F ad F B erit vt D H ad H E; ſed A C maior eſt quàm A F, & C B minor, quàm F B; igitur A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm A F ad F B; & propterea A C ad C B maiorem proportionem habebit, quàm D H ad H E.

Quintò, dico quod è contra, comparando conſequentes ad differentias terminorum C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D. Quia (ex præcedenti caſu) A C ad C B maiorem proportionem habebat quàm D H ad H E; ergo inuertendo C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D.

Ibidem. *Sextò, dico quod comparando antecedentes ad differentias terminorum B A ad A C minorem proportionem habebit quàm E D ad D H. Quia ex conſtructione*

AB ad

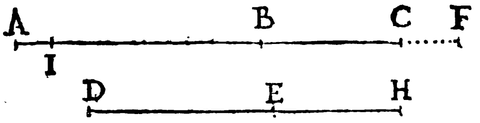
AB ad BF eſt, vt DE ad EH; ergo AB ad AF eſt, vt ED ad DH; ſed BA ad maiorem CA habet minorem proportionem quàm ad FA; igitur BA ad AC minorem proportionem habet quàm ED ad DH.

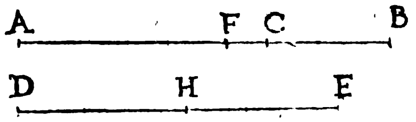
Septimò, dico è contra, quod comparando differentias terminorum ad antecedentes CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE. Quoniam, ex præcedenti caſu, BA ad AC minorem proportionem habebat quàm ED ad DH; igitur inuertendo CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE.

LEMMA III.

Si quatuor quantitates eandem rationem habuerint homologorum ſummæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt.

Oſtenſum enim fuit in elementis, quod proportionalium omnes antecedentes ad omnes conſequentes eandem proportionem habent, quàm vna antecedentium ad vnam conſequentium. Similiter oſtenſum fuit, quod ſi totum ad totum eandem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquũ, vt totum ad totum ſe habebit; ſed vno verbo homologorum ſummæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt iuxtà Arabici expoſitoris compendium.





LEMMA IV.

Si prima AB ad ſecundam DE maiorem proportionem habuerit, quàm tertia BC ad qnartam EH: dico, quod comparando homologorum ſummas AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm prima cum tertia, ideſt AC ad ſecundam cum quarta, ideſt DH.

Fiat BF ad EH, vt AB ad DE; ergo AB ad DE eſt, vt AF ad DH; ſed Lem. 3. *AF maior eſt quàm AC, igitur AF ad eandem DH maiorem proportionem habet, quàm AC; & ideo AB ad DE maiorem proportionem habet, quàm AC ad DH.*

Secundò ijſdem poſitis, dico, quod tertia BC ad quartam EH minorem proportionem habet qnàm AC ad DH.

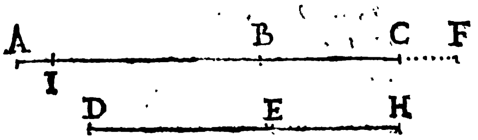
Fiat vt BC ad EH, ita IB ad DE, ergo CB ad EH eſt, vt CI ad HD; Ibidem. *ſed AB maior eſt quàm IB, & ideo CA maior quàm CI; igitur IC ad eandem*

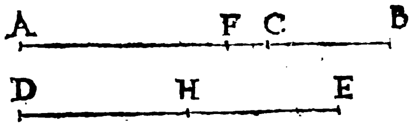
DH

D H minorem proportionem habet quàm A C, & propterea B C ad E H minorem proportionem habebit quàm A C ad D H.

Tertiò iiſdem poſitis in ſexta figura, dico quod comparando homologorum differentias prima A B ad ſecundam D E minorem proportionem habet quàm differentia A C ad differentiam D H.

Lem. 3. *Fiat B F ad E H, vt A B ad D E, ergo A F ad D H eſt vt A B ad D E, ſed A F minor eſt quàm A C, ergo A F ad eandem D H minorem proportionem habet quàm A C: & propterea A B ad D E minorem proportionem habet quàm A C ad D H.*





Ibidem. *Quartò, dico, quod tertia C B ad quartam H E minorem proportionem habet quàm differentia A C ad differentiam D H. Quoniam ex conſtructione A B ad D E eſt vt F B ad H E, erit F B ad H E, vt A F ad D H; ſed C B minor eſt quàm F B, atque A C maior quàm A F, & A F ad eandem D H minorem proportionem habet quàm A C; igitur C B ad H E eo magis habebit minorem proportionem quàm A C ad D H quæ erant oſtendenda.*

SECTIO TERTIA

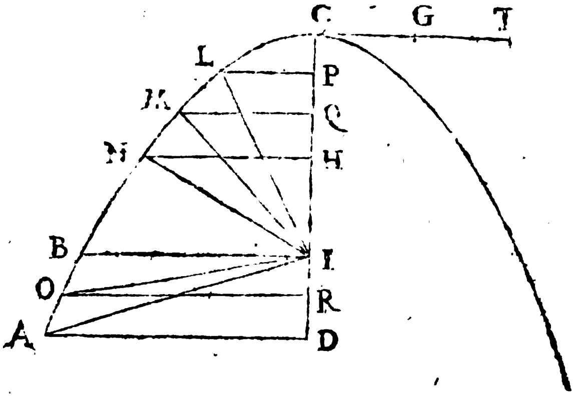
Continens VIII. IX. X. Propoſ. Apollonij.

SI menſura fuerit maior comparata, dummodo in ellipſi minor ſit medietate axis tranſuerſi; tunc minimus ramorum in ſectionibus eſt, cuius potentialis abſcindit à menſura verſus originem in parabola (8) lineam æqualem comparatæ, in hyperbola verò (9) & in ellipſi (10.) lineam, cuius inuerſæ proportio ad illam eſt, vt proportio figuræ; & reliqui rami, quò accedunt ad minimum ſunt minores remotioribus; & quadratum minimæ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati in parabola quidem (8) quadrato exceſſus ſuarum abſciſſarum, & in hyperbola (9) & ellipſi (10.) exemplari applicato ad exceſſum ſuarum inuerſarum, a

SIt itaque ſectio A B C, & menſura I C, inclinatus, ſiue tranſuerſa E C, dimidium erecti C G, centrum F, origo I, & I H in parabola ſit ęqualis C G, & in hyperbola, & ellipſi F H ad H I ſit, vt F C dimidium inclinati, ſeu tranſuerſæ ad C G, dimidium erecti, & educta ex H perpendiculari H N, & coniuncta recta N I; Dico N I minimum eſſe ramorum b

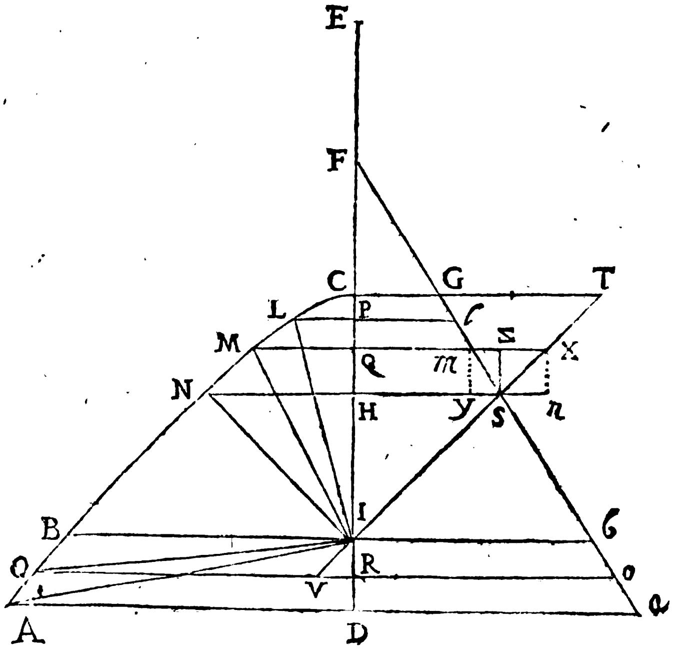
egredien-

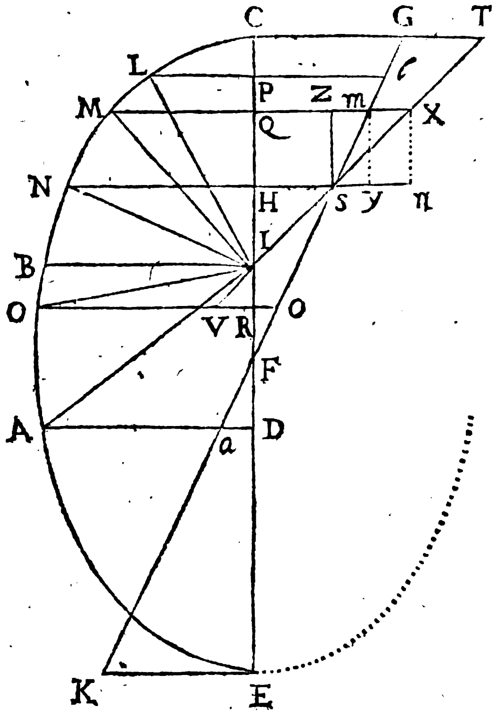
egredientium ex I, & inſuper, propinquiores illi minores eſſe remotioribus ramis ex vtraque parte, & quod quadratum IN minus eſt quadrato MI (exempli gratia) in parabola quadrato QH, in hyperbola, & ellipſi c exemplari applicato ad QH. Quoniam quadratum HN in parabola ęquale eſt HI, nempe CG in HC bis (11. ex primo) erit quadratum IN ęquale IH in HC bis cum quadrato HI; at quadratum MQ æquale eſt HI in QC bis (11. ex primo) igitur quadratum MI ęquale eſt IH in QC bis cum d quadrato IQ; hoc autem eſt ęquale duobus quadratis IH, HQ, & IH in HQ bis; igitur quadratum IM æquale eſt IH in HC bis cum quadrato IH, quę ſunt æqualia quadrato NI vnà cum quadrato HQ. Quadratum igitur MI excedit quadratum NI quadrato HQ. (Et conſtat quoque, quadratum IL excedere quadratum IN quadrato PH; atque PH maior eſt, quàm QH, ergo IL maior eſt, quàm IM, & IM, quàm NI. Ponamus iam BI perpendicularem ſuper CI, ergo quadratum BI ęquale eſt IC e in IH bis (11. ex primo); quadratum igitur IN minus eſt f quàm quadratum BI quadrato IH. Et quia quadratum OR ęquale eſt CR in IH bis excedet quadratum IN (quod eſt ęquale quadrato IH, & IH in HC bis) duobus quadratis HI, IR, & IH in IR bis, nempè quadrato RH; atquè ſic conſtat, quadratum AI excedere quadratum IN quadrato DH; eſtque DH maior, quàm RH, igitur IA maior eſt, quàm IO, & IO quàm IN. Et hoc propoſitum fuerat.



⁂

PROPOSITIO IX. & X.



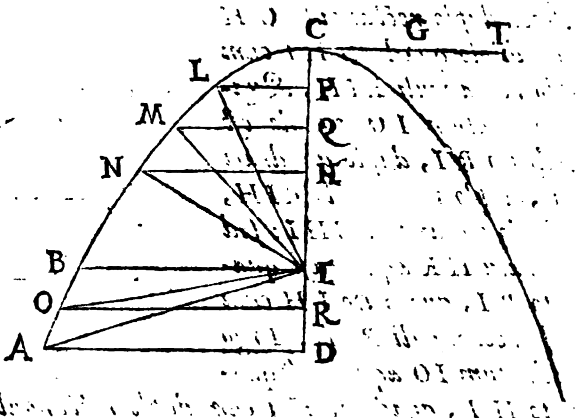


AT in hyper- g
bola (10.)
& ellipſi educa-
mus rectas lineas,
G F quidem ſecãtem
A D in *a*, &
N H occurrẽtem
F G in S, & I S
ſecantem C G in
T, pariterque M
Q ſecantem F G
in *m*, & I T in X,
& ex punctis *m*, S,
x educamus inter
N S, M X rectas
m y, X *n*, S Z pa-
rallelas ipſi C I.
Et quia C F ad C
G, nempe F H ad
H S poſita eſt, vt
F H ad H I erit H I æqualis H S; h
quadratum igitur I H eſt æquale
duplo trianguli I H S, & quadra-
tum N H ęquale eſt duplo trape-
Prop. 1. h. zij H G; quare quadratum N I
æquale eſt duplo trapezij I G;
ſimiliter quadratum I Q ęquale eſt i
duplo trianguli I Q X, & quadra-
tum M Q eſt æquale duplo trape-
zij Q G; itaque quadratum ex I M
æquale eſt duplo trapezij I G cum
duplo trianguli *m* S X, quod eſt æ-
quale plano *m n*: Et C F ad C G,
nempe proportio figuræ eſt, vt S Z,
nempe Z X ad Z *m* (& hoc quidem
propter ſimilitudinem triangulorũ)
quare comparãdo priores ad ſum-
Lem. 1. h. mas terminorum in hyperbola, & k
ad eorundem differentias in ellipſi
fiet X Z (quæ eſt æqualis ipſi X *n*)
ad X *m*, vt proportio inclinati, ſiue l
tranſuerſæ ad latitudinem figuræ
Def. 9. comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, eſtque applicatum ad X *n*,
nempe

nempe ad QH. Eodem modo conſtat, quod quadratum IL excedit qua-
dratum I N quantitate exemplaris applicati ad H P, & quod quadratum
B I excedit quadratum I N exemplari applicato ad I H, & quod quadra-
m tum I O excedit quadratum I N exemplari applicato ad R H (eo quod
quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R æqua- Prop.1. h.
le eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F
æquale eſt duplo trapezij R K; quadratum igitur O I in ellipſi æquale eſt Prop.3. h.
n duplo trianguli K E F, quod eſt æquale F C G cum duplo trapezij V F,
igitur quadratum O I in hyperbola, & ellipſi excedit duplum trapezij I G
o (quod eſt æquale quadrato N I) duplo trianguli V S o, quod eſt æquale
exemplari applicato ad R H : & ſimiliter patet, quod quadratum A I ex-
cedit quadratum N I exemplari applicato ad D H, eſtque D H maior
p quàm R H, & R H maior quàm I H; quare A I maior eſt, quàm O I, &
O I maior, quàm B I, & B I, quàm N I, & quodlibet horum duorum ex-
cedit N I poteſtate plano iam dicto, & hoc erat oſtendendum.

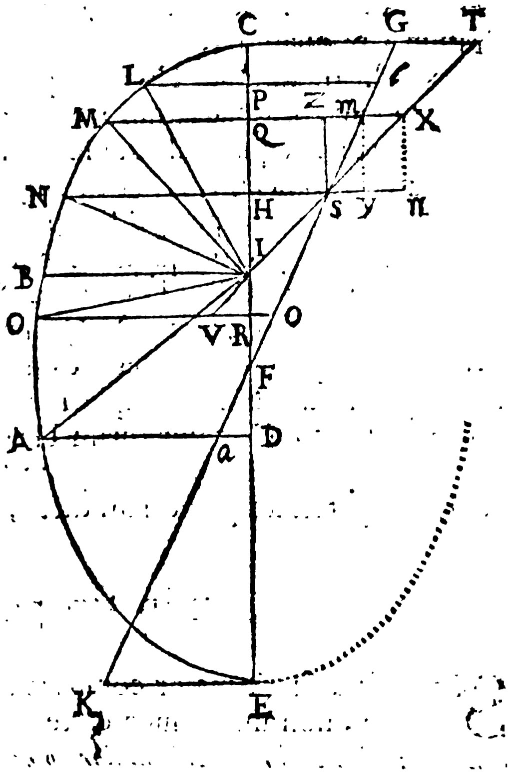
Notæ in Propoſitionem VIII.

a SI menſura fuerit maior comparata, dummodò in ellipſi ſit portio tranſuerſæ, non maior medietate ipſius, tunc minimus, &c. *Sic puto legendum: Si menſura fuerit maior comparata, dummodo in ellipſi minor ſit medietate axis tranſuerſi, tunc minimus, &c. Nam ſi menſura ſumi poſſet æqualis ſemitranſuerſo, tunc quidem origo eſſet in centro ellipſis, quare vndecima propoſitio huius eſſet ſuperflua, in qua ſupponitur origo in ipſomet centro ellipſis. Animaduertendum eſt quod in hac propoſitione menſura neceſſariò ſumi debet in axe maiori ellipſis; quandoquidem menſura I C ponitur maior, quàm C G, & C F maior quàm C I, ergo C F maior eſt quàm C G, & illius duplum ſcilicet axis E C maior erit duplo huius, ſed vt E C ad duplum C G, ita eſt quadratum E C ad quadratum Recti axis eiuſdem ellipſis : ergo E C eſt maior duorum axium ellipſis A B C.*



b Et educta ex H perpendiculari H N, &c. *Ideſt ex H educta H N perpendiculari ad axim C I, quæ ſecet ſectionem in N, & iuncta recta N I, pariterque ductis reliquis ramis I M, I L, I B, I A, atque ab eorum terminis ad axim extenſis perpendicularibus, vt in propoſitionibus quarta, quinta, ſexta factum eſt.*

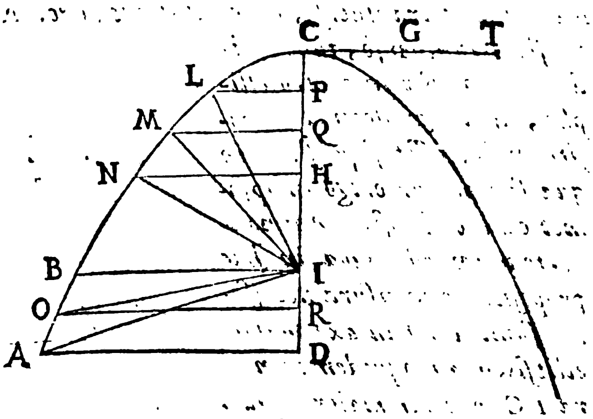
c Quadratum H N in parabola æquale eſt H I nempè C G in H C bis (prima ex quinto) &c. *Hoc deduci non poteſt ex prima propoſitione huius libri,* *ſed potius ex vndecima libri primi; eſt enim quadratum H N æquale rectangulo contento ſub abſciſſa H C, & ſub latere recto, eſtque rectangulum ſub H C, & ſub ſemirecto C G ſemiſsis illius; igitur quadratum H N æquale eſt duplo rectanguli H C G.*



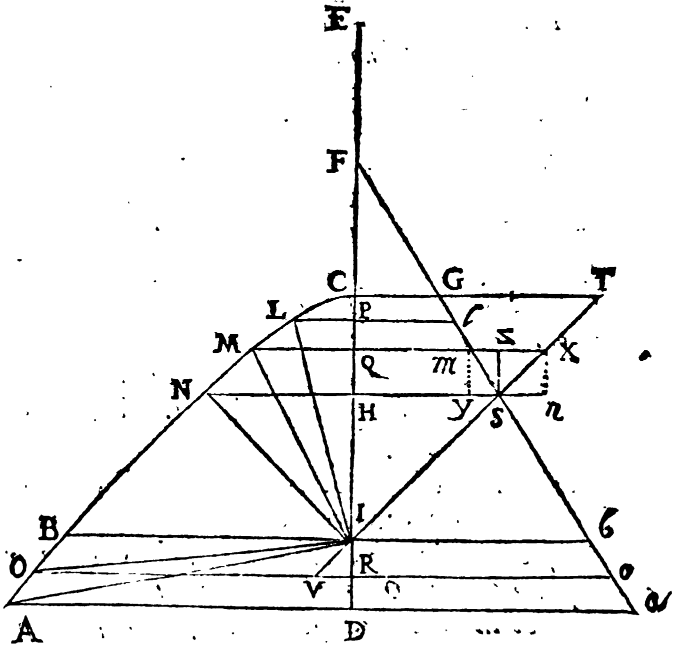
d Hoc autem eſt æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis, &c. *Poſt hæc verba ſubiungo claritatis gratia, atque C H in H I bis æquale eſt duplo C Q in H I vna cum duplo Q H in H I.*

e Ergo quadratum B I æquale eſt I C in I H bis, &c. *Hic pariter, vt clarior reddatur demõſtratio, ſubiungo, ſcilicet duplo rectãguli C H I vna cum duplo quadrati H I; erat autem quadratum N I æquale duplo rectanguli C H I, & vnico quadrato H I, ergo, &c.*

f Et quia quadratum O R æquale eſt C R in I H bis, &c. *Subiungo hanc declarationem. Scilicet duplo rectanguli C H I, & duplo quadrati H I cum duplo rectanguli R I H. Quare quadratum I O æquale eſt quadrato R I, duplo quadrati H I, duplo rectanguli R I H, & duplo rectanguli C H I: ſed quadratũ H R æquale eſt quadrato R I, quadrato I H cum duplo rectanguli R I H. Ergo quadratum I O æquale eſt quadrato H R, quadrato H I cum duplo rectanguli C H I; erat autem prius quadratum I N æquale quadrato I H cum duplo rectanguli C H I. Igitur exceſſus quadrati I O ſupra quadratum I N eſt quadratum H R.*



Notæ in Propoſitionem IX. & X.



g AT in hyperbola, & ellipſi educamus G F ad *a* ex A D, & H N ad *s* ex F G, & I S ad T ex C G, ſi educta occurrat ſectioni ad A, & M Q poſita ad *m* ex *a*, F G, & X in I T, & ex *m*, S X, *my*, *xn*, S Z inter N S, M X, &c. *Eadē phraſi inconcinna exponitur vniuerſa constructio huius propoſitionis, ideo curaui eam reddere clariorem, dicendo; Educamus rectas lineas G F quidem ſecantem A D in a, &c.*

h Quadratum igitur I H eſt æquale triangulo I H S, &c. *Quia nimirum. Quadratum I H eſt æquale duplo iſoſcelei, & rectanguli trianguli I H S.*

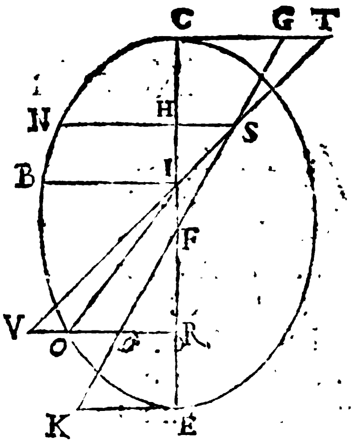
i Et ſimiliter quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli I Q X, &c. *Scilicet duplo trapezij I S m Q cum duplo trianguli S m X.*

k Et hoc quidem propter ſimilitudinem triangulorum, at componendo proportionem in hyperbola, tum inuertendo; & reflectendo in ellipſi fit, &c. *Huiuſmodi verba inepta ad concluſionem inferendam commutaui dicendo; Quare comparando priores ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad eorum differentias in ellipſi fit, &c. Quæ quidem expedite (vt in primo præcedentium Lemmatum oſtenſum eſt) progreſſum declarant.*

l Vt proportio inclinati, ſiue tranſuerſæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, &c. *Subiungo: nam, vt dictum eſt in quinta, & ſexta huius, poteſt hic demonſtrari, quod figura m n ſimilis eſt ei, quæ continetur latere tranſuerſo E C, & ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti iuxta definitiones octauam, & nonam.*

m Quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R in hyperbola æquale eſt duplo trapezij R G, & in ellipſi æquale eſt duplo trapezij R K, &c. *Legendum puto quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R æquale eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F æquale eſt duplo trapezij R K, &c. Deinde quum triangulum R V I ſimile ſit triangulo I H S propter parallelas V R, S H; ideo triangulum R V I erit quoque iſoſceleum, & rectangulum. Poſtea quadratum* 1. huius.

dratum



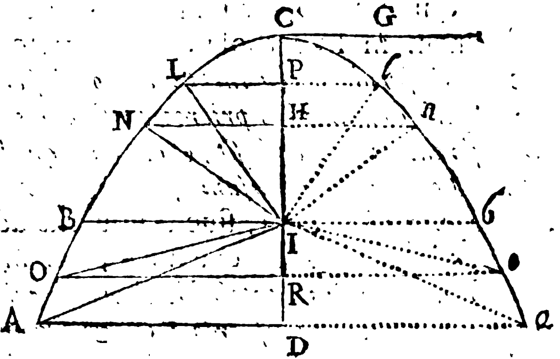
Prop. 1. h. *dratum O R æquale eſt duplo trapezij RCGO; Sed in ellipſi quando ordinata O R cadit infra centrum F, tunc quidem ducta EK parallela CG, quæ ſecet G F in K, erit quadratum O R æquale duplo differentiæ triangulorum F R o, & F C G, ſeu F E K, quæ differentia æqualis eſt trapezio R E K o, ideoque duo quadrata ex I R, & ex R O, ideſt quadratum ex I O æquale erit triangulis F C G, & I R V bis ſumptis dempto duplo trianguli F R o.*

Quod eſt ęquale triangulo F C G cum duplo trapezij V F, &c. *Addo, quæ videntur in textu deficere, ſeu cum duplo differentiæ triāgulorum I V R, & F R o. In hyperbola verò quadratum O I æquale eſt ſpatio rectilineo V I C G o bis ſumpto, quare in hyperbola, & ellipſi quadratū O I æquale eſt duplo trapezij I C G S cum duplo triāguli V o S.*

Quod eſt æquale exemplari applicato ad RH, &c. *Hoc enim conſtat ex ijs, quæ ſupra dicta ſunt.*

Eſtque DH maior in hyperbola, quàm RH, itaque A I maior, quàm OI, & OI in omnibus maior, quàm BI, &c. *Textum hunc corruptum ſic reſtituo: Eſtque D H maior, quàm R H, & R H maior quàm I H; itaque A I maior eſt, quàm O I, & O I maior quàm B I.*

Similiter, vt in præcedenti ſectione factum eſt, reperietur multitudo ramorum inter ſe æqualium, qui ex origine ad ſectionem duci poſſunt. Exiſtente
PROP. III. Add. *menſura I C maiore, quàm comparata, ſi differentia abſciſſarum rami maioris, & breuiſsimi æqualis fuerit abſciſſæ rami breuiſsimi, erunt tantummodo tres rami inter ſe æquales; ſi verò maior fuerit, duo rami ſolummodo æquales erunt; at ſi fuerit minor eadem abſciſſa, erunt quatuor rami tantùm æquales inter ſe.*



Et primò ramorum I O, & breuiſsimi I N abſciſſæ ſint R C, H C, & eorum differentia R H, ſitque R H æqualis H C, & producatur O R perpendicularis ad axim quouſque ſecet ſectionem ex altera parte in puncto o, coniungaturque ramus I o. Dico quod tres rami I O, I o, I C tantūmodo inter ſe æquales ſunt; quoniam quadrata in parabola rectarum R H, & H C,
8. huius. *ſeu in hyperbola, & ellipſi,*
9. 10. h. *rectangula exemplaria inter ſe ſimilia applicata ad R H, & H C æqualia ſunt inter ſe, cum eorum latera homologa R H, H C æqualia ſuppoſita ſint; eſtque exceſſus quadrati rami I O, vel I o, ſeu I C ſupra quadratum rami breuiſsimi I N æqualis quadrato R H, vel C H in parabola, & in reliquis ſectionibus, exemplaribus ſimilibus applicatis ad eaſdem rectas æquales R H, H C;*

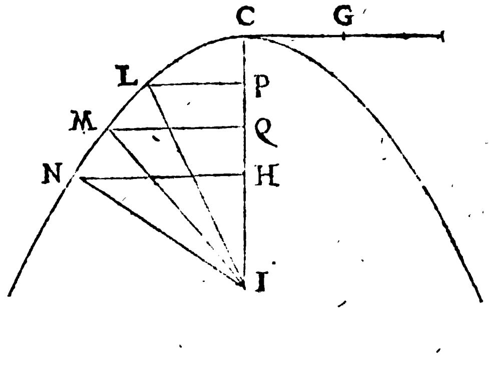
H C; igitur prædicti exceſſus tam in parabola, quàm in reliquis ſectionibus æquales ſunt inter ſe, & ideò quadrata ramorum I O, I o, I C, & rami ipſi æquales erunt: cumque quilibet alius ramus ſupra, vel infra ramum I O maior, vel minor ſit illo, non erunt plures, quam tres rami inter ſe æquales.

Secundò H D differentia abſciſſarum rami I A, & breuiſsimi I N ſupponatur maior, quàm H C quæ eſt abſciſſa breuiſsimi rami I N; & producta ſimiliter ordinata D A vltra axim ad ſectionem in a, & coniuncta I a; Dico, quod duo rami tantummodo I A, & I a inter ſe æquales ſunt: Quia H D maior eſt, quàm H C, erit quadratum ex H D maius quadrato H C; pariterque exemplar applicatum ad H D maius erit exemplari ei ſimili applicato ad H C, & ideo tam quadratum I A, quàm I a maius erit quadrato I C, cum quodlibet illorum maiori exceſſu ſuperet quadratum breuiſsimi rami I N quam quadratqm I C, quare tam ramus I A, quàm I a (qui æquales ſunt) maiores erunt, quàm I C, & ideo maiores quàm intercepti inter I C, & I N, pariterque maiores, quàm interpoſiti inter I N, & I A, & minores omnibus alijs, qui infra ipſos cadunt. Quapropter duo tantùm rami I A, I a ab origine ad ſectionem duci poſſunt inter ſe æquales.

Tertiò ſint duæ abſciſſarum differentiæ H P, & H I æquales inter ſe, & quælibet earum minor H C abſciſſa rami breuiſsimi, & producantur perpendiculares ad axim L P, B I, donec conueniant ex altera parte cum ſectione in l, & b, coniunganturque rami ad l, b. Dico, quatuor ramos I B, I L, I l, I b æquales inter ſe tantummodo duci poſſe; quia, vt dictum eſt, quilibet eorum ſuperat ramum breuiſsimum I N potentia eodem exceſſu, erunt radij ipſi I B, I L, I l, I b æquales inter ſe, reliqui verò ſupra, & infra ipſos maiores, aut minores erunt, & ideo non poſſunt duci plures, quàm quatuor rami iam dicti æquales. Quod erat oſtendendum.

PROP. IV. Add.

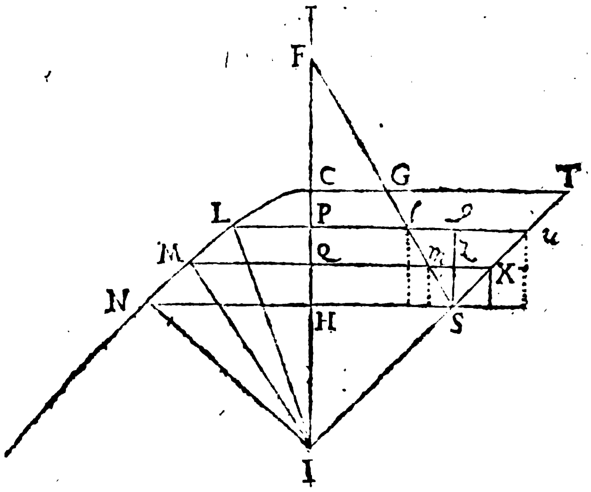
Et inſuper quadratum rami à breuiſsimo remotioris ſuperat quadratum rami propinquioris, in parabola quidem rectangulo ſub exceſſu, & ſub aggregato differẽtiali ſuarum abſciſſarum ab abſciſſa rami breuiſsimi, in reliquis verò ſectionibus rectãgulo ſub eodem exceſſu differentiali, & ſub recta linea, ad quam ſumma differentialis eandem proportionem habet, quam latus tranſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum recti, & tranſuerſi.



Quoniam in parabola quadratum I L ſuperat quadratum I M eodem exceſſu, quo quadratum H P ſuperat quadratum H Q (cum quadratum H P, atque quadratum I N ſimul ſumpta æqualia ſint quadrato L I, & quadrata ex H Q, & ex I N æqualia ſint quadrato I M) ſed exceſſus quadrati H P ſupra quadratum H Q æqualis eſt rectangulo ſub P Q differentia, & P H, H Q, ſumma laterum eorundem quadratorum contento; igitur quadratum I L ſuperat quadratum rami I M propinquioris breuiſsimo I N rectangulo ſub P Q exceſſu, & P H Q

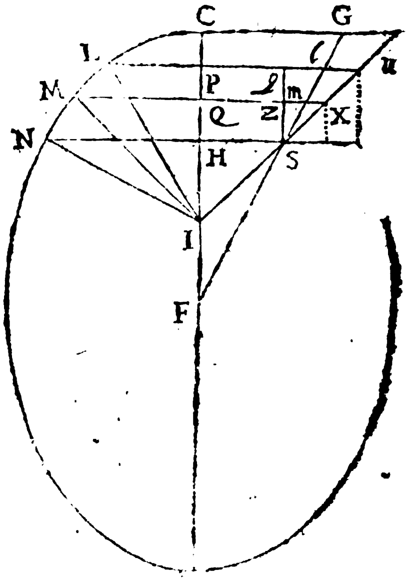
Ex 8. hu.

aggregato



aggregato differentiali abſciſſarum ramorum I L, I M ab abſciſſa rami breuiſſimi.

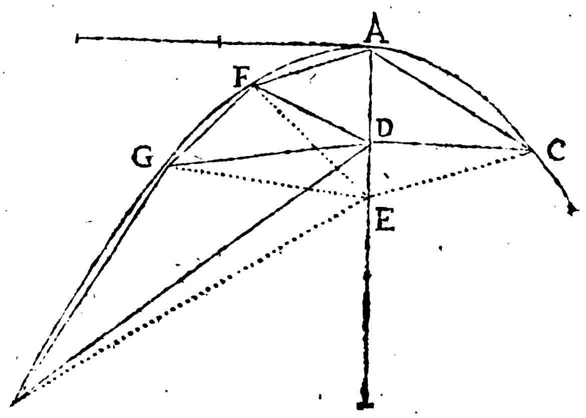
Pari modo in hyperbola, & ellipſi quadratum I L ſuperat quadratum I M eodē Ex 9. 10. h. *exceſſu, quo exemplar applicatum ad H P ſuperat exemplar applicatum ad H Q; ſed differentia exemplarium applicatorum ad H P, & H Q æqualis eſt rectangulo ſub P Q exceſſu differentiali, & recta linea compoſita ex X m, & u l, ad quam ſumma differentialis P H Q eandem proportionem habet, quam latus trãſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, vt in nota propoſitionis 5. oſtenſum eſt; igitur quadratum I L ſuperat quadratum I M iam dicto rectangulo ſub P Q, & ſub X m, & u l, quod erat oſtendendum.*



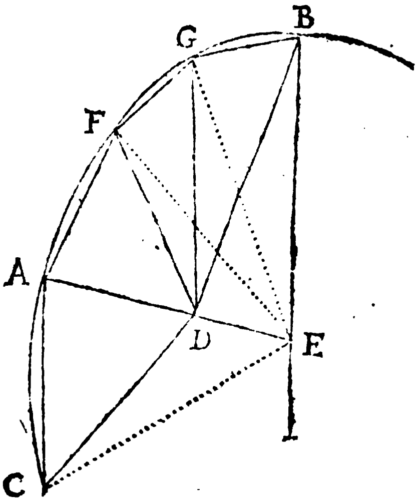
SECTIO IV.

Continens Propoſit. VII. & XII. Apollonij.

SI fuerit menſura A D minor comparata A E, (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ, & axis in ellipſi ſit maior, erit A D breuiſſimus ramorum egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, vt ſunt F D, G D, B D, C D, & proximior illi minor eſt remotiore, nempe F D quam G D, & G D, quàm B D.



b QVia AE eſt linea breuiſſima, igitur FE maior eſt illa; itaque angulus FAE maior eſt, quàm
c AFE; Ergo ille eſt multò maior quàm AFD, quare FD maior eſt; atque ſic
d patet quod GE maior ſit quàm EF, & ideo angulus GFE maior eſt, quàm EGF; igitur angulus GFD multò maior eſt, quàm FGD, & propterea GD maior eſt, quàm DF, & ſimiliter BD, quàm GD, & DC, quàm AD, & hoc erat propoſitum.



NOTÆ.

a SI fuerit menſura A D minor comparata A E, &c. *Senſus propoſitionis clarior ſic reddetur; Si fuerit menſura AD minor comparata AE, quæ in ellipſi ſumi debet in axi maiori eius (12.) aut ſit pars lineæ breuiſsimæ; erit AD minimus ramorum FD, GD, BD, CD, egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, & proximior illi, &c.*

b Quia AE eſt linea breuiſſima, igitur, &c. *Vt conſtructio compleatur ſubiungo: Igitur ſi coniungantur rectæ lineæ EF, EG, EC, EB, & rectæ lineæ AF, FG, GB, AC erit FE maior, quàm AE.*

c Ergo hic eſt multò maior, quàm AFE, &c. *Senſus clarior reddetur hac ratione: Ergo angulus FAE multò maior erit, quàm AFD, qui eſt portio minoris anguli, quarè FD ſubtendens angulum maiorem eſt maior, quàm AD.*

d Igitur ipſe multô maior eſt, &c. *Superaddo rationem illationis dicendo; Et propterea angulus GFD maiorem excedens erit multò maior, quàm FGD, qui portio minoris eſt.*

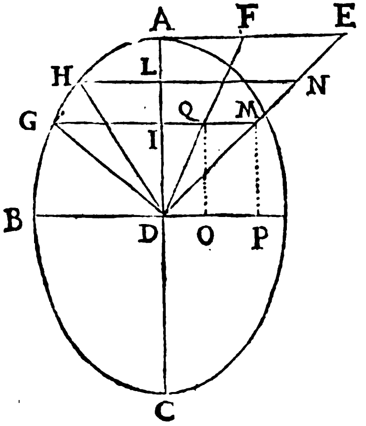
Manifeſtum eſt in prima figura propoſitionis 7. quando A D eſt portio axis minor comparata, quod tunc ex origine D duo tantummodo rami inter ſe æquales ad vtraſque partes axis duci poſſunt ad ſectionem, & erunt illi, qui ad terminos eiuſdem ordinatim ad axim applicatæ iunguntur ab origine D, vt conſtat ex ſuperiùs dictis.

At in ſecunda figura propoſitionis 12. poſſunt quidem ab origine D ad ſectionem duci hinc indè à breuiſsima D A, aliquando duo tantùm rami inter ſe æquales, aliquando tres, atque etiam quatuor inter ſe æquales, quæ cognitio pendet ex propoſitione 72. huius libri.

SECTIO QVINTA

Continens XI. Propoſit. Apollonij.

Linearum egredientium ex D centro ellipſis ABC, breuiſſima eſt ſemiaxis minor rectus illius, qui ſit B D, maxima verò eſt ſemiaxis tranſuerſus, qui ſit AD, & propinquiores maiori ſunt maiores remotioribus, vt H D, quam GD, & quadratum cuiuslibet rami, vt G D (exempli gratia) excedit quadratum breuiſſimę BD exemplari applicato ad inuerſam illius ID. a



EDucamus itaque E A æqualem AD, & abſcindamus ex illa AF ęqua- b
lem dimidio erecti; & iungamus DF, DE, & perducamus ex G,H
perpendiculares ad D A, & ſint GIM, HLN. Quia quadratum GI æ- c
quale eſt duplo trapezij IF (prima ex quinto) & quadratum ID eſt æqua-
le duplo trianguli IDM, eo quod I D eſt æqualis IM, erit quadratum d
DG æquale duplo trianguli ADF (quod eſt æquale quadrato BD (2. ex
quinto) vnà cum duplo trianguli QMD, quod eſt æquale rectangulo Q
P; igitur quadrati G D exceſſus ſupra quadratum B D eſt æqualis plano
QP, & quia DA, nempe E A ad A F eſt, vt D I, nempe MI ad IQ, e
& per conuerſionem rationis A E ad E F, ſcilicet dimidium tranſuerſæ
ad illius exceſſum ſuper A F dimidium erecti, eſt, vt M I, nempe M P
ad M Q; igitur planum Q P ſimile eſt figuræ comparatæ, & M P æqua-
Def 8, 9, huius. lis eſt D I. Similiter patet, quod quadratum D H excedit quadratum B
D exemplari applicato ad D L, & quadratum D A ſuperat quadratum
B D exemplari applicato ad D A; Eſt verò D I minor, quàm D L, &
DL, quàm DA; igitur BD (quæ eſt dimidium recti) minor eſt, quàm f
GD, & GD, quàm DH, & DH quàm DA, quod erat oſtendendum.

NOTÆ.

ET debet eſſe linea breuiſſima perpendicularis ad menſuram, nempe B a
D perpendicularis DA, &c. *Hæc omnino expungi debent, tanquam ſuperuacanea, axes enim eſſe nequeunt, niſi ad inuicem perpendiculares ſint; quare cenſeo ab aliquo verba illa addita textui Apollonij fuiſſe.*

Edub Educamus itaque E A, &c. *Lego: Educamus itaq; E A perpendicularem, & aqualem A D.*

c Et perducamus ex G, H perpendiculares, &c. *Et perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & ſint H L N, & G I M, qua ſecent F D in Q, & D E in M, & N, atque à punctis Q, M educantur M P, Q O, parallela D A, qua ſecent rectum axem B D in O, P. Addidi hac poſtrema verba, vt conſtructio completa ſit.*

d Eo quod I D eſt æqualis I M, &c. *Quoniam ſicuti in triangulo D A E ſimili triangulo D I M (propter angulum D communem, & rectos angulos ad I, & A) latus D A aquale erat E A, ita latus D I aquale eſt I M.*

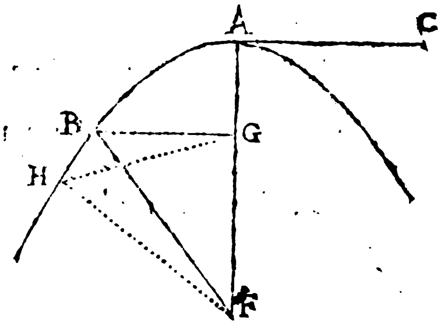
e Nempe M I ad I Q, & è contra, &c. *Lego: Nempe M I ad I Q, & per conuerſionem rationis.*

f Cumque B D ſit dimidium axis recti erit perpendicularis ad A D menſuram, &c. *Hac verba poſtrema pariter expungi debent, niſi fortè corollarium propoſitionis exponunt, & tunc tèxtus ſic reſtitui deberet. Ex dictis conſtat, lineam breuiſſimam è centro ellipſis ad ſectionem ductam, perpendicularem eſſe ad axim eius maiorem.*

Manifeſtum eſt ex centro ellipſis ad ſectionem duci non poſſe plures, quàm quatuor ramos inter ſe aquales, neque pauciores duobus; tres autem nequaquam; nam dua medietates cuiuslibet axis aquales ſunt inter ſe, & quatuor rami ad extremitates duarum applicatarum ad axim aqualiter è centro diſtantium ducti aquales ſunt inter ſe.

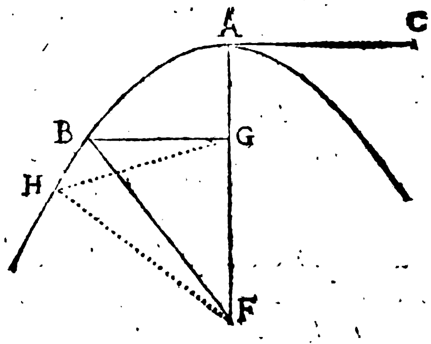
SECTIO SEXTA

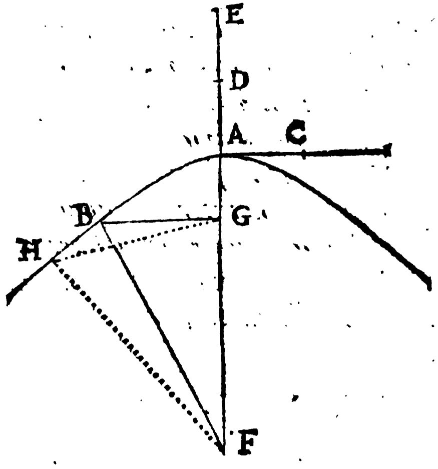
Continens Propoſit. XIII. XIV. XV. Apollonij.



OStendamus modò còuerſum harum propoſitionum; & eſt, quod linea breuiſſima B F continet cum ſua menſura A F angulum acutum, vt B F A in omnibus ſectionibus, & ellipſi (ſi tamen non egrediatur ex eius centro) eiuſque potentialis abſcindet
a menſuram (13) in parabola æqualem comparatæ (14) & in hyperbola (15) & ellipſi lineam, ad quam inuerſa eſt, vt proportio figuræ.

SIt centrum D, & dimidium erecti A C. Quia B F eſt linea breuiſſima, erit A F maior quàm A C, eo quòd ſi eſſet æqualis (4. 6. ex quinto) aut minor illa (7. ex quinto) eſſet linea breuiſſima A F, aut pars illius, quod eſt falſum, igitur maior eſt, quàm A C; & propterea A D ad A C maiorem proportionem habet, quàm ad A F; ponamus ergo, vt A D ad A C, ita D G ad G F in hyperbola, & ellipſi; at in parabola b ponamus G F æqualem A C, & ducatur ex G perpendicularis ad ſectionem. Dico, quod ei occurret ad B. Nam ſi occurrat ſectioni ad aliud punctum, vt H coniuncta H F erit H F breuiſſima (8. 9. 10. ex quinto) ſed ſuppoſuimus B F eſſe breuiſſimam, quod eſt abſurdum, ergo perpendicularis occurrit ſectioni in B. Et quia angulus B G F eſt rectus, erit angulus B F G acutus, quod erat oſtendendum.

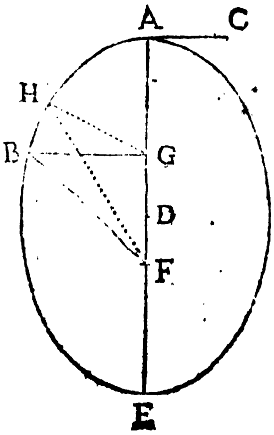




NOTÆ.

a Et eius potentialis ſecet menſuram in parabola, &c. *Ideſt, & eius potentialis abſcindet ex menſura vſque ad originem, in parabola quidem ſegmentum æquale comparatæ, & in hyperbola, & ellipſi lineam, ad quam inuerſa eandem proporportionem habet, quam latus tranſuerſum ad rectum.*

b Et ducatur ex G perpendicularis ad ſectionem, &c. *Et ducatur ex G recta linea perpendicularis ad axim, & producatur vſque ad ſectionem.*

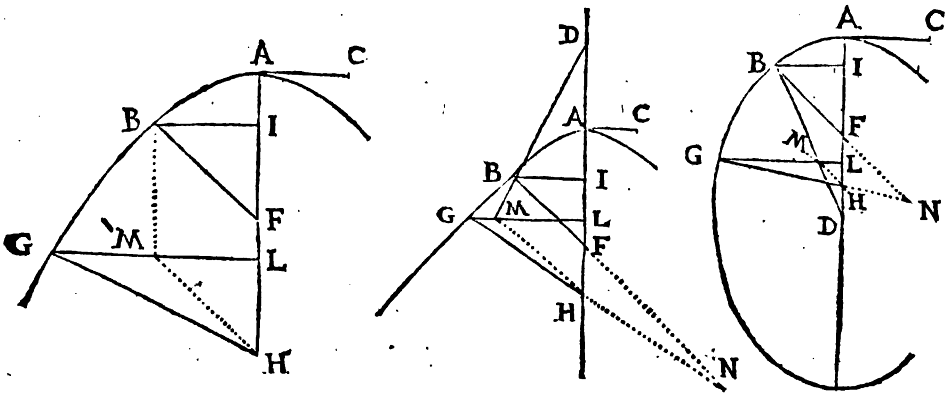


SECTIO SEPTIMA

Continens XXVI. XXVII. XXVIII. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

ANgulorum ab axi ſectionis A H, & à lineis breuiſſimis F B, H G contentorum proximiores vertici ſectionis minores ſunt remotioribus, nempe angulus A F B minor eſt A H G.



SIt itaque centrum D, & ſemi inclinatus axis A D, ſiue ſemitranſuerſus,
a & dimidium erecti A C: educamus itaque duas perpendiculares
GL, BI, & ſi ſectio fuerit parabole, erit FI æqualis LH, quia quælibet
b earum æqualis eſt A C (13. ex quinto) & L G maior eſt, quàm BI; angulus igitur F minor quàm H; ſi verò ſectio fuerit hyperbole, aut ellipſis,
c erit F I ad I D, vt H L ad L D, quia quælibet earum eſt, vt A C ad A D
d (14. 15. ex quinto) & permutando, erit I D ad L D nempe B I ad M L,
vt I F ad L H, & anguli I, & L ſunt recti; igitur duo triangula B I F, M
L H ſunt ſimilia, ideoque angulus A H G maior eſt, quàm angulus A F
B, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO XXVIII.

Hinc patet, lineas breuiſſimas ſibi occurrere ad partes axis ſectionis.

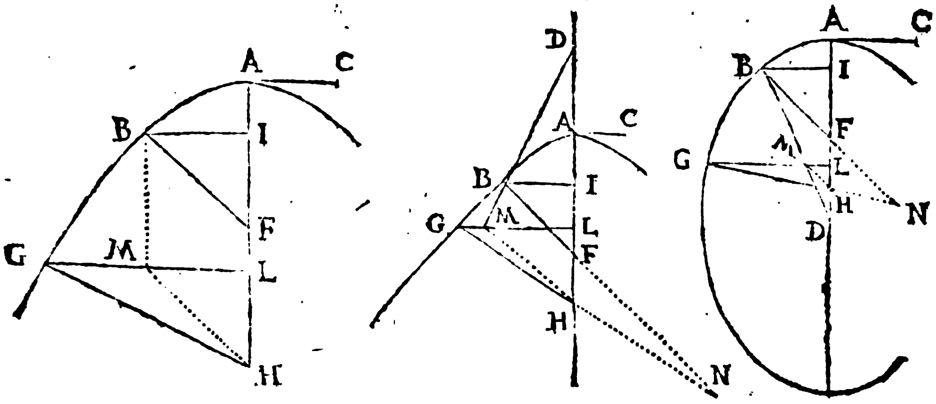
e QVia angulus A F B minor eſt, quàm angulus A H G; quare ſibi occurrunt ad partes F, H, & hoc erat oſtendendum. 26. 27. h.

NOTÆ

NOTÆ.

EDucamus itaque duas perpendiculares, &c. *Educamus itaque ex punctis B, G duas G L, B I perpendiculares ad axim ei occurrentes in L, I.* a

Et L G maior eſt, quàm B I, &c. *Subiungo: Eo quod potentialis G L magis recedit à vertice, quàm B I; ſi iam ducatur B M parallela axi in parabola, & ex centro educta in reliquis ſectionibus, ſecans G L in M, coniungaturque H M, erit in parabola M L minor quàm G L, & æqualis B I, & ideo angulus M H L minor erit angulo G H L, & æqualis angulo F, & propterea angulus F minor eſt, quàm G H L.* b



31, lib. 1. Si verò ſectio fuerit hyperbole, aut ellipſis, &c. *Addo: Manifeſtum eſt rectam B D ex centro ductam ſectionem ſecare in B, & propterea occurrere potentiali G L à vertice remotiori, quàm B I inter puncta G, & L, & erit F I, & cætera.* c

Erit I D ad L D, nempe B I ad M L, &c. *Addo (propter parallelas B I, M L, & ſimilitudinem triangulorum D B I, & D M L.)* d

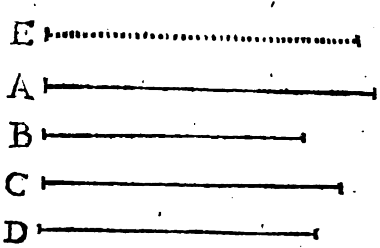
Quia angulus A F B minor eſt, quàm angulus A H G, &c. *Addo: Et ſumpto communi angulo F H N erunt A F B, ſeu H F N, & F H N ſimul ſumpti minores duobus angulis G H A, F H N, qui duobus rectis æquales ſunt; quare, B F, G H, concurrunt ad partes F, & H, vt in N.* e

Pro intelligentia ſequentium propoſitionum hæc præmitti debent.

LEMMA V.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico, rectangulum ſub extremis A, D contentum maius eſſe eo, quod ſub medijs B, C continetur, & è conuerſo.

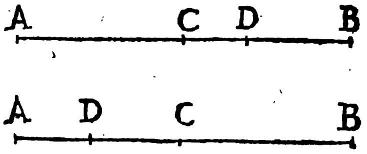
FIat vt C ad D, ita E ad B; patet ex elementis, A excedere ipſam E; quare rectangulum A D maius erit rectangulo E D; eſt verò rectangulum B,



C ſub intermedijs contentum æquale ei, quod ſub extremis E, D quatuor proportionaliũ continetur; ergo rectangulum A D maius eſt rectangulo B C. Poſtea ſit rectangulũ A D maius rectangulo B C; Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D; Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad B eandem, aut minorem proportionem quàm C ad D, quare rectangulum A D æquale, aut minus erit rectangulo B C, quæ ſunt contra hypotheſim; igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D.

L E M M A. VI.

SI recta linea A B ſecetur bifariam in C, & non bifariam in D: Dico, quod ſemiſsis C B ad alterum ſegmentorum inæqualium D B habet maiorẽ proportionẽ, quàm reliquum inæqualiũ A D ad alterã medietatẽ A C.



Quoniam quadratum ſemiſſis C B, ſeu rectangulum B C A maius eſt rectangulo A D B ſub inæqualibus ſegmentis contento; ergo ex præcedenti lemmate C B ad D B maiorem proportionem habet, quàm A D ad A C; Aſſumitur in ſequenti prop. 52. problema antiquum inuentionis duarum mediarum continuè proportionalium inter duas rectas lineas datas, cuius conſtructio, & demonſtratio ab Apollonio inuenta adhuc legitur apud Eutocium, ſed organica quidem illa eſt, & ad manuum operationes maximè accomodata, non omnino diuerſa ab ea, quàm Hero, & Philo ediderunt. At Parmenion aliam eiuſdem problematis demonſtrationem Apollonio tribuit paulò diuerſam ab eà, quàm Eutocius recenſuit: eam ſane nec percepit, nec rite expoſuit, Philoponus, quàm enim petitionem non demonſtratam ipſe vocat conſequẽtia eſt neceſſaria ex deſcriptione hyperboles, quæ omnino ſubintelligi, & adiungi debet, vt colligitur ex Pappi verbis: hi enim (ſcilicet Hero, & Philo) aſſerentes problema ſolidum eſſe, ipſius conſtructionem inſtrumentis tantum perfecerunt congruenter Apollonio Pergæo, qui reſolutionem eius fecit per coniſectiones. Erit igitur Apollonij propoſitio huiuſmodi.

Cõm. lib. 2. Arch. de Sphæra, & Cylin. Prop. 2.

In lib. 5. Poſt Analit. comm. 36.

Coll. lib. 3. Prop. 4.

L E M M A VII.

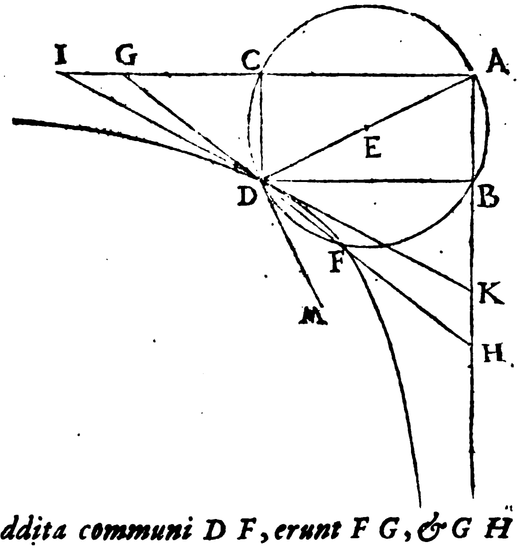
INter rectam lineam A C maiorem, & B C minorem duas medias proportionales reperire.

Conueniant illæ ad angulos rectos in A, & compleatur Parallelogrammum A B D C, cui circumſcribatur circulus diametro D A, & per punctum D circa aſymptotos C A B deſcribatur hyperbole D F, & ducatur recta D M circulum tangens in D, & recta I D K ſectionem ibidem contingens, occurrens aſymptotis in I, & K, erunt quidem I D, & I K æquales inter ſe, & D C parallela eſt A K, ergo I C æqualis eſt C A: pari ratione K B æqualis erit B A, ſed poſita fuit C A maior quàm A B, ergo in triangulis I A D, & K D A baſis I A maior erit, quàm A K, & latera I D, D K æqualia ſunt, & D A eſt commune, igitur angulus A D I maior erit angulo A D K, & propterea recta linea I K ſectionẽ con-

Prop. 4. lib. 2.

Prop. 34. lib. 1.

3. lib. 1.



contingens in D intra circulũ cadet ad
partes acuti anguli A D K, ſed qualibet
recta linea ex D inter tangentes K D,
& D M incedens ſecat circulum, &
36. lib. 1. *hyperbolam D F, ergo circuli peripheria,*
& hyperbole non ad eaſdem partes
33. lib. 1. *caua ſe mutuo ſecant in duobus punctis:*
concurrant in D, & F, & coniungatur
recta linea D F, quæ producta
8. lib. 2. *ſecet aſymptotos in punctis G,*
& H: oſtendendũ eſt rectas B H, & G C
eſſe duas medias proportionales quæſitas.
Quoniã eiuſdem rectæ lineæ portiones G
Ibidem. *D, & F H inter hyperbolen, & aſymptotos*
interceptæ æquales ſunt inter ſe, addita communi D F, erunt F G, & G H inter ſe quoq; æquales quare rectangulum D H F æquale erit rectangulo F G D, ſed rectangulũ A H B æquale eſt rectangulo D H F, (eo quod ab eodem puncto H extra circulum poſito ducuntur duæ rectæ lineæ circulum ſecantes): ſimili modo rectangulũ A G C æquale eſt rectangulo F G D, igitur duo rectangula A G C, & A H B æqualia inter ſe erunt, & ideo vt G A ad A H, ita erit reciprocè B H ad G C, ſed vt G A ad A H; ita eſt D B ad B H, nec non G C ad C D, (propter æquidiſtantiã ipſarum D B, G A, & ipſarum C D, & A H, & ſimilitudinem triangulorum), quare D B, ſeu C A ad B H eandem proportionem habebit, quàm B H ad G C, & eandem, quàm habet G C ad C D, ſeu ad A B, & propterea quatuor rectæ lineæ C A, B H, C G, & B A erunt in continua proportionalitate, quod erat propoſitum.

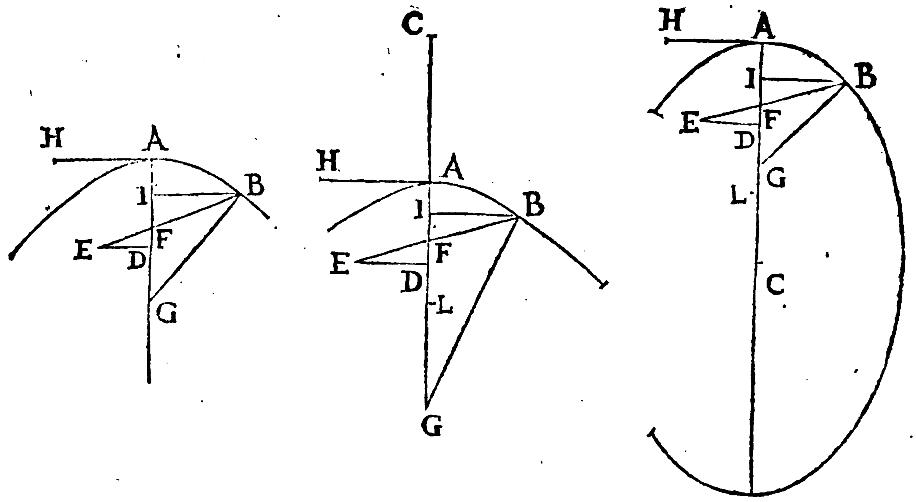
SECTIO OCTAVA

Continens Prop. IL. L. LI. LII. LIII. Apoll.

SI menſura non excedit comparatam, nullus ramorum ſecantiũ ex concurſu egredientium erit Breuiſecans: & lineæ breuiſſimæ ab extremitatibus ramorum ductæ in ſectione abſcindunt ex axi lineam maiorem, quàm abſcindunt rami (51. & 52.) a Si verò menſura excedit comparatã exponi debet linea certis quibuſdam legibus inuenienda, quæ vocabitur TRVTINA. Et ſiquidẽ perpendicularis maior fuerit illa, tunc rami habebunt proprietates memoratas; ſi verò æqualis fuerit, tunc inter ramos vnicus breuiſecans aſſignari poteſt, & propietates reliquorũ ramorũ erunt illæ eædem ſuperius expoſitæ; ſi verò minor eſt illa, ramorũ omniũ duo tantum breuiſecantes erunt, reliquorum verò, qui non intercipiuntur inter duos breuiſecantes, eædem propietates erunt; eorũ verò, qui intercipiuntur, lineæ breuiſſimæ egredientes ab earum extremitatibus abſcindunt ex axi lineas minores, quàm ſecant rami ipſi. Oportet autem in ellipſi, in ellipſi, vt menſura ſumatur in maiori duorum axium, & rami egrediantur ad eius ſectionem.

PROPOSITIO IL. & L.

b EX E concurſu ſuper perpendicularem E D educamus E B ſecantem menſuram A D in F, & ſectionem A B in B, & ſit A H dimidium erecti; ſitque menſura A D non maior, quàm
c H A. Dico quod B F non erit breuiſſima, & minima egrediens ex B abſcindit ex ſagitta maiorem lineam, quàm F A: at ſi fuerit A D maior, quàm A H, tunc B F poteſt eſſe linea breuiſſima.



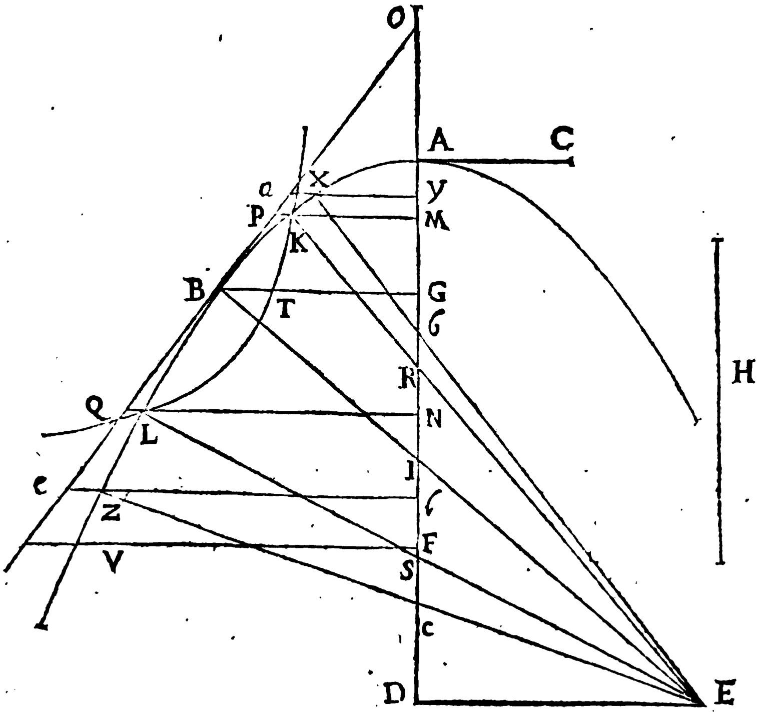
d EDucamus iam B I perpendicularem ad axim, & ſupponamus prius A D non maiorem quàm A H, & ſit ſectio parabole; igitur D I minor eſt, quàm A H, & ponatur G I æqualis A H, erit B G minima (8. ex quinto) & abſcindit G A ex ſagitta maiorem, quàm A F; ſi verò ſe-
e ctio fuerit hyperbole, aut ellipſis, ſit centrum C; ergo A C ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, quare C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H; ponatur ergo I C ad I G, vt A C ad A H; ergo B G eſt minima, & abſcindit (9. & 10. ex quinto) G A maiorem, quàm F A, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LI.

DEindè ſit D A maior quàm A C, ſitque prius ſectio parabole, & ſecetur ex D A ipſa D F æqualis A C, & A G fiat pars tertia ipſius A F, educaturque B G perpendicularis ad axim, & vt D F ad F G, ita fiat B G ad lineam H (& hæc eſt Trutina) coniungaturque B E; & ſiquidem D E fuerit maior quàm H. a Dico, quod nullus ramus breuiſecans duci poteſt.

b Quoniam D E maior eſt, quàm H habebit D E ad B G, nempe D I ad I G maiorem rationem, quàm G F ad F D, & componatur proportio, vt demonſtretur, quod I G minor ſit, quàm D F, quæ æqualis eſt ipſi A C; breuiſſima itaque egrediens ex B abſcindit ex ſagitta A D maiorem lineam, quàm A I (13. ex quinto); poſtea ducamus ex E ad ſectionem ramos E K, E L ad vtramque partem B E, & duas perpendiculares KM, LN, producamus vſq; ad Q O tangētem ſectionem in B; & quoniā ſectio eſt, parabole, & O Q tāgens eſt, igitur O G eſt dupla ipſius A G, quę eſt ſemiſſis ipſius F G; ergo G F æqualis eſt G O, erit igitur G O ad O M, nempe B G ad P M in maiori proportione, quā M F ad F G; c itaque M K in F M minus eſt, quàm B G in G F, quod eſt minus quàm E D in D F propterea quod E D maior eſt quàm H; igitur E D in D F multò maius eſt, quàm K M in M F, quare E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & componendo patet, quod D F maior ſit, quàm R M. Igitur breuiſſima egrediens ex K (13. ex quinto) cadit extra R K; Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens

35. lib. 1.



d

e

f

egrediens ex puncto L cadit extra L S, quapropter duci non poteſt ex E
ad ſectionem L B A linea, aliqua cuius portio intercepta inter axim, &
ſectionem, ſit linea breuiſſima.

Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſum eſt, quod ſi E D
g fuerit æqualis H, tunc G I æqualis erit D F, quæ eſt æqualis ipſi A C; &
ideo B I (8. ex quinto) vna eſt ex breuiſſimis, non autem R K, quia demonſtrabitur,
quod E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem
habet, quàm M F ad F D, & propterea D F maior erit, quàm R M; breuiſſima
ergo cadit extra R K. (13. ex quinto) Et S L quoque non eſt ex
breuiſſimis, quod ita demonſtrabimus; Si N S minor eſt, quàm D F; ergo
breuiſſima egrediens ex L cadit extra S L; Non igitur ex E duci poteſt
ad ſectionem linea breuiſecans præter E B, & hoc erat oſtendendum.

Tertio loco ſit E D minor quàm H, & oſtendetur quod E D in D F
h minus eſt, quàm B G in G F; poſtea ponamus T G in G F æquale illi, &
erigamus ſuper F perpendicularem F V, & ducamus per T ſectionem 4. lib.2.
hyperbolicam circa duas continentes A F, & F V; duæ ſectiones ſe mutuò
ſecabunt in duobus punctis, & ſint K, L, & educamus ex illis duas
L N, P K M perpendiculares ad A D. Et quoniam perpendiculares K M,
T G, L N parallelæ ſunt continenti V F, erit K M in M F æquale L N in
N F (12. ex ſecundo) & quodlibet eorum æquale eſt T G in G F, quod factum
eſt æquale E D in D F; igitur E D ad K M, nempe D R ad R M eſt
vt M F ad F D, & componendo patet, quod D F eſt æqualis R M, & propterea
i K R eſt linea breuiſſima (8. ex quinto.)

k Et ſimiliter patebit, quod L S ſit breuiſſima.

l Et cum B I intercipiatur inter illas patet etiam, quod B G in G F maius
ſit, quàm E D in D F; oſtendetur vt dictum eſt, quod I G maior ſit,
quàm D F; breuiſſima ergo ducta ex B cadit inter I, & A.

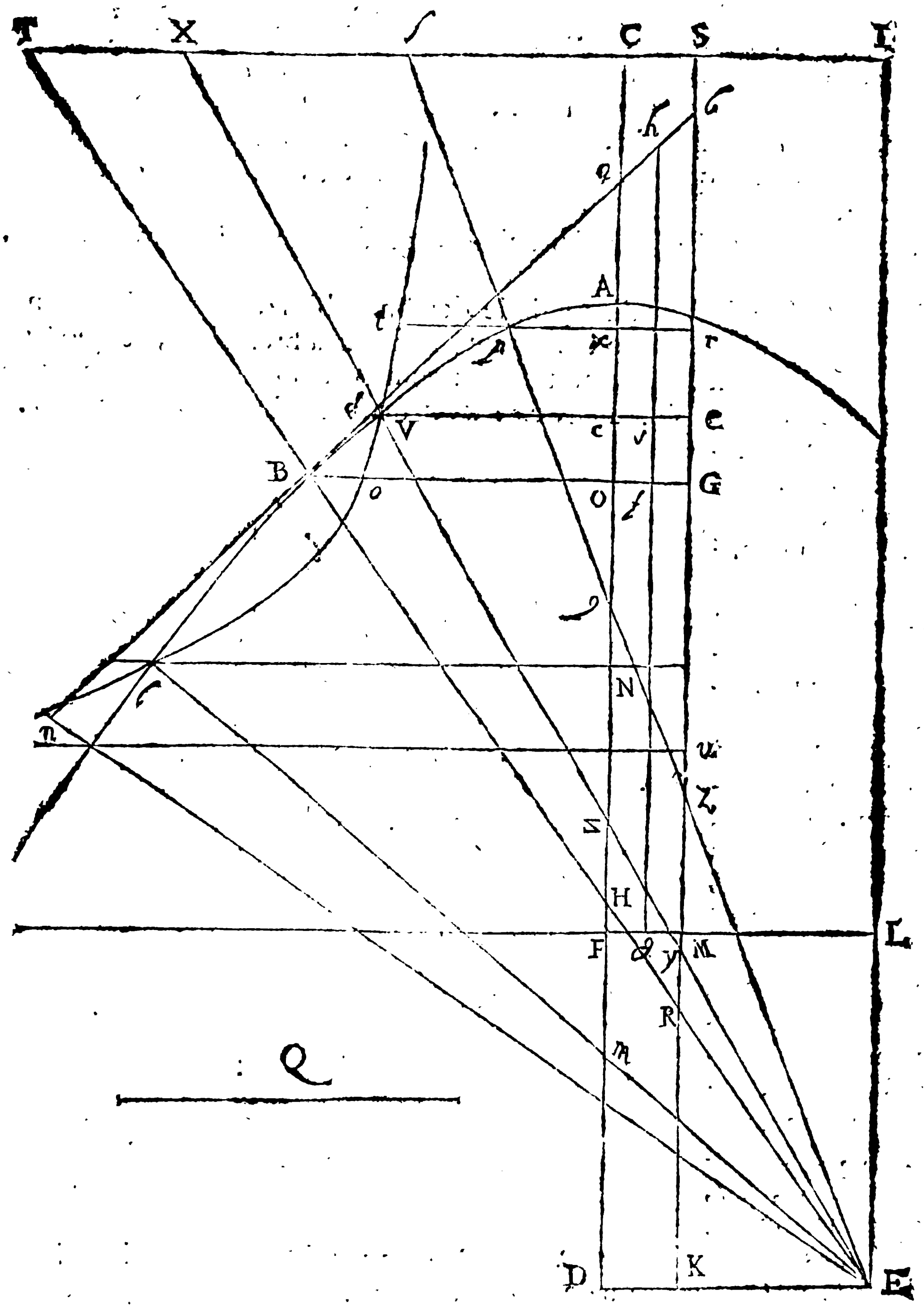
Deindè ex concurſu E ad ſectionem parobolicam A B Z educamus E X,
m E Z; quas interſecant *l* Z, X Y perpendiculares ad A D, quæ parallelæ
ſunt continenti F V ſecantes K T L hyperbolen, ergo *a* Y in Y F æquale
eſt G T in G F, quod factum eſt æquale E D in D F, itaque E D in D F
maius eſt, quàm X Y in Y F; igitur E D ad X Y, quæ eſt vt D *b* ad *b* Y
maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo patet, quod
F D maior eſt quàm *b* Y; itaque breuiſſima egrediens ex X abſcindit ex
A D lineam maiorem, quàm *b* A; Simili modo demonſtrabitur, quod Z *c*
n non ſit breuiſſima, & quod breuiſſima egrediens ex Z abſcindit ex A D
lineam maiorem, quàm A *c*, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO LII. LIII.

Deindè ſit ſectio hyperbole, aut ellipſis A B, & axis illius C
A D, centrum C, & D A menſura, quæ ſit maior dimidio erecti,
& perpendicularis E D. Dico, quod rami egredientes ex E
a habent ſuperiùs expoſitas proprietates.

Itaque per C producamus CI parallelam perpendiculari ED, & ponamus b
quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & EK ad KD, vt
proportio figuræ, & educamus ex E, K rectas EI, KS parallelas ipſi C
Lem. 7. AD, & interponamus inter FC, CA duas medias proportionales CN, c
CO, & erigamus per O perpendicularem BO, quæ occurrat ſectioni in
B; & ponamus proportionem alicuius lineæ, vt Q ad BO compoſitam d
ex CD ad DF, & FO ad OC, & ſit ED maior, quàm Q. Trutina: Dico,
quod nulla breuiſecans egreditur ex E ad ſectionem, & linea breuiſſima,
egrediens ab extremitate cuiuslibet rami aſſignati, abſcindit cum
A ab axi maiorem lineam, quàm ſecant illi rami. Producatur priùs EB e
ſecans axim in H, & quia ED maior eſt, quàm Q, ergo proportio ED f
ad BO (quæ componitur ex ED ad DK, nempe IC ad CS, & ex D
K, nempe GO ad OB) maior eſt proportione, quàm habet Q ad BO,
quæ ex hypotheſi componebatur ex CD ad DF, & ex FO ad OC; ſed g
ED ad DK eſt, vt CD ad DF (quia quælibet earum eſt, vt proportio
figuræ compoſitæ, vel diuiſæ) remanet proportio OG ad OB maior ea,
Lem. 5. quàm habet FO ad OC; igitur OG in OC, nempe rectangulum CG
præmiſſ. maius eſt, quàm BO in OF; & ponamus rectangulum FG commune, h
erit rectangulum FS maius, quàm BG in GM; eſt verò rectangulum
FS æquale rectangulo EM (eo quod EK ad KD, nempe ad FM eſt, vt
SM ad MK, quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ; itaque rectangulum i
ibidem. EM maius eſt, quàm MG in GB, & propterea EK ad BG,
nempe KR ad RG maiorem rationem habet, quàm GM ad MK, ergo
componendo, patet, quod KM, nempe DF maior eſt, quàm GR; &
ideo EI ad KM, nempe CD ad DF, ſeu IC ad CS minorem proportionem
habet, quàm EI ad GR, quæ eſt, vt IT ad BG, propter ſimilitudinem
duorum triangulorum EIT, BGR, ergo IT ad BG maiorem k
Lem. 4. rationem habet, quàm IC ad CS, ſeu ad OG; & comparando homologorum
præm. differentias in hyperbola, & eorum ſummas in ellipſi, habebit
GT ad BO, nempe CH ad HO maiorem rationem, quàm IC ad CS,
nempe CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi
CO ad OH, habebit maiorem proportionem quàm CF ad FD, quæ
eſt, vt proportio figuræ; igitur breuiſſima egrediens ex B (9. 10. ex quinto)
abſcindit cum A maiorem lineam, quàm AH.

Poſteà educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, & producamus
eam, quouſque occurrat CI ad X, & ducamus per B lineam tangentem l
ſectionem, quæ occurrat inclinato, ſiue tranſuerſæ in *a*, & per V
ducamus perpendicularem ſuper axim, cui occurrat ad *c*, & occurrat tangenti
B*a* in *d*; & quoniam OG ad OB, quemadmodum demonſtrauimus,
maiorem proportionem habet, quàm FO ad OC, ponamus *f*O ad
OB, vt FO ad OC, & per *f* producamus *fgh* parallelam axi AD: Et m
quia *f*O ad OB eſt, vt FO ad OC, erit rectangulum *f*OC æquale BO
in OF, & ponamus rectangulum *f*F communiter fiet B*f* in *fg* æquale *g* n
F in FC, & quia CO inuerſa in trutinatam C*a* æquale eſt quadrato C
A dimidij inclinati, ſiue tranſuerſæ (39. ex primo) erit OC ad CA, vt
37. primi. CA ad C*a*; igitur C*a* eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor o
linearum proportionalium aſſignatarum; ergo FC ad CO eſt, vt CO ad



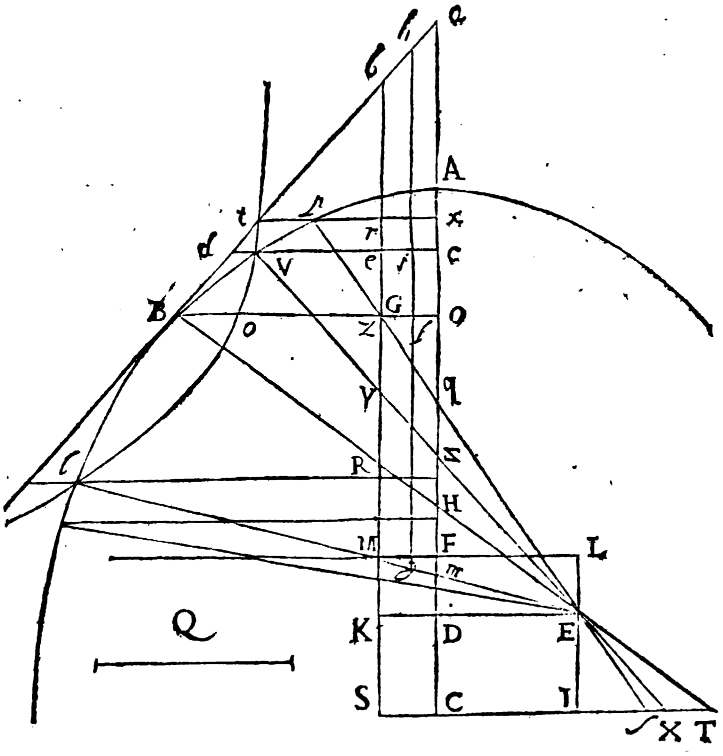
C *a*, & comparando homologorum differentias erit F O ad O *a*, vt F C ad C O, quæ eſt, vt *f* B ad B O, nempe *f h* ad O *a*; igitur proportiones ipſarum F O, *f h* ad eandem O *a* eædem ſunt; ergo ſunt æquales; & propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, & componendo *f h* ad *i h*, nempe B *f* ad V *i* maiorem proportionem habet, quàm *i g* ad *g f*; ergo B *f* in *f g*, nempe rectangulum *g* C maius eſt quàm *i* V in *i g*, & ponamus rectangulum *g e* commune, erit aggregatum rectan- Lem. 4
p
q

gulorum

gulorum C g, g e, in hyperbola, vel eorum exceſſus in ellipſi maior, quàm M e in e V, ergo rectangulum C M, nempe rectangulum E M multò maius eſt, quàm V e in e M, & propterea E K ad e V, nempe K Y ad
Lem.5. Y e maiorem proportionem habet, quàm e M ad M K, & componendo patet, quod e Y minor ſit, quàm K M, & conſtat (quemadmodum antea demonſtrauimus) quod breuiſſima egrediens ex V abſcindit ab axi maiorem lineam quàm c Z.

Simili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex l eiuſdem ſit rationis.

DEindè ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur, (quemadmodum ſupra factum eſt) quod B H tantùm ſit linea breuiſſima, & quod minima egrediens ex V abſcindit ab axi cum A maiorem lineam, quàm A Z, & quod minima egrediens ex l ſecet maiorem lineam, quàm A m.



Tandem ponamus E D minorẽ, quàm Q, ergo E D ad B O minorẽ proportionem habet, quàm Q ad eandem; & demõſtrabitur (quemadmodum dictũ eſt) quod G O ad O B minorem proportionem habeat, quàm F O ad O C; & ponamus O G ad O o, vt F O ad O C; & producamus per o ſectionẽ hyperbolicam circa duas continentes S M, M F, quę ſecet ſectionem A B in V, l, & iungamus E V, E l, & producamus ex V, l duas perpendiculares V c, l P, quæ parallelæ ſint continenti M F, ergo o G in G M eſt æquale V e in e M (12. ex ſecundo) & quia G O ad O o eſt, vt F O ad O C erit o O in O F æquale rectangulo G C, & ponamus rectangulum F G commune fiet rectangulum C M (quod erat ęquale rectangulo M E) æquale ipſi o G in G M, quod eſt æquale ipſi V e in e M; ergo rectangulum E M æquale eſt ipſi V e in e M. Tandem proſequamur ſuperiorem demonſtrationem, vt oſtendatur veritas reliquarum propoſitionum, & hoc erat propoſitum.

PROP.

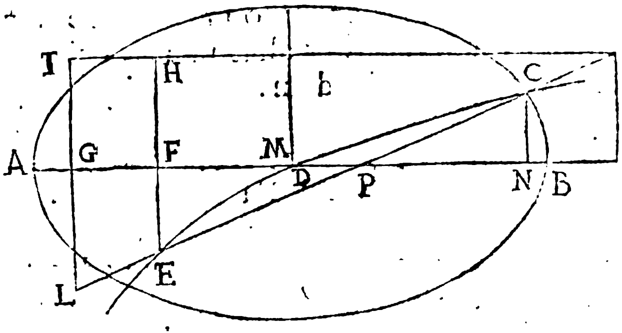
PROPOSITIO LIV. LV.

ITaque oſtenſum eſt, vti memorauimus, quod ex concurſu
a duarum breuiſſimarum ad coniſectionem non egrediatur alia
breuiſecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum
concurſu educti ad ſectionem habent proprietates ſuperiùs expoſitas.

PROPOSITIO LVI.

In ellipſi ramorum, ſecantium vtrumque axim, à concurſu vltra centrum poſito egredientium, vnius tantum portio, inter
a axim maiorem, & ſectionem intercepta, erit linea breuiſsima,
ſiue menſura ipſam comparatam, nec non perpendicularis ipſam
trutinam ſuperet, æquet, vel ab ea deficiat.

SIt ſectio ellipſis A C B, & axis maior tranſuerſus A B perpendicularis
b, E F, centrum D, & ponamus D G ad G F, vt proportio figuræ, & ſimiliter E H ad H F, & producamus per H rectam I H K parallelam ipſi A B,
& per G rectã I G L ipſi
E F, quæ ſibi occurrant
c in I, & ducamus per
punctum E ſectionem
hyperbolen E M C circa duas eius continentes L I, I K, quæ occurret ſectioni A C B
ellipticæ, quia I L, I K
ſunt duæ cõtinentes ſectionem E M C, & proportio E H ad H F poſita eſt, vt D G ad G F; 4. lib. 2.



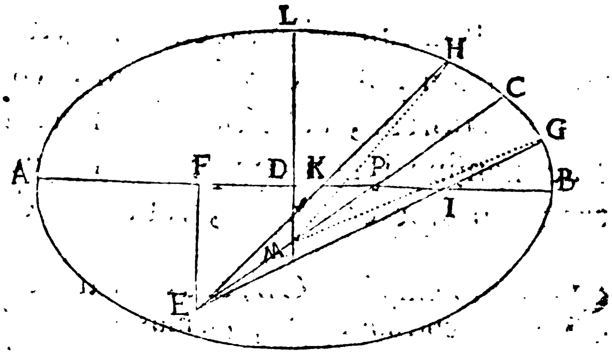
d ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam, æquale
eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam; ergo punctum M eſt in illius diametro, & propterea ſectio hyperbole E M C tranſit per centrum
ſectionis ellipſis A C B; quare duæ ſectiones ſe inuicem ſecant, ſitque
e concurſus in C, & producamus per E, C lineam occurrentem duabus continentibus ſectionem in L, K, & producamus duas perpendiculares C N,
K O ſuper A B. Et quia K C, L E ſunt æquales (16. ex ſecundo) erit G F 8. lib. 2.
f æqualis O N; quare F O æqualis eſt ipſi G N; atque E H ad H F, nempe
E K ad K P, ſeu F O (quæ eſt æqualis ipſi G N) ad O P eandem proportionem habet, quàm D G ad G F, quę eſt ęqualis ipſi O N, & ideo G N
ad O P eſt, vt D G ad O N, & comparando homologum differentias D N Lem. 3.
ad N P

ad N P erit, vt D G ad G F, quæ eſt proportio figuræ; ergo C P eſt linea breuiſſima. (10. ex quinto) Et hoc fuit propoſitum.

PROPOSITIO LVII.

Et dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, à quo abſcindi poſſit inter ſectionem, & D B linea breuiſſima. g

Nam ſi producantur E H, E G ad vtraſque partes ipſius E C ſecantes D B in K, I, & producamus per D perpendicularem ad A B, h quæ occurrat ſectioni ad L, & ipſi E C ad M, quia iam i productæ ſunt ex concurſu M duæ breuiſecantes M C, M L (51. ex quinto) igitur linea educta ex M ad H abſcindit ex D B cum B maiorem lineam, quàm ſecat breuiſſima egrediens ex H k (11. ex quinto) & linea educta ex M ad G abſcindit ex D B lineam minorem ea, quàm ſecat linea breuiſſima egrediens ex G (51. ex quinto) ſed E H, & E G efficiunt abſciſſas oppoſito modo; ergo non ſunt duæ breuiſecantes, & propterea non reperitur alius ramus, cui competat proprietas ipſius E C, & hoc erat oſtendendum.



Notæ in Propoſit. IL. L.

Si verò menſura excedit comparatam educatur linea, ad quam comparatur perpendicularis, & vocabo lineam illam Trutinam, &c. *Sic legendum puto: Si verò menſura excedit comparatam exponi debet linea certis quibuſdam legibus inuenienda, quæ vocabitur Trutina.* a

Ex E concurſu ſuper perpendicularem, &c. *Ideſt. Ex E concurſu perpendicularis E D ad axim A G, & ramoram ſecantium educamus E B ſecantem menſuram, &c.* b

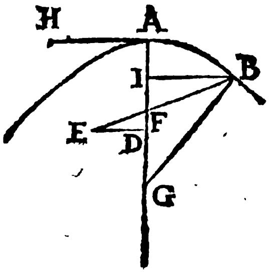
Tunc B F non eſt ex minimis, &c. *Dico quod B F non erit recta linea minima earum, quæ inter punctum ſectionis B, & axim intercipitur.* c

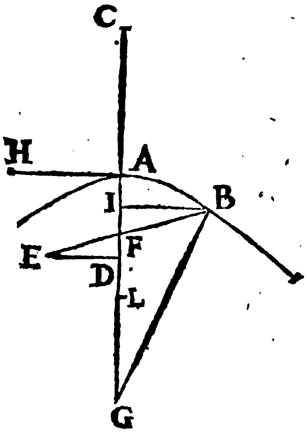
Et ponatur G I æqualis A H, &c. *Et ponatur G I æqualis A H, iungaturque B G, cumque A D poſita ſit non maior, quàm H A, erit illius portio F I minor, quàm A H, ſeu quàm G I, ergo B G eſt breuiſſima, &c.* d

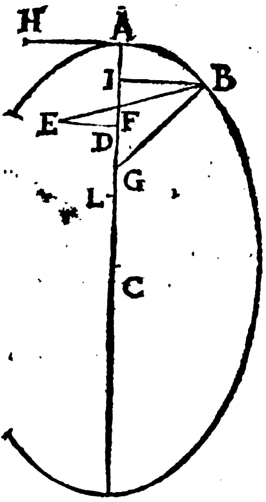
8. huius.

Ergo C A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D; quare D I ad I F, &c. *Ergo G A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & addatur indirectum recta A L æqualis A H in hyperbola, &* e

auferatur





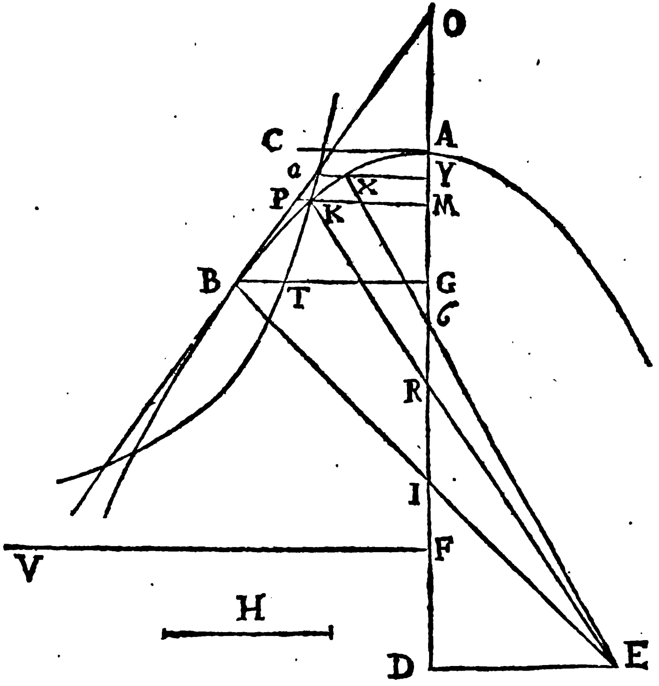


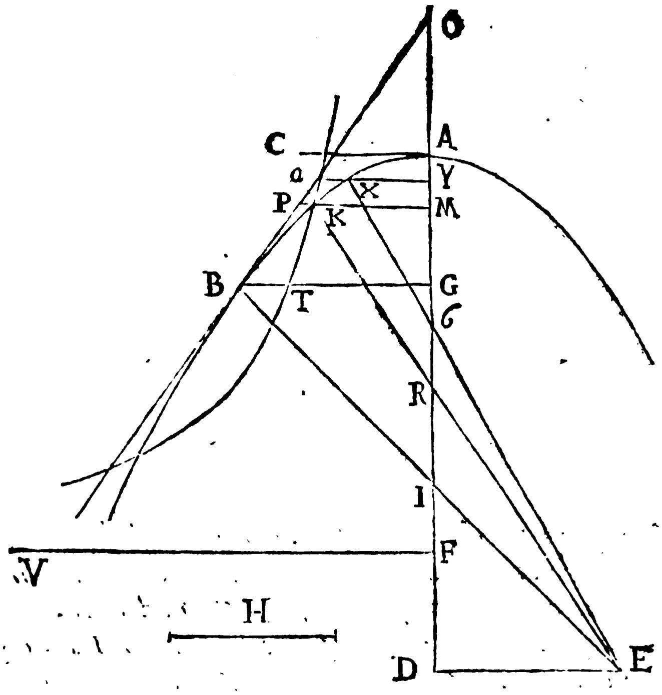
auferatur in ellipſi; quare C A ad A L non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi C L ad A L, non habet maiorem proportionem, quàm C D ad D A, ſed C D ad A D minorem proportionem habet, quam ad eius ſegmentum I D, ergo diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi habebit AC ad A D, & adhuc ad A L, ſeu A H minorem proportionem, quàm C I ad I D, habet verò C I ad I D minorem rationem, quàm ad eius ſegmentum I F; igitur C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad AH.

Notæ in Propoſit. LI.

a DIco quod nullus ramus breuiſecans duci poteſt, &c. *Dico, quod ex concurſu E ad ſectionem nullus ramus breuiſecans duci poteſt.*

b Quoniam D E maior eſt, quàm H, &c. *Quoniam D E maior eſt, quàm H habebit E D ad B G maiorem rationem, quàm H ad eandem B G; poſita autem fuit inuerſè G F ad F D, vt H ad B G; ergo E D ad B G maiorem rationem habet, quàm G F ad F D; & pro-*



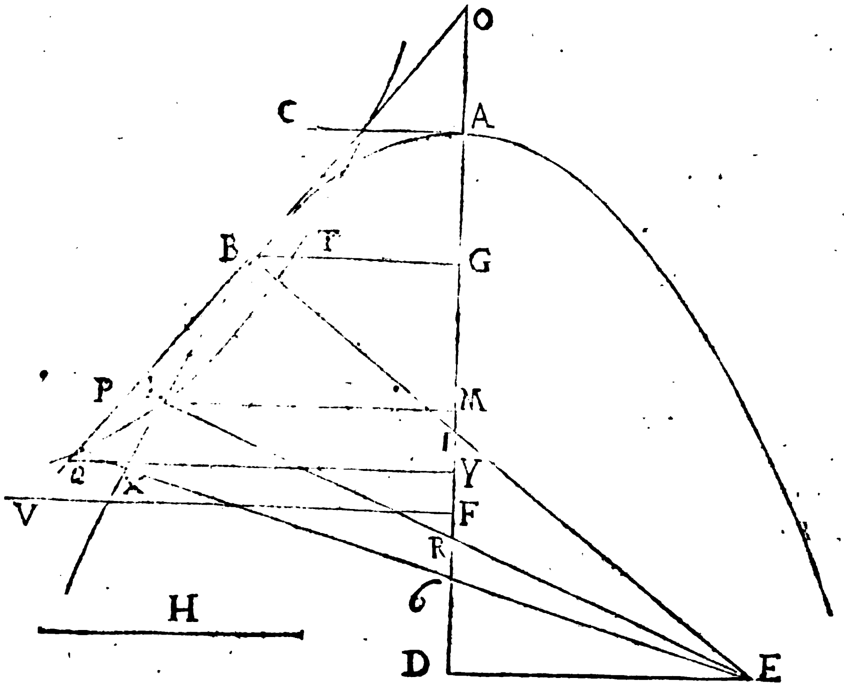


pter parallelas D E, B G, & ſimilitudinē triangulorum E D I, & B G I, eſt D I ad I G, vt E D ad B G; igitur D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & componendo D G ad G I maiorem rationem habebit, quàm eadem G D ad D F; & Ideo I G minor eſt, quàm D F.

Igitur G F æqualis eſt G O, ergo G O ad O M, &c. *Igitur G F æqualis eſt G O, & quia F O ſecatur bifariam in G, & non bifariam in M (ex lemmate ſexto huius libri) habebit ſemiſſis G O ad vnum ſegmentorum inæqualium M O maiorem proportionem, quàm reliquum ſegmentum M F ad alteram medietatem F G, ſed propter parallelas P M, B G, & ſimilitudinem triangulorum B G O, P M O eſt G O ad O M, vt B G ad P M, ergo B G ad P M maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G: habet verò B G ad minorem M K maiorem proportionem, quàm ad M P (cum punctum P tangentis cadat extra ſectionem); ergo B G ad K M adhuc maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G.*

Itaque K M in M F minus eſt, quàm B G in G F, &c. *Quoniam prima B G ad ſecundam K M maiorem proportionem habet, quàm tertia M F ad quartam F G; ergo ex lemmate quinto huius libri rectangulum ſub intermedijs contentum K M F minus erit rectangulo B G F ſub extremis cōtento; poſtea, quia H ad B G ex hypotheſi erat, vt G F ad F D, poſita autem fuit E D maior, quàm H, quæ eſt prima proportionalium; ergo E D ad B G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & pro-*
Lem. 5. *pterea rectangulum ſub extremis E D F maius erit rectangulo ſub intermedijs contento B G F; fuit autem rectangulum B G F maius rectangulo K M F; igitur rectangulum E D F multò maius eſt, quàm rectangulum K M F, & ideo, ex eodem lemmate quinto, E D ad M K, nempe D R ad R M (propter ſimilitudinem triangulorum E D R, & K M R) maiorem rationem habet, quàm M F ad F D.*

Et componendo patet, quod D F, &c. *Quoniam D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, componendo D M ad M R habebit maiorem proportionem, quàm eadem M D ad D F, & propterea D F maior eſt, quàm R M, eſt verò ſemiſſis erecti A C æqualis D F ex conſtructione, igitur M R minor eſt A C medietate*
8. huius. *te lateris recti, & propterea breuiſſima educta ex K ſecat ex axi ſegmentum maius, quàm M R; ideoque cadit extra, ſcilicet infra ramum K R E.*



f Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex puncto L cadit extra S L, &c. *Ad vitandam confuſionem figuræ, & prolixitatem demonſtrationis appoſui duas figuras, in quibus duo caſus iiſdem caracteribus notantur, itaque abſq; nouo labore, ſi inſpiciatur ſecunda figura, iiſdem verbis prioris caſus, oſtendetur caſus ſecundus.*

g Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſumeſt, &c. *Pars ſecunda huius propoſitionis innuitur tantummodo pauciſsimis verbis; quare maioris claritatis gratia integram demonſtrationem hic afferre libuit.*

Demonſtratio ſecundæ partis.

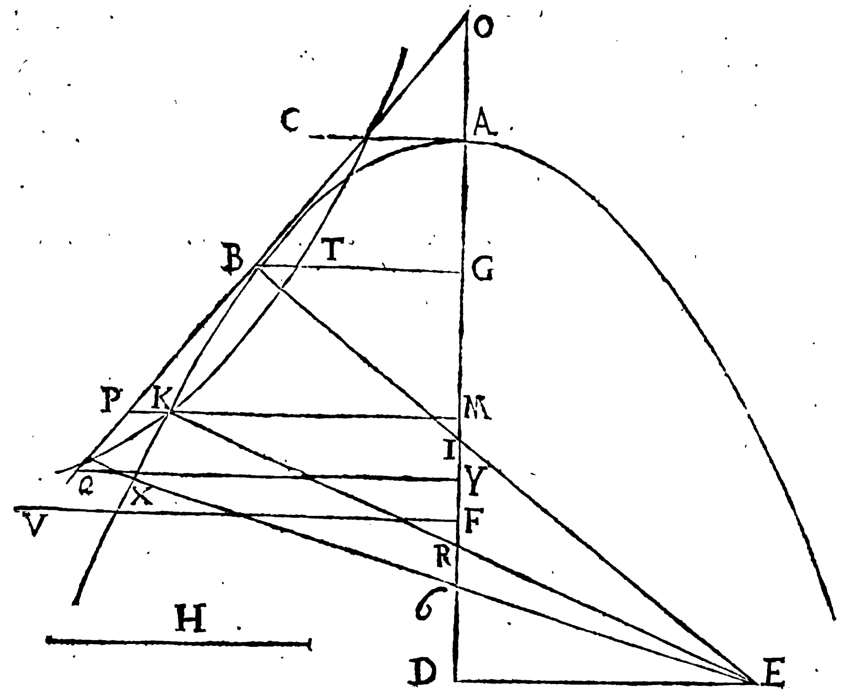
PROPOSITIONIS LI.

Eſto E D æqualis trutinæ H: Dico ex concurſu E vnicum tantùm breuiſecantem ramum duci poſſe.

In eadem figura, quia ex conſtructione H ad B G eſt, vt G F ad F D, ponitur verò E D æqualis H; ergo E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimilitudinem triangulorum E D I, B G I) eſt, vt G F ad F D, & componendo D G ad G I eſt, vt eadem G D ad D F; ideoque I G æqualis eſt D F, ſeu A C ſemierecto; igitur B I eſt breuiſsima. 8. huius.

Poſte a ducto quolibet ramo E K ſupra breuiſecantem E B (in prima figura, & infra in ſecunda) occurrente axi in R, & ducta K M perpendiculari ad axim, quæ eum ſecet in M, & tangentem O B in P. Quoniam (vt dictum eſt) O F ſecatur bifariam *in G, & non biſariam in M, ergo (ex lemmate ſexto huius libri) G O ad O M, ſeu G B ad P M (propter ſimilitudinem triangulorum B G O, & P M O) & multo magis G B ad illius portionem K M habebit maiorem proportionem, quàm M F, ad F G;* Lem. 5. premiſ. *ideoque rectangulum K M F ſub intermedijs contentum minus erit rectangulo B G F contento ſub extremis nō proportionalium; ſed rectangulum B G F æquale eſt rectangulo E D F (propterea quod D F, ad F G erat, vt B G ad H, ſeu ad ei æqualem E D)* Lem. 5 premiſ. *igitur rectangulum K M F minus erit rectangulo E D F, & propterea E D ad K M, ſeu D R ad R M (propter ſimilitudinem triangulorum E D R, K M R) maiorem rationem habebit, quàm M F ad F D, & componendo, eadem D M maiorem rationem habebit ad R M, quàm ad F D, & propterea R M minor erit, quàm F D, ſeu quàm* ex 8. 13. huius. *A C; igitur minimus ramorum ex K ad axim cadentium fertur infra K R; Quapropter ramus E K ſupra, vel infra breuiſecantem E B ad ſectionem ductus non eſt breuiſecans, & abſcindit ex axi ſegmentum A R minus, quàm abſcindat breuiſſima ex K ad axim ducta, quod erat oſtendendum.*

Tertio loco ſit E D minor, quàm H, & oſtendetur, &c. *Quia H ad B G eſt,* h *vt G F ad F D, eſtque E D minor, quàm H; ergo E D ad B G minorem proportionem* Lem. 5. premiſ. *habet, quàm G F ad F D; & ideo rectangulum E D F ſub extremis contentum minus eſt rectangulo B G F, quod ſub intermedijs continetur; ponatur iam rectangulum T G F æquale rectangulo E D F, & per F ducatur F V perpendicularis ſuper axim A D.*



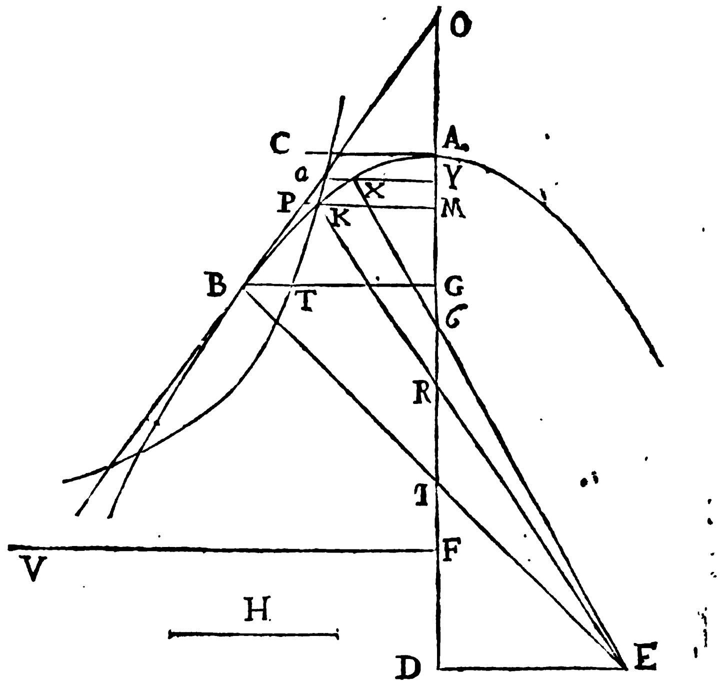
Et componendo, patet, quod D F eſt æqualis R M, &c. *Nam D R ad R M* i *eſt, vt M F ad F D, & componendo, eadem D M ad R M, atque ad D F, ſeu ad ſemierectum A C eandem proportionem habebit, & ideo D F eſt æqualis R M.*

k Et ſimiliter patebit, quod L S ſit breuiſſima, &c. *Secundus caſus abſque vllo labore oſtenſus erit iiſdem verbis, & caracteribus, quibus caſus primus expoſitus fuit, ſi inſpiciatur ſecunda figura.*

l Et cum B I intercipiatur inter illas patebit etiam, &c. *Et cum B I intercipiatur inter duos ramos breuiſecantes E K, qui ducuntur ex punctis K, in quibus hyperbole K T L ſecat parabolen A B L, cadet punctum T hyperboles intra parabolen; quare rectangulum B G F maius erit rectangulo T G F, ſeu K M F, quod æquale eſt rectangulo E D F, vt dictum eſt, quare E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimilitudinem triangulorum E D I, B G I) habebit minorem proportionem, quàm G F ad F D, & componendo, eadem D G ad G I minorem proportionem habebit, quàm ad F D, ſiue ad A C, & ideo I G maior erit, quàm A C.*

Lem. 5. præmiſ.

m Deinde ex concurſu E ad ſectionem, &c. *Deinde ex concurſu E ad ſectionem A B parabolen educantur duo rami E X ſupra breuiſecantem E K in prima figura, & infra eamdem in figura ſecunda, & ex punctis X ducantur duæ X Y perpendiculares ad axim, ſecantes axim in Y, & hyperbolen K T in* a *exiſtẽte extra parabolen; cumque duæ rectæ* a *Y, necnõ T G parallelæ ſint cõtinenti F V, & interponãtur inter hyperbolẽ K T, & reliquã continentem F A erit rectangulum* a *Y F æquale rectangulo T G F, quod factum eſt æquale rectangulo E D F, eſtque X Y portio ipſius* a *Y; igitur rectangulum E D F maius erit rectangulo X Y F, & ideo E D ad X Y, ſeu D* b*, ad* b *Y (propter ſimilitudinem triangulorum E D* b*, X Y* b*) maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo eadem D Y ad Y* b *maiorem proportionem habebit, quàm ad D F, ſeu C A.*



12. lib. 2.

Lem. 5. præmiſ.

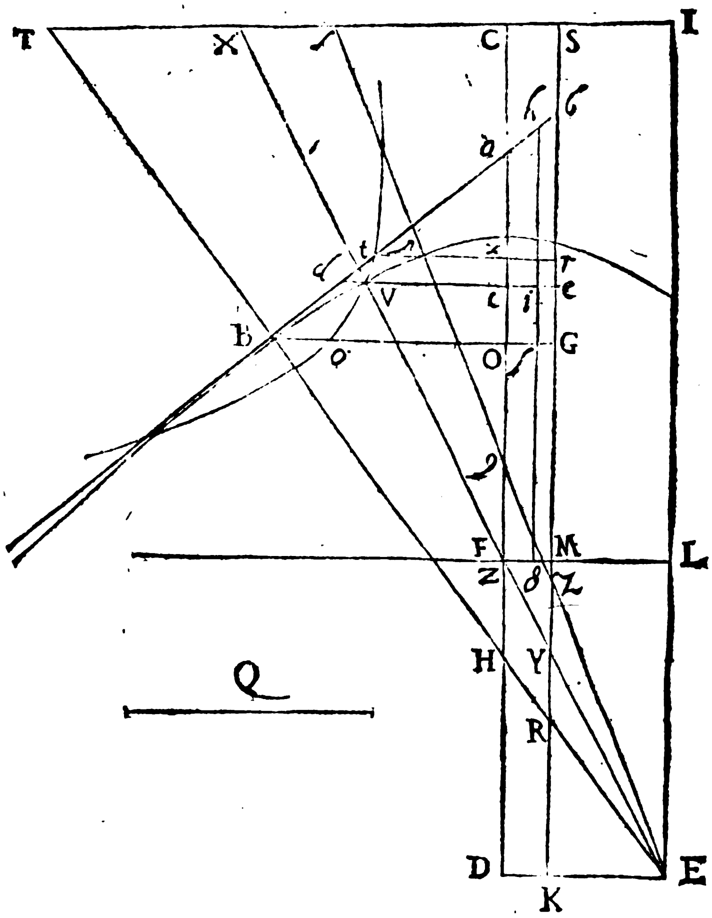
n Simili modo demonſtrabitur, &c. *Abſque noua demonſtratione propoſitum oſtendetur inſpiciendo ſecundam figuram.*

Notæ in Propoſ. LII. LIII.

a DIco, quod rami egredientes ex E habent ſuperiùs expoſitas proprietates, &c. *Ideſt eaſdem, quas habent rami in parabola educti iuxta comparationem perpendicularis E D ad Trutinam.*

Et

Et ponamus quamlibet duarum proportionum C F ad F D, & I S ad S C, b
vt proportio figuræ, & educamus ex E, S, &c. *Ideſt fiat diſtantia ex centro vſque ad perpendicularem E D ad eius portionem D F in hyperbola, vt ſumma lateris tranſuerſi, & recti ad latus rectum, & vt eorum differentia in ellipſi ad latus rectum ita fiat C D ad eius productionem D F; tunc enim C F ad F D diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi habebit eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum ad rectum; pariterq; fiat E K ad K D in eadẽ proportione figuræ, & ex E, K educamus rectas E I, K S parallelas axi A C D, ſecantes I C, & L F parallelas ipſi E D in I, S, L, & M. Immutaui poſtremã partem conſtructionis, vt manifeſte erroneã in textu Arabico; Si enim I C ad libitum ſumpta ſecatur in S in ratione C F ad F D non cadet neceſſariò E L parallela C D ſuper punctum I.*



Et interponamus inter F C, C A duas C N, C O proportionales illis duabus, &c. *Textum corruptum ſic reſtituo: Interponamus inter F C, & A C duas medias proportionales, itaut F C, N C, C O, C A ſint continuè proportionales, quod fieri poſſe conſtat ex lemmate 7. huius libri.* c

Et ponamus proportionem lineæ alicuius, vt eſt Q compoſitam, &c. *Vocatur Trutina in hyperbola, & ellipſi linea recta Q, qua ad B O compoſitam proportionem habet ex C D ad D F, & ex ratione F O ad O C.* d

Producatur priùs E B ſecans axim in H, &c. *Producatur priùs E B ſecans axim in H, & rectam S K in R, nec non rectam I C in puncto T.* e

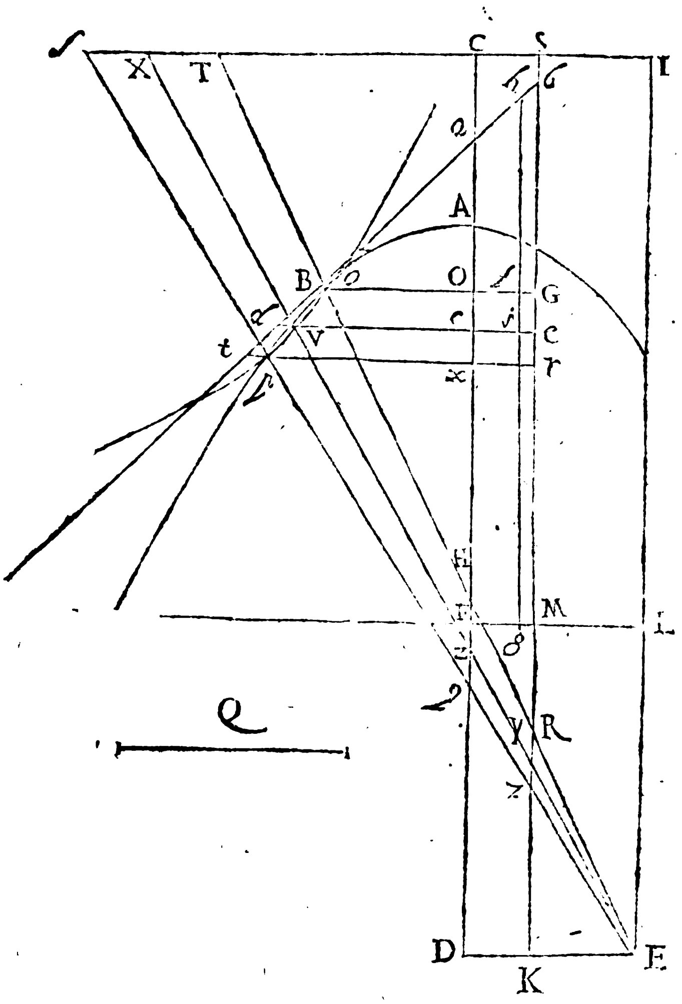
Ergo E D ad B O, quæ componitur ex E D ad D K, &c. *Nam poſita intermedia D K, proportio E D ad B O compoſita erit ex ratione E D ad D K, & ex ratione D K ad B O; eſt verò I C ad C S, vt E D ad D K (propter parallelas I E, S K, C D) atque D K eſt æqualis G O in parallelogrammo G D; ergo proportio E D ad B O componitur ex ratione I C ad C S, & ex ratione G O ad O B.* f

Sed E D ad D K eſt, vt C D ad D F, quia quælibet earum vt proportio g
figuræ

figuræ compoſitæ, vel diuiſæ, &c. *Quia E K ad K D, atque C F ad F D eandem proportionem habebant, quàm latus tranſuerſum ad rectum; ergo componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi erit E D ad D K, vt C D ad D F.*

h Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet rectangulũ F G addatur in hyperbola, & auferatur cõmuniter in ellipſi.*

i Et propterea E K ad B G, nempe K R ad R G, &c. *Quia propter ſimilitudinem triangulorum E K R, & B G R erit E K ad B G, vt K R ad R G; quare K R ad R G maiorem proportionẽ habet, quàm G M ad M K; & componendo K G ad G R maiorem rationem habet, quam eadem G K ad K M, quare K M, nẽpe* e i *aqualis D F maior eſt, quàm G R.*



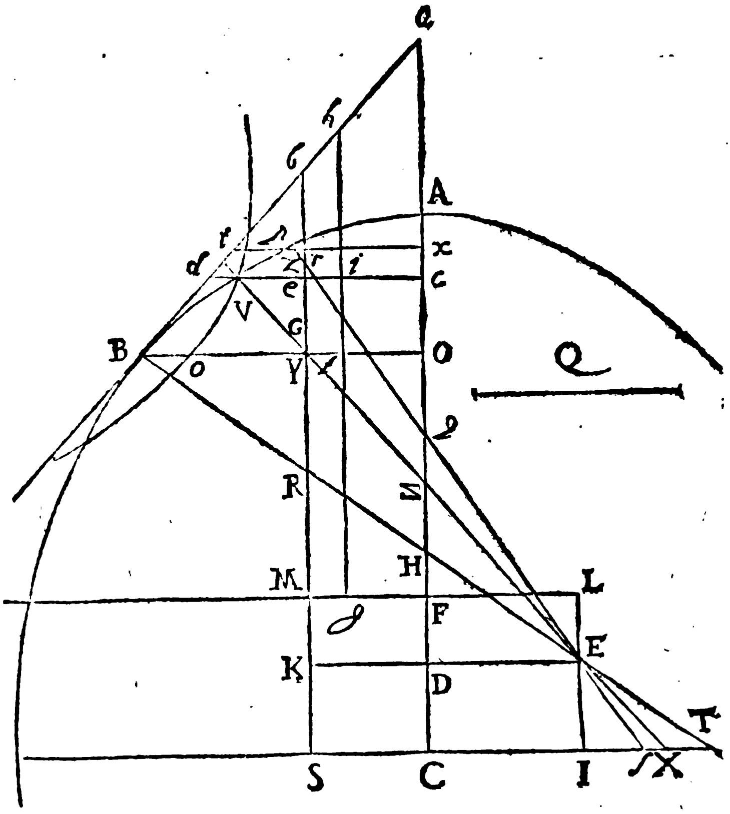
k Et auferẽdo homologũ ab homologo in hyperbola, & coniungendo *e a* in ellipſi, habebit, &c. *Scilicet comparando homologorum differentias in hyperbola, earundem ſummas in ellipſi, ideſt C T ad B O, nempe C H ad H O (propter ſimilitudinem triangulorum C H T, & O H B) habebit maiorem proportionem, quàm I C ad C S, nempe C D ad D F.* Lem. 4. præmiſ.

l Poſtea educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, &c. *Educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, quæ ſecet axim in Z, & S M in Y.*

m Et per *f* producamus *f g h* parallelam axi A D, &c. *Et per* f *ducamus* f g *parallelam axi A D, quæ ſecet tangentem B* a *in* h, *& L F in* g, *atque V* c *ſecet illam in* i, *& S M in* c.

n Et ponamus rectangulum F *f* communiter, &c. *Et communiter addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum F* f, *fiet rectangulum B* f g *aquale rectangulo* g *F C. Nomina Inuerſi, & Trutinatæ definita fuerunt in primo libro ab interprete Arabico.*

Igitur



o Igitur C a eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor, &c. *Quia poſita fuerunt quatuor rectæ lineæ F C, N C, O C, C A continuè proportionales, eſtque C A ad C a, vt O C ad C A; ergò prima F C ad tertiam O C eamdem proportionem habet, quàm O C ad quintam C a continuè proportionalium, quare comparando homologorũ differentias F O ad O a eſt, vt F C ad C O; ſed facta fuit vt F O, ad O C, ita f O ad O B; ergo componendo in hyperbola, & comparando differentias terminorũ ad conſequentes in ellipſi, eſt F C ad C O, ſeu F O ad O a, vt f B ad B O; nempe vt f h ad eandem O a, propter ſimilitudinẽ triangulorum B f h, & B O a; & ideo F O, & f h æquales ſunt.*

37. lib. 1.

Lem. 4. præmiſſ.

Lem. 2. præm.

Et propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, &c. p *Quia F O, ſeu g f oſtenſa fuit æqualis f h erit g h ſecta bifariam in f, & non bifariam in i propterea (ex lemmate ſexto huius lib.) habebit f h ad i h, ſcilicet B f ad d i (propter ſimilitudinem triangulorum B f h, d i h) maiorem proportionem, quàm i g ad g f, ſed B f ad V i portionem ipſius d i habet maiorem proportionem, quàm ad d i; ergo B f ad V i habet maiorem proportionem, quàm i g ad g f, ergo rectangulum B f g, nempe rectangulum g C (quod eſt oſtenſum ei æquale) maius eſt rectangulo V i g.*

Lem. 5.

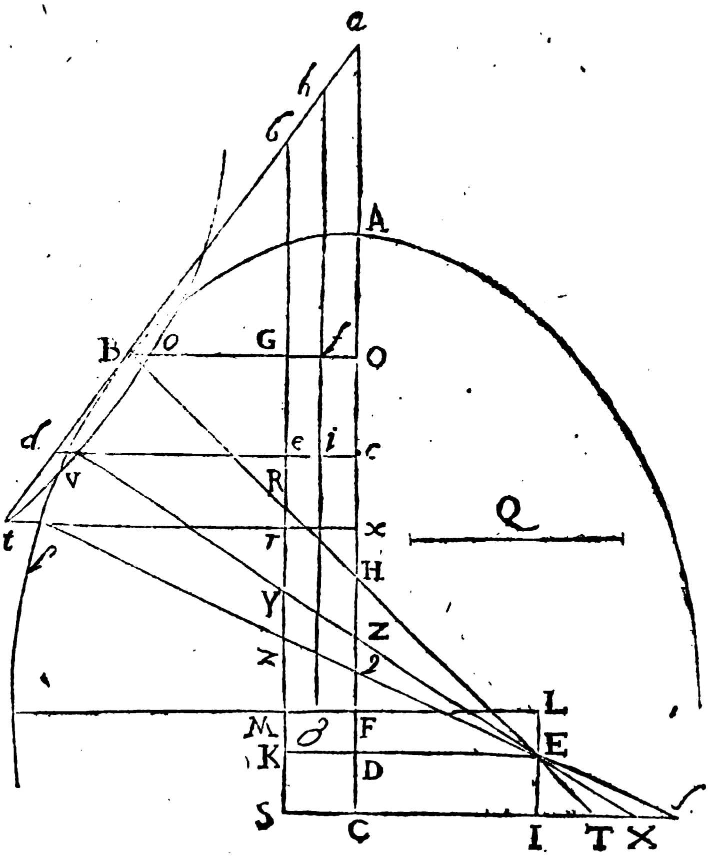
In nota literę n præm.

Et ponamus rectangulum *g e* commune, &c. *Et addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum g e communiter.* q

Et propterea E K ad *e* V, nempe K ad Y *e*, &c. *Sunt enim triangula E K Y, & V e Y ſimilia, ergo E K ad e V eſt, vt K Y ad Y e, quarè K Y ad Y e maiorem proportionem habet, quàm e M ad M K, & componendo, eadem K e maiorem proportionem habet ad e Y, quàm ad M K, ſeu ad F D; vnde patet, quod e Y minor ſit, quam F D.* r

Et conſtat quemadmodum antea demonſtrauimus, &c. *Quoniam e Y minor oſtenſa eſt, quam K M ergo eadem E I ad Y e, ſeu I X ad V e (propter ſimilitudinem triangulorum E I X, Y e V) maiorem proportionem habebit, quàm E I ad M K, ſeu I C ad C S, vel ad ei æqualem c e; igitur comparando homologorum ſummas* ſ *mas in ellipſi, & eorundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel (propter ſimilitudinem triãgulorum X C Z, V c Z) C Z ad Z c maiorem proportionem habet, quàm I C ad C S, vel C D ad D F; & componendo in ellipſi, & diuidendo in hyperbola C c ad c Z maiorẽ proportionem habebit, quàm C F ad F D, & ideo breuiſſima egrediens ex V abſcindit lineã maiorem, quàm A Z.*

Lem.4.



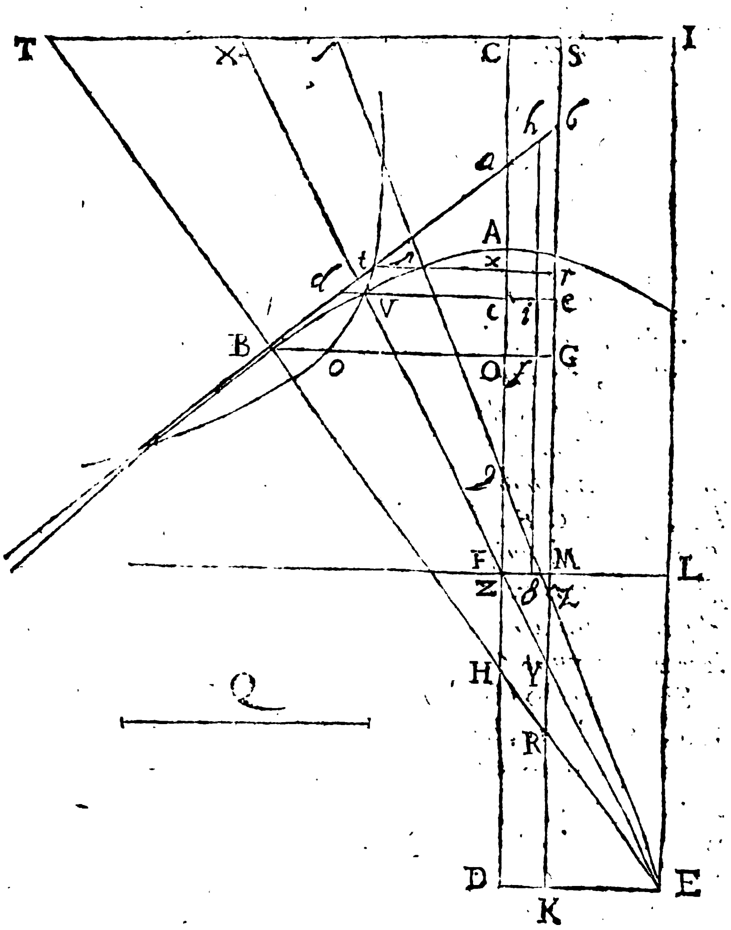
9.10. huius.

t. Simili modo cõſtat, quod breuiſſima egrediens ex *l* eiuſdem ſit rationis, &c. *Abſque noua demonſtratione in ſecunda, & quarta figura propoſitum oſtenſum erit.*

a Deinde ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur (quemadmodum ſupra factum eſt) quod B H tantum ſit linea breuiſſima, &c,

Secunda pars huius propoſitionis, quam Apollonius non expoſuit hac ratione ſuppleri poteſt.

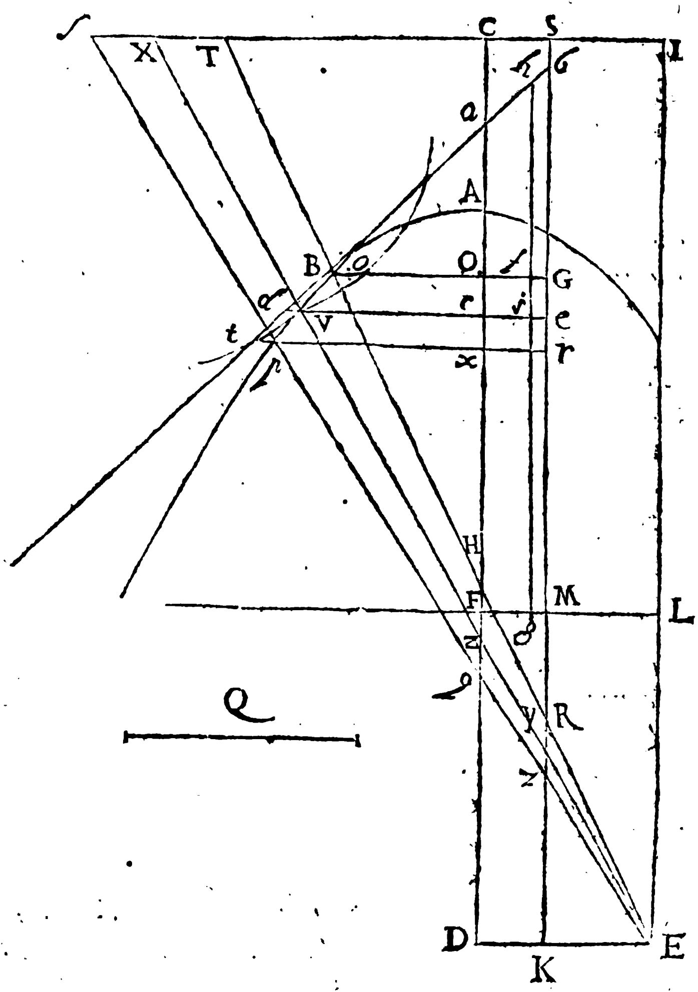
Sit E D æqualis Trutinæ Q, habebunt E D, atque Q eandem proportionem ad B O, componitur verò proportio E D ad B O ex rationibus E D ad D K, & D K ad B O, ſeu O G ad B O; componebatur autem proportio Trutinæ Q ad B O ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C; ergo ablata communiter proportione E D ad D K, vel C D ad D F, relinquetur proportio G O ad O B eadem proportioni F O ad O C; ergo rectangulum G O C ſub extremis contentum æquale erit rectangulo B O F ſub intermedijs comprehenſo, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipſi communiter rectangulum F G, erit rectangulum F S æquale rectangulo B G M; Et quia I S ad S C, vel E K ad K D, vel ad F M erat, vt C F ad F D, vel vt S M ad M K; ergo rectangulum E M æquale eſt rectangulo F S; & propterea rectangulum E M æquale erit rectangulo B G M; quapropter vt E K ad B G, ſeu K R ad R G, ita erit G M ad M K, & componendo, eadem



KG eandem proportionem habebit ad RG, atque ad MK, vnde RG æqualis erit MK, vel FD, quare eadem EI ad KM, vel CD ad DF, ſiue IC ad CS eandem proportionem habebit, quam eadem EI ad RG, vel IT ad BG (propter ſimilitudinem triangulorum IET, & GRB) ergo comparando homologorum ſummas in ellipſi; Lem. 4. *vel differentias in hyperbola CT ad BO, vel CH ad HO (propter ſimilitudinem triangulorum CHT, & OHB) eandem proportionē habebit, quàm IC ad CS, vel CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & cōponendo in ellipſi CO ad OH eandem proportionem habebit, quàm CF ad FD, ſiue quàm habet latus tranſuerſum ad rectum; & propterea BH eſt breuiſſima* 9. 10. huius, *linearum ex B ad axim cadentium.*

Deinde educatur quilibet ramus EV ſupra, vel infra breuiſecantem EB, qui productus ſecet rectam IC in X, & CA in Z, atque SM in Y, & educatur ex V recta V e *perpendicularis ad axim, ſecans DF in* c, *& SM in* e, *atque contingentem ſectionem in puncto B, ſcilicet ipſam B* a *ſecet in* d. *Et quia (vt modo oſtenſum eſt) rectangulum FS æquale eſt rectangulo BGM, ſuntque pariter oſtenſa OC, AC, C*a *proportionales; ergo C*a *eſt quinta proportionalis poſt quatuor præcedentes FC, NC, OC, AC continuè proportionales; & ideo FC ad* Lem. 3, *CO eſt, vt CO ad C*a*; ergo comparando homologorum differentias tam in hyperbola, quàm in ellipſi erit, FO ad O*a, *vt FC ad CO; eſt autem GB ad BO, vt FC ad CO, vt antea oſtenſum eſt; ergo GB ad BO erit, vt FO ad O*a*; ſed propter ſimilitudinem triangulorum BG*b, *BO*a *eſt GB ad BO, vt G*b *ad O*a*; ergo FO, ſeu MG ad O*a *eandem proportionem habet, quàm G*b *ad eandem O*a*; & propterea MG æqualis eſt G*b*; cumque M*b *ſecetur æqualiter in G, & inæqualiter in* e *(ex lemmate 6. huius) G*b *ad* eb, *ſeu BG, ad* de, *propter ſimilitudinem triangulorum BG*b, *& BO*a, *& multo magis BG ad V*e *portionem ipſius* de *habebit maiorem proportionem, quàm* e*M ad GM; ergo rectangulum*

BGM



BG M ſub extremis cõtentum maius erit rectãgulo V e *M ſub medijs comprahenſo; erat autem prius rectangulum B G M æquale rectangulo E M; ergo rectangulũ E M maius eſt rectangulo V* e *M, & propterea E K ad V* e*, ſeu K Y ad Y* e *(propter ſimilitudinem triangulorum, E Y K, & V* e *Y) maiorem proportionem habebit, quàm* e *M ad M K, & componendo, eadem K* e *ad Y* e *maiorem proportionem habebit, quàm ad M K; ergo Y* e *minor eſt, quàm M K, quare E I ad Y* e*, ſeu I X ad* e *V (propter ſimilitudinem triangulorum I E X,* e *Y V) habebit maiorem proportionem, quàm eadem E I ad M K, ſeu I C ad C S, vel ad c* e*; & propterea comparando homologorum ſummas in ellipſi, & earundem differentias in hyperbola C X ad* c *V, vel C Z ad Z* c *(propter ſimilitudinem triangulorum C Z X, V* c *Z) maiorem proportionem habebit, quàm S K, ad K M, ſeu C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi C* c *ad* c *Z habebit maiorem proportionem, quàm C F ad F D, ſeu quàm latus tranſuerſum ad rectum, & propterea breuiſsima linearum cadentium ex puncto V ad axim abſcindet ſegmentum maius, quàm A Z, & ramus E V non erit breuiſecans, quod fuerat oſtendendum.*

Lem. 5.

Lem. 5.

Lem. 4.

ex 9. 10. huius.

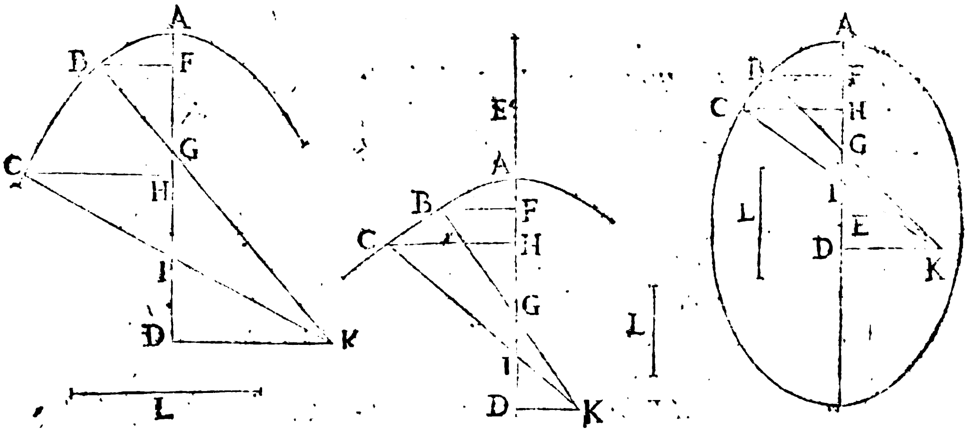
b Et demonſtrabitur, quemadmodum dictum eſt, quod G O ad B O minorem proportionem habet, quàm F O ad O C, &c. *Nam proportio E D ad B O componitur ex rationibus E D ad D K, & D K, ſeu G O ad B O. Pariterque proportio Trutinæ Q, quæ erat maior quàm E D ad B O componitur ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C, auferatur communis proportio E D ad D K, vel C D ad D F, remanet proportio G O ad O B minor proportione F O ad O C.*

c Et producamus ex V, *l* duas perpendiculares V *e*, *l* P, quæ, &c. *Et producamus ex V, & V duas perpendiculares V* e*, quæ parallelæ ſint continenti F M, & ſecent reliquas lineas in ſignis antea expoſitis; Rectangulum ergo V* e *ſiue* C q *ad* q x *(propter ſimilitudinem triangulorum) maiorem proportionem habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi, C* x *ad* x q *maiorem proportionem habebit, quàm C F ad F D, ſiue quàm latus tranſuerſum ad rectum, quapropter breuiſsima ex* p *ad axim ducta ſecat maiorem lineam, quàm A* q. *Quæ omnia oſtendenda fuerant.* Ex 9. 10. huius.

Notæ in Propoſ. LIV. LV.

Itaque oſtenſum eſt, vti memorauimus, quod ex concurſu duarum breuiſſimarum ad illam ſectionem non egrediatur alia breuiſecans pręter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concurſu educti ad ſectionem habent proprietates ſuperius expoſitas. a

Senſum germanum huius conſectarij, in quo duæ propoſitiones Apollonij continentur, non eſt facile diuinare in tanta Apollonij breuitate, & textus Arabici inſigni corruptione; videtur enim recenſere, & recolligere concluſionem quamdam præcedentium propoſitionum: at hoc fieri nullo modo debebat in duabus propoſitionibus 44. *&* 45. *Rurſus ſi theoremata ſunt, demonſtrari non poterant ante propoſitiones* 51. 52. 53; *ſed forſan numeri Arabici non* 44. *&* 45; *ſed* 54. *&* 55. *eſſe debent, quod mirum non eſt, cum numeri paſsim in hoc codice Arabico deformati reperiantur. Itaque in hac ambiguitate ſuſpicor, textum ſic reſtitui poſſe.*



PROP. 5. Addit. *Si in coniſectione duæ breuiſecantes ductæ fuerint ab eorum concurſu, nullus alius ramus ductus erit breuiſecans: Et ramorum ab eodem concurſu extenſorum, qui inter breuiſecantes intercipiuntur, abſcindunt axis ſegmenta maiora, & qui non intercipiuntur, minora, quàm abſcindant lineæ breuiſsimæ ab eorum terminis ad axim ductæ: oportet autem in ellipſi, vt duo rami, & perpendicularis cadant inter axis maioris verticem, & centrum ſectionis.*

Sit

Sit coniſectio A B C, cuius axis A D, & in hyperbola, & ellipſi centrum E; & ſumantur quælibet duo puncta B, & C, quæ in ellipſi ſint in eodem eius quadrante, & ducantur B F, C H perpendiculares ad axim, & in parabola fiant F G, & H I æquales ſemiſsi lateris recti; at in hyperbola, & ellipſi fiat E F ad F G, nec non E H ad H I, vt latus tranſuerſum ad rectum, coniunganturq; rectæ B G, & C I. Manifeſtum eſt B G, & C I eſſe lineas breuiſsimas, quæ ſi producantur vltra axim (ex 28. propoſitione huius libri) conuenient 8.9.10. huius. *alicubi, vt in K. Dico, quod ex concurſu K nullus alius ramus breuiſecans duci poteſt ad ſectionem A B C. Extendatur ex K ſuper axim A D perpendicularis K D, & reperiatur ſectionis Trutina L competens menſuræ A D ipſius concurſus K, vt in propoſitionibus 51. & 52. præcipitur. Et certè perpendicularis K D non erit maior, quàm L, aliàs duci non poſſet ramus vllus breui-* 51. 52. huius. *ſecans ex concurſu K ad ſectionem A B C, quod eſt falſum; factæ enim fuerunt K B, & K C breuiſecantes; Similiter K D non erit æqualis Trutinæ L, quandoquidem tunc vnica tantummodo breuiſecans ex K ad ſectionem A B C duci poſſet, quod rurſus falſum eſt, poſitæ enim fuerunt duæ breuiſecantes; igitur perpendicularis K D neceſſario minor erit Trutina L, & ideo ex concurſu K duæ* 51. 52. huius. *tantummodo breuiſecantes ad ſectionem A B C duci poſſunt, quæ ſunt B K, C K; & propterea nullus alius ramus breuiſecans ex concurſu K ad ſectionem A B C duci poteſt præter duos K B, & K C; quod erat primo loco oſtendendum.*

Secundo iiſdem poſitis, dico, quod rami ducti inter K B, & K C cadunt infra lineas breuiſsimas ab eorom terminis ad axim ductas, & quod rami producti ex K ſupra breuiſecantem K B verſus A verticem ſectionis, vel infrà ramum breuiſecantem K C abſcindunt axis ſegmenta ex vertice minora, quàm abſcindant lineæ breuiſsimæ ab eorum terminis ad axim ductæ. Reperiatur denuo Trutina L, oſtendetur, vt prius perpendicularis K D minor, quàm L, & duæ tantummodo breuiſecantes K B, & K C; quare quilibet ramus ex K ad ſectionis punctum, 51. 52. huius *inter B, C poſitum extenſus, ſecat ſegmentum axis ex vertice A maius quàm abſcindat linea breuiſsima ab eius termino ad axim ducta: pariterque quilibet ramus ex K ad punctum ſectionis ſupra B, poſitum, vel infra ramum K C extenſus, abſcindet ſegmentum axis ex A minus, quàm ſecet linea breuiſsima ab eius termino ad axim ducta; quod erat oſtendendum.*

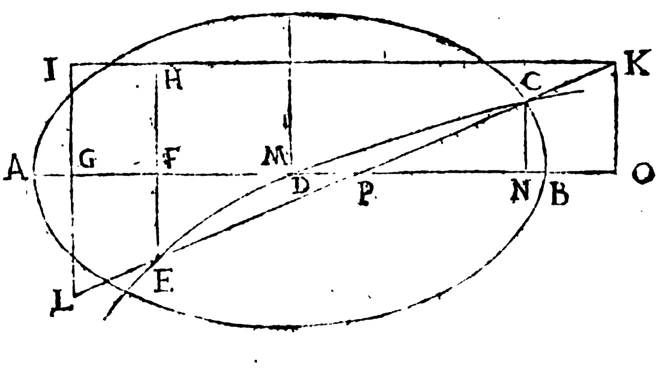
Notæ in Propoſit. LVI.

a Reperitur quidem in ramis aggregati ſecantis bifariam inclinatum, ſuper quod non cadit perpendicularis, breuiſecans vna tantum, quomodocumque ſe habeant perpendicularis, & menſura, &c.

Senſum huius propoſitionis nec Apollonius quidem ſi reuiuiſceret inſigni barbarie corruptum perciperet, cenſeo tamen, ſic reſtitui debere.

In ellipſi ramorum ſecantium vtrumque axim à concurſu vltra centrum poſito egredientium, vnius tantùm portio inter axim maiorem, & ſectionem intercepta erit linea breuiſsima; ſiue menſura ipſam comparatam, nec non perpendicularis ipſam Trutinam ſuperet, æquet, vel ab ea deficiat.

b Sit ſectio ellipſis A C B tranſuerſa A B, &c, *Lego; Sit ſectio ellipſis A C B, & axis maior A B, centrum D, & perpendicularis E F ſecans axim in F inter centrū ellipſis D, & verticem A.*



c Et ducamus per punctum E ſectionē hyperbolicam E M C circa duas eius continentes, &c. *Ideſt circa duas aſymptotos I L, I H per* 12. & 13. lib. 2. *E deſcribatur hyperbole E M C, quæ ſecet axim A B æquidiſtantem alteri aſymptoton in aliquo puncto vt in M; oſtendetur punctum M ſuper ellipſis centrum D cadere.*

d Ergo E H prima in proportione in I H ſubſequentem, nempe G F ſubſequens ipſam M G quartam, æquale eſt ſubſequenti D G ſecundæ in I G nempe F H tertiam. Ergo punctum N, &c. *Textus corruptus ſic reſtitui poſſe cenſeo; Ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam æquale eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam, &c. Propterea quod E H ad F H, atque D G ad G F poſita fuerunt, vt latus tranſuerſum ad rectum; ergo rectangulum ſub D G, & H F, ſeu I G, extremis quatuor proportionalium, æquale eſt rectangulo ſub intermedijs E H, & F G, ſeu H I, eſtque punctum E in hyperbola E M C cuius aſymptoti K I, L I; ergo punctum D in eadem hyperbola exiſtit; ſed erat prius in ellipſis diametro A B, ſcilicet in centro; quare in earum communi ſectione exiſtet: erat autem punctum M communis ſectio hyperboles E C, & axis ellipſis A B; igitur puncta M, & D coincidunt, & hyperbole E D C* 8. lib. 1. *tranſit per centrū ſectionis ellipticæ A C B, & ideo hyperbole E D C, quæ in infinitū extendi, & dilatari poteſt neceſſario ſecabit finitam ellipſim alicubi, vt in C.*

e Et producamus per E C lineam, &c. *Et producamus per E C rectam lineam, quæ occurrat continentibus in L, K, & ſecet axim ellipſis in P.*

f Erit G F æqualis O N, quare F O, &c. *Quia duæ rectæ lineæ A O, L K ſecantur à parallelis I L, F E, C N, K O proportionaliter, & ſunt K C, L E* 8. lib. 2. *æquales, ergo O N, F G inter ſe æquales erunt, & addita communiter N F erit F O æqualis N G; Et quoniam E H ad H F eſt vt E K ad K P (propter parallelas K I, O A) nempe vt F O, ſeu ei æqualis G N ad O P (propter parallelas E F, O K) ſed eandem proportionē habet D G ad G F, quàm E H ad H F; ergo G N ad O P eandem proportionem habet quàm D G ad G F, & comparando* Lem. 3. *homologorum differentias D N ad N P erit vt D G ad G F, ſeu vt latus* 10. huius. *tranſuerſum ad rectum; & ideo C P eſt breuiſſima.*

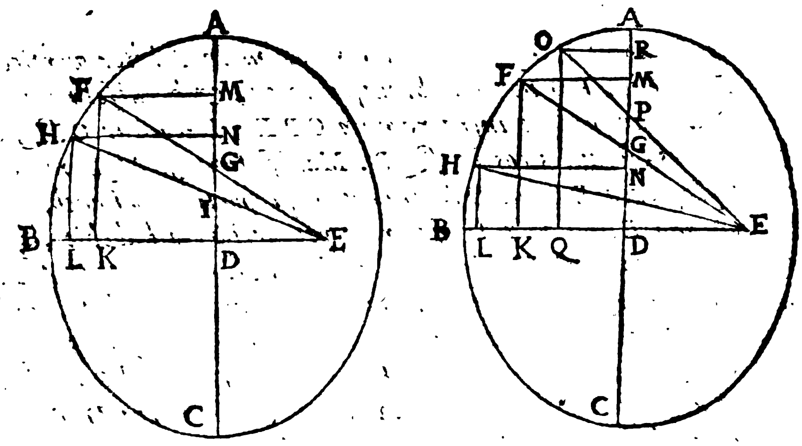
Quia in ſequenti propoſitione 57; & in alijs adhibetur propoſitio non adhuc demonſtrata; nimirum poſita C P linea breuiſſima, pariterque I D ſemiſſi axis recti minoris etiam breuiſſima (ex 11. huius) quæ occurrant vltra axim in M deducuntur ea omnia, quæ in propoſitionibus 51. & 52. ex hypotheſi omnino diuer-

no diuerſa eliciebantur; nam in dictis propoſitionibus perpendicularis ex concurſu ad axim ducta efficiebat in ellipſi menſuram (iuxta definitionem 15. huius libri) minorem medietate axis tranſuerſi, ideſt perpendicularis ex concurſu cadebat inter centrum ſectionis, & proximiorem verticem: hic vero perpendicularis ex concurſu M per centrum D ellipſis tranſit.

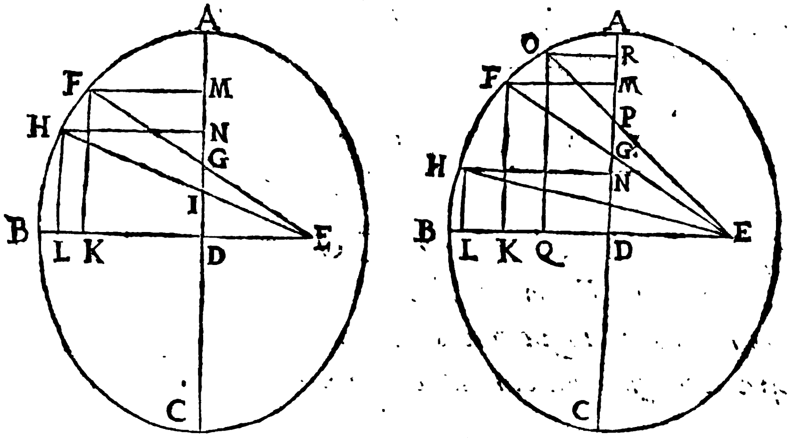
Animaduertendum eſt hoc theorema demonſtratum fuiſſe ab Apollonio Propoſ. 35. huius libri, quod tamen paraphraſtes neſcio an iure in fine huius voluminis tranſpoſuit; Sed quia predicta propoſitio 35. omnino hic eſt neceſſaria, & pendet ex alijs præcedentibus, libuit potius aliam independentem demonſtrationem afferre quam ordinem propoſitionum ſatis alteratum denuo perturbare.

LEMMA VIII.

IN ellipſi ABC linea breuiſsima F G, & ſemiaxis minor rectus B D conueniant in E, erunt E F, & E B duæ breuiſecantes, ducatur quilibet ramus E H inter eos: Dico E H non eſſe breuiſecantem, & cadere infra lineam breuiſsimam ductam ex puncto H ad axim.



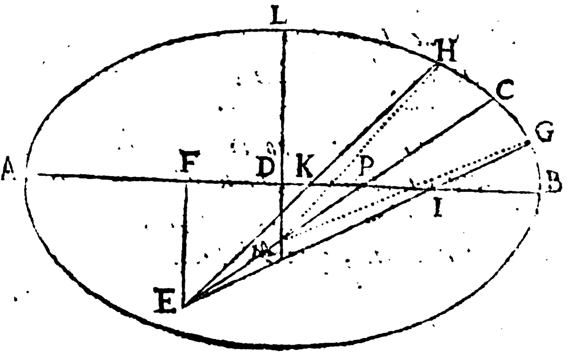
Ducantur ex F, & H rectæ F K, H L perpendiculares ad axim rectum B D eum ſecantes in K, & L, pariterque ducantur F M, H N perpendiculares ad axim tranſuerſum A D eum ſecantes in M, N. Et quia F G eſt breuiſsima, ergo D M ad M G eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum C A ad eius 15. huius. *latus rectum; ſed propter parallelas D E, M F, eſt D M ad M G, vt E F ad F G, ſeu E K ad K D (propter parallelas G D, F K) quare E K ad K D eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum ad rectum, & diuidendo E D ad D K eandem proportionem habebit, quàm differentia lateris tranuerſi, & recti ad latus rectum, eſt vero D L maior, quàm D K (cum H L parallela ipſi F K cadat inter punctum K, & B) igitur E D ad maiorem D L minorem proportionem habet, quàm ad D K, & propterea componendo E L ad L D minorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum: eſt vero E H ad H I,* vt EL ad LD (propter parallelas ID, HL) pariterque DN ad NI eſt, vt EH ad HI (porpter parallelas ED, NH) quare DN ad NI erit vt EL ad LD, & propterea DN ad NI minorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum CA ad eius latus rectum, & ideo linea breuiſsima ex puncto H ad axim AD ducta cadet ſupra ramum HIE verſus verticem A, atq; EH non erit breuiſecans, quod erat primo loco oſtendendum. 10. huius.



Secundo ducatur ramus EO ſecans maiorem axim in P inter verticem A, & breuiſecantem EF; Dico EO non eſſe breuiſecantem, & breuiſsimam ex puncto O ad axim AD ductam cadere infra ramum OPE; Ducantur OQ, OR perpendiculares ad axes, ſecantes eos in Q, R. Manifeſtum eſt QD minorem eſſe, quàm KD, & propterea ED ad DQ maiorem proportionem habebit, quàm ad DK, & componendo EQ ad QD maiorem proportionem habebit, quàm EK ad KD: oſtenſa autem fuit EK ad KD, vt latus tranſuerſum CA ad eius latus rectum; igitur EQ ad QD maiorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum; ſed (propter parallelas PD, OQ) vt EQ ad QD ita eſt EO ad OP, & propter parallelas ED, RO, vt EO ad OP, ita eſt DR ad RP; ergo DR ad RP eſt, vt EQ ad QD, & propterea DR ad RP maiorem proportionem habebit, quàm latus tranuerſum CA ad eius latus rectum; ex 10. huius. igitur EO non erit breuiſecans, & breuiſsima ex puncto O ad axim ducta cadit infra ramum EO verſus D, quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſ. LVII.

ET dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, &c. *Ideſt ſit rurſus linea breuiſsima CM, quæ producta concurrat cum perpendiculari EF in E, quæ ſecet axim in F vltra centrum D ad partes verticis A. Dico, quod præter ramum*



mum E C nullus alius ramus breuiſecans ex concurſu E ad ſectionem duci poteſt, qui cadat in eodem quadrante B L, quem breuiſecans interſecat.

h Nam ſi producantur E H, E G, &c. *Ducantur quilibet rami E H, E G ad vtraſque partes breuiſecantis E C intra quadrantem B L, qui ſecent D B in K, & I, & producatur per centrum D recta M D L perpendicularis ad axim B A, qua ſecet ſectionem in L, & ramum E C in M.*

i Et quia iam productæ ſunt ex concurſu M duæ breuiſecantes, &c. *Quia C M breuiſsima ex hypotheſi occurrit ſemiaxi minori recto L D breuiſsimæ pariter (ex 11. huius) in M, ſequitur (non quidem ex 51. 52. huius, ſed ex lemmate 8. premiſſo) quod linea recta ex M ad H coniuncta cadat infra breuiſsimam ex puncto H ad axim B A ductam, & coniuncta recta M G cadit ſupra breuiſsimam ex puncto G ad axim ductam.*

k Sed E H, & E G efficiunt abſciſsas oppoſito modo, &c. *Quia ab eodem puncto H ſectionis ducuntur tres recta linea H E, H M, & breuiſsima ex H ad axim B A ducta, quarum intermedia eſt H M, eo quod breuiſsima ex H ad axim A B cadit ſupra H M ad partes B, vt dictum eſt, & H E cadit infra H M ad partes A; ergo H E cadit infra breuiſsimam ex H ad A B ductam, & propterea E H non erit breuiſecans: Similiter breuiſsima ex G ad A B extenſa cadit infra G M ad partes A, vt dictum eſt; at E G cadit ſupra G M ad partes B; ergo E G cadit ſupra breuiſsimam ex G ad axim A B ductam, quare E G non eſt breuiſecans.*

Lem. 8.

ibidem.

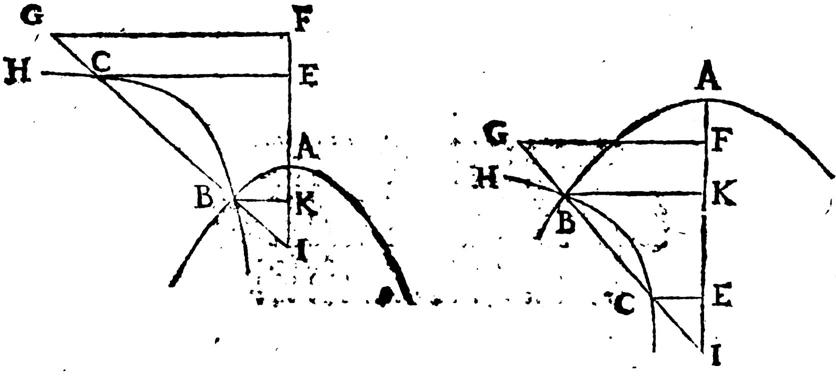
SECTIO NONA

Continens Propoſ. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. & LXIII.

IAm ex puncto dato C extra, vel intra ſectionem A B (quod in axi I A non ſit) poſſumus rectam lineam ducere, cuius portio intercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſſima. a

PROPOSITIO LVIII.

Sit ſectio parabole, & producamus perpendicularem C E ſuper I E A, & ponamus E F æqualem dimidio erecti, & ducamus G F parallelam ipſi C E, & per C ducamus hyperbolen H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat ſectioni A B in B, & per B, C producatur linea occurrens continenti I A in I, & continenti G F in G: Dico, quod B I eſt linea breuiſsima. b 4. lit;2.

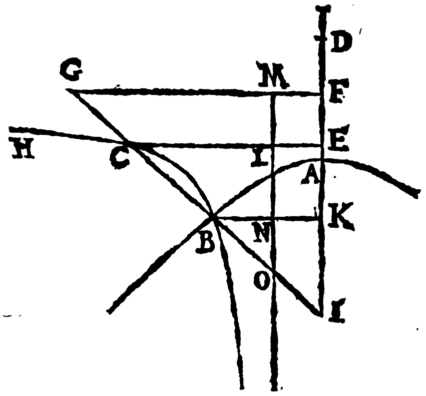


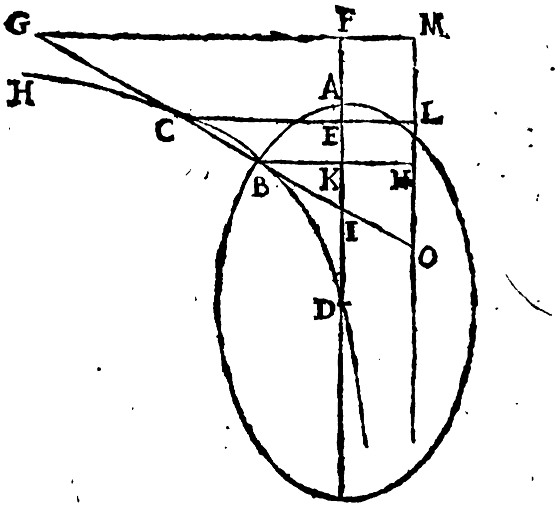
8. lib.2. Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I æqualis eſt B G (ſexta ex ſecundo) erit E I æqualis K F, & E F, K I erunt æquales, atque ſuppoſita, eſt E F æqualis dimidio erecti; ergo K I ita eſt pariter; Quare B I eſt breuiſsima, (octaua ex quinto) & hoc erat probandum. c

PROPOSITIO LIX. LXII. & LXIII.

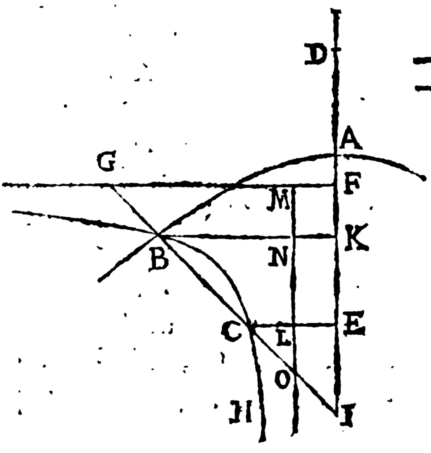
DEinde ſit ſectio hyperbole, aut ellipſis, cuius centrum D, & lineis, atque ſignis in eodem ſtatu manentibus, ponamus D F ad F E, & a

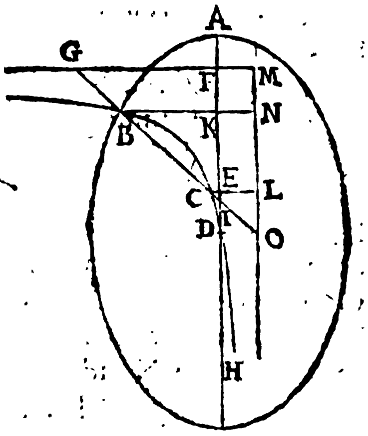
ſimiliter





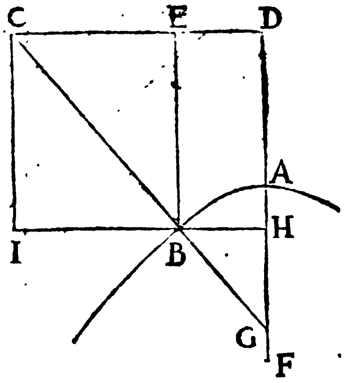
ſimiliter C L ad L E, vt proportio figuræ, & producamus per L ipſam O M parallelam A I F, & per F ipſam G M parallelam C E, & faciamus ſectionem H C B hyperbolen tranſeuntem per punctum C circa 4. lib. 2.
continentes G M, O M, quæ occurret ſectioni A B (in ellipſi quidem vt 56. huius.
b demonſtrauimus) in hyberbola vero eo quod O M parallela axi D A inclinato ſubtendit, ſi producatur, angulum ſubſequentem continentiæ angulum ſecabit A B, & corda, ſi producatur, occurret ſectioni; Ergo O M ingreditur ſectionem A B, & ampliatur ſectio A B per extenſionem longè à duabus lineis O M, M G, & ſectio B C prope illas ducitur (deci- 14. lib. 2.
moſexta, ex ſecundo) igitur duæ ſectiones A B, C B ſibi occurrunt, vt in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem D F A in I, & G F in G;
c Et quia B O æqualis eſt ipſi C G (octaua ex ſecundo) erit O N æqualis ipſi M L, & O L ipſi N M; ergo O L, nempe N M, ſeu K F ad E I eſt, vt C L ad C E, nempe D F ad D E, ergo K F ad E I eſt, vt D F
d ad E D comparando homologorum ſummas in hyperbola, & eorundem Lem. 3.
differentias in ellipſi, & iterum comparando antecedentes ad differen- Lem. 1.
tias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, quæ eſt vt proportio figuræ; igitur B I eſt linea breuiſſima (9. 10. ex quinto) & hoc erat probandum.





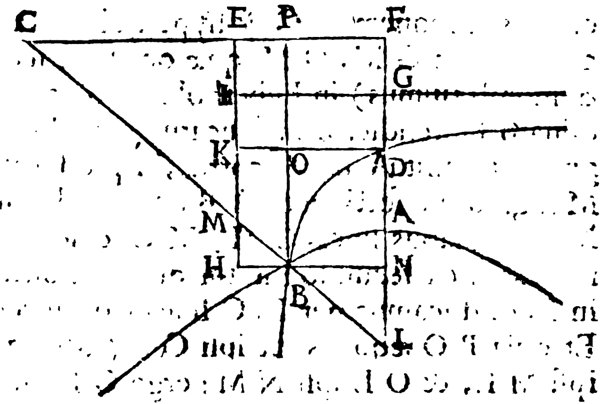
PROPOSITIO LX.

Deinde perpendicularis egrediens ex [a] C cadat ad centrum D ſectionis A B hyperboles, & ponamus C E ad E D, vt proportio figuræ, & producamus ex E ad ſectionem rectā lineam E B, quæ parallela ſit D E, producaturque C B, quæ occurrat axi in G. Et quia C E ad E D, nempe [b] C B ad B G, nempe D H ad H G eſt, vt proportio figuræ; erit G B linea breuiſſima (nona ex quinto) quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO LXI.

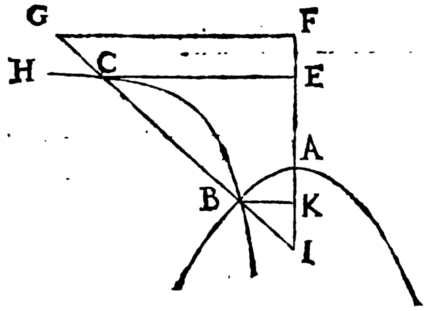
Sit poſtea punctum C, & perpendicularis C F, & F remotius à vertice ſectionis, quàm ſit centrum, & ponamus C E ad E F, vt eſt proportio figuræ, & ſimiliter D G ad G F, & ex E producamus E H, quæ ſit parallela ipſi B A, & ex G, D ad illam G I, D K, quæ ſint parallelæ ipſi C F; & ducamus 4 lib. 2. ſectionem hyperbolen tranſeuntem per D, quam contineant I H, I G, quæ occurret ſectioni A B ſimiliter in B; Itaque, [a] per B, C producamus lineam, quæ occurrat axi F A in L, & ipſi E H in M. Dico, quod B L eſt linea breuiſſima. quia ducta perpendiculari [b] H N, C E ad E F, ſeu ad K D, eſt vt D G ad G F, nempe vt K I ad I E, & propterea E C in E I erit æquale rectangulo D I ſubſequenti 12. lib. 2. (octaua ex ſecundo) nempe rectangulo B I conſequenti; Ergo C E in E I eſt æquale B H in H I, & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E eſt, vt E I ad I H; ergo H I, nempe N G æqualis eſt E M, & ideo L F ad E M, nempe ad N G eſt, vt C F ad E C, nempe D F ad D G, quia quælibet earum aſſignata eſt, vt proportio figuræ; ergo L F ad N G eſt, vt D F ad D G; itaq; comparando homologorum differentias L D ad D N, vt D F ad D G; & per conuerſionem rationis, & poſteà diuidendo D N ad N L erit, vt D G, ad G F, quæ eſt vt proportio figuræ; Ergo B L eſt linea breuiſſima (nona ex quinto) & hoc erat oſtendendum.

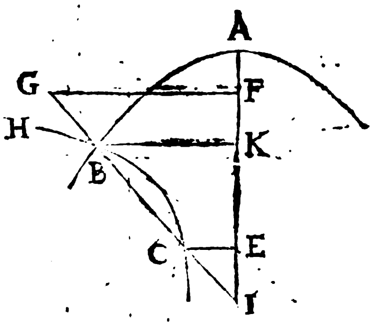


Notæ

Notæ in Propoſit. LVIII.

a. IAm poſſumus producere ex puncto aſſignato C extra datam ſectionem A B, aut intra (ſi punctum non fuerit ad axim I A) lineam diuidentem ex illo inter ſectionem, & axim lineam breuiſſimam, &c. *Sic legendum puto. Ex punto dato C extra, vel intra ſectionem A B, quod in axi non ſit, lineam rectam ducere, cuius portio intercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſsima.*





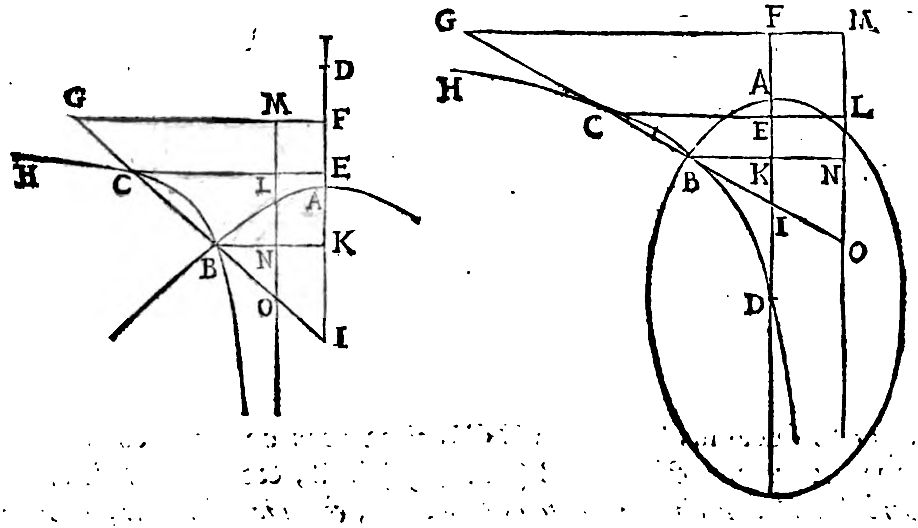
b Et per C ducamus ſectionem H C B circa duas continentes illam G F,
I F, quæ occurrat ſectioni A B (16. ex 5.) in B, &c. *Scilicet ducamus per*
C hyperbolen H C B circa aſymptotos G F, F I, & quia aſymptoti, & hyperbo- 4. lib. 2.
le H C B producta ad ſe ipſas ſemper proprius accedunt, atque parabole A B 14. 2.
producta ſemper magis ab axi A I remouetur; igitur hyperbole H C B, & para- Ex 8. 1.
bola A B ſe mutuo ſecabunt; ſecent ſe ſe in puncto B. Animaduertendum eſt,
quod in textu Arabico aſſumitur hæc concluſio, vt demonſtrata in propoſitione
16. huius quinti libri; & ſiquidem numeri huius citationis mendoſi non ſunt,
hæc propoſitio ſexta decima deſideratur in hoc libro.

c Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I, &c. *Ex puncto B ad*
axim ducatur perpendicularis B K, ſecans eum in K; quoniam quando punctum
C ponitur intra parabolen, tunc B G æqualis eſt I C; quando vero cadit extra, 8. lib. 2.
tunc C G eſt æqualis B I, & addita communi B C erit I C æqualis B G, cumq;
duæ rectæ lineæ I G, I F conuenientes in I ſecentur à rectis lineis K B, E C,
F G inter ſe parallelis, eo quod ſunt perpendiculares ad eundem axim; ergo I G,
& I F ſecantur in ijſdem rationibus, & propterea E I æqualis erit K F; ſicuti
I C æqualis erat B G, pariterque I K æqualis erit E F, ſicuti I B æqualis erat
C G; poſita autem fuit E F æqualis ſemierecto; igitur K I ſemiſsi lateris recti
pariter æqualis erit.

Notæ

Notæ in Propoſit. LIX. LXII. & LXIII.

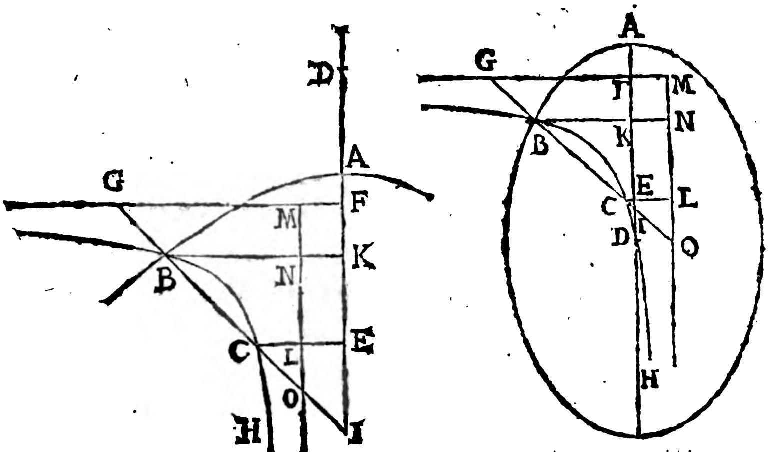
ET lineis, atque ſignis eodem ſtatu manentibus, &c. *Ideſt punctum C extra, aut intra ſectionem ponatur, dummodo non ſit in axi, ducatur; C E perpendicularis ad axim, ſecans eum in E, & vt latus tranſuerſum ad rectum, ita fiat D F ad F E, atque C L ad L E, & per L producatur O L M parallela A L, & per F ducatur F M G parallela C E, quæ ſecet O M in M, &* per 4. lib. 2. *C deſcribatur hyperbole H C B circa aſymptotos G M O, quæ in ellipſi per eius centrum D tranſibit, & ideo eam ſecabit ſicuti oſtenſum eſt in 56. huius.* a



Eo quod O M parallela axi D A inclinato ſubtendit, &c. *Quoniam in hyperbola O M parallela axi ſecat vtraque linearum continentium angulum,* b
11. lib. 2 *qui deinceps eſt ei, qui hyperbolen continet ſectioni occurret; & producta ſectionem A B ſecabit, & ideo O M cadit intra ſectionem A B, atque hyperbole A B producta ſemper magis, ac magis recedit tum ab M O parallela axi, cum ab M*
14. lib. 2. *G parallela tangenti verticali, & ſectio H C B, & aſymptoti O M G ad ſe ipſas ſemper propius accedunt, igitur ſectiones A B, B C conueniunt; ſecent ſe ſe in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem axi in I, ipſi M O in O, & M G in G.*

Et quia B O æqualis eſt ipſi C G, &c. *Cum linea recta O M, O G ſe ſecantes in O, ſecentur à parallelis E C, K B, F G proportionaliter, erit O N æqualis M L, ſicuti O B æqualis erat C G, & O L, æqualis erit N M, ſicuti* c
8. lib. 2. *O C æqualis erat B G, cumque triangula O C L, & I C E ſint ſimilia propter parallelas O L, I E, erit O L ad E I, vt L C ad C E; eſt vero M N, ſeu F K æqualis ipſi L O, igitur F K ad E I eſt, vt L C ad E C, ſed ex conſtructione erat D F ad F E, vt C L ad L E, ſcilicet vt latus tranſuerſum ad*
Lem. 1. *rectum; ergo antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad*

eorumdem



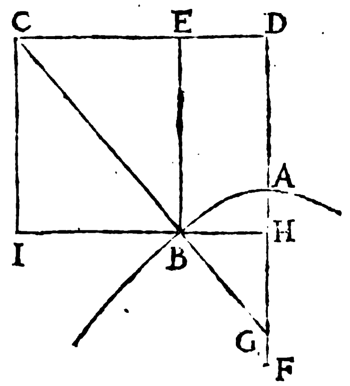
eorundẽ differentias in ellipſi ſcilicet C L ad C E erit vt D F ad D E, & propterea K F ad E I erit, vt D F ad D E, & cõparando homologorum ſummas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipſi, K D ad D I erit, vt D F ad D E, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, ſeu vt latus tranſuerſum ad rectum; igitur B I eſt linea breuiſsima. Lem. 3. Lem. 1. Ex 9. 10. huius.

d Si autem componamus proportionem in hyperbola deinde abſcindamus, & reijciamus oppoſitum ab oppoſito in ellipſi, deinde inuertamus fiet K D ad K I, vt D F ad F E, &c. *Sed textum mendoſum corrigi debere, vt ſupra factum eſt conſtat ex pracedenti nota.*

Notæ in Propoſit. LX.

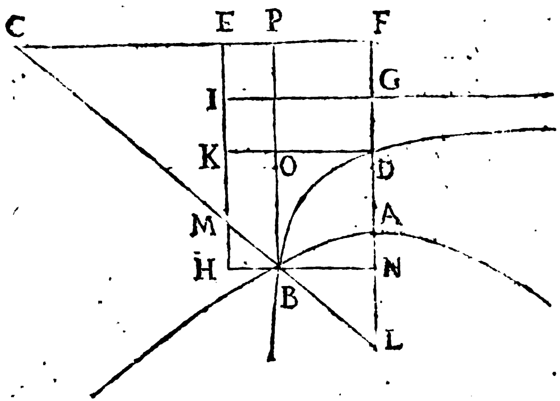
a DEinde ſit perpendicularis ex C, &c. *Si ex puncto C extra hyperbolen poſito perpendicularis ad axim ducta ad centrum eius D pertingat, duci debet pariter ex puncto C recta linea ad ſectionem, cuius portio inter axim D F, & ſectionem A B ſit linea breuiſsima; fiat C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum, & ex E ducatur E B parallela axi, ſecans hyperbolen in B, & ex B ducatur B H perpendicularis ad axim, ſecans eum in H.*

b Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, &c. *Quia propter parallelas B E, F D eſt C E ad E D, vt C B ad B G, & propter parallelas D C, H B, eſt D H ad H G, vt C B ad B G, quare D H ad H G erit, vt C E ad E D: poſita autem fuit C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum; igitur D H ex centro hyperboles ad H G eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum ad rectum, & propterea G B erit linea breuiſsima.* 9. huius.



Notæ in Propoſit. LXI.

a SIt poſtea punctum C, & perpendicularis C F, &c. *Si à puncto C extra hyperbolen A B poſito, C F perpendicularis ad axim efficiat F A ſegmentũ tranſuerſi axis maius ſemiſſe eius D A, & ponantur C E ad E F, atque D G* *ad G F, vt latus tranuerſum ad rectum, & ducatur ex E recta E H parallela F A, quæ ſecetur à rectis D K, G I ad axim perpendicularibus in K, & I, &* 4. lib. 2. *per D ducatur hyperbole D B circa aſymptotos H I G, occurret hyperbole A B (vt in Prop. 59. 62. 63. oſtenſum eſt) alicubi, vt in B, coniungatur recta linea B C, quæ occurrat axi in L, & ipſi E H in M, ducaturque ex B perpendicularis ad axim eum ſecans in N, & rectam E M in H. Dico, quòd B L eſt linea breuiſsima.*



b C E ad E F, nempe K D eſt, vt D G ad G F, &c. *Quoniam ex conſtructione C E ad E F, ſeu ad ei æqualem K D, in parallelogrammo D E, eſt vt D G ad G F, ſcilicet vt latus tranſuerſum ad rectum, eſtque K I ad I E, vt D G ad G F propter parallelas D K, G I, F E; ergo vt prima C E ad ſecundam D K, ita eſt tertia K I ad quartam I E, & propterea rectangulum C E I ſub extremis contentum æquale eſt rectangulo D K I ſub intermedijs comprehenſo; eſt vero rectangulum B I æquale rectangulo D I cum comprahendantur ab hyper-* 12. lib. 2. *bole D B, & aſymptotis H I G; ergo rectangulum C E I æquale eſt rectangulo B H I; & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E (propter ſimilitudinem triangulorum B H M, C E M) eandem proportionem habebit, quàm E I ad I H, & componendo eadem H E ad H I, atque ad E M eandem proportionem habebit; & ideo H I ſeu ei æqualis N G æqualis erit E M, quare eadem L F ad N G, atque ad E M eandem proportionem habebit: ſed propter ſimilitudinem triangulorum L C F, M C E eſt F C ad E C, vt F L ad M E, ſeu ad N G, & erat C E ad E F, necnon D G ad G F in eadem propor-* Lem. 1. *tione lateris tranſuerſi ad rectum, & ſumma terminorum ad antecedentes terminos, ſcilicet F C ad E C, necnon F D ad D G eandem proportionem habent; quare L F ad N G eandem proportionem habet, quàm F D ad D G, & compa-* Lem. 3. *rando homologorum differentias L D ad D N eandem proportionem habebit, quàm F D ad D G, & comparando conſe-* Lem. 1. *quentes ad differentias terminorum D N ad L N erit, vt D G ad F G, ſcilicet vt latus tranſuerſum ad rectum;* 9. huius. *quapropter B L eſt linea breuiſsima.*

SECTIO DECIMA

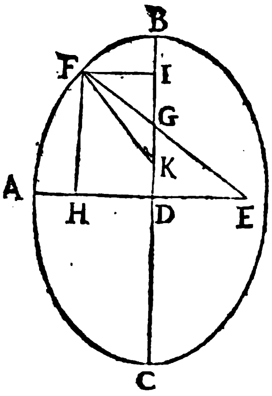
Continens Propoſ. XXXXIV. XXXXV. Apollonij.

a SI ex axe recto ellipſis ſumatur menſura ab origine, quæ ad ſemiaxim rectum non habeat minorem proportionem, quàm habet figura ſuæ tranſuerſæ, tunc quicumque ramus ſecans, ab illa origine ad ſectionem ductus, abſcindit ex axe tranſuerſo ad verticem ſectionis lineam minorem ea, quàm abſcindit linea breuiſsima egrediens ab eius termino in ſectione poſito ad tranſuerſum axim; ſi vero fuerit proportio ad ſemirectum minor, tunc ramorum ſecantium vnus eſt breuiſecans; reliqui vero, qui ſequuntur extremum tranſuerſæ habent proprietates ſuperius expoſitas, & qui ſequuntur extremitatem recti, ſecant ex tranſuerſa lineam maiorem ea, quàm abſcindit breuiſsima egrediens ab eius termino.

PROPOSITIO XXXXIV.

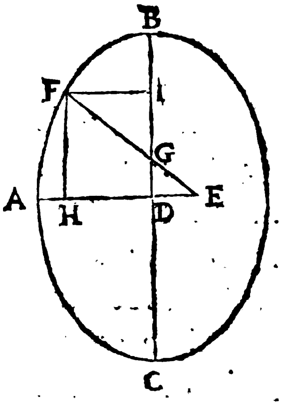
b Sit A D dimidium axis recti, & minoris ſectionis ellipticæ A B C, & meuſura A E, quæ ſit maior, quàm A D, & proportio illius ad iſtam non ſit minor proportione figuræ ſectionis; Dico, quod linea breuiſsima egrediens ab extremitate cuiuſcumque rami ſecantis educti ex E ad ſectionem A B C, ſecat ex tranuerſa B C cum vertice B, vel C lineam maiorem ea, quàm abſcindit ille ramus.

c Ponatur ramus E F, & ducamus ex F ad vtrumque axim duas perpendiculares F H, F I. Et quia proportio E A ad A D non eſt minor proportione figuræ, ſed minor eſt, quàm E H ad H D, nempe E F ad F G, ſeu D I ad I G, erit proportio figuræ minor, quàm D I ad I G, & ponamus D I ad I K, vt eſt proportio figuræ, & iungamus F K; erit ergo F K linea breuiſſima (10. ex 5.) & iam ſecat K B maiorem, quàm B G, & G F non erit breuiſſima; & hoc erat propoſitum.



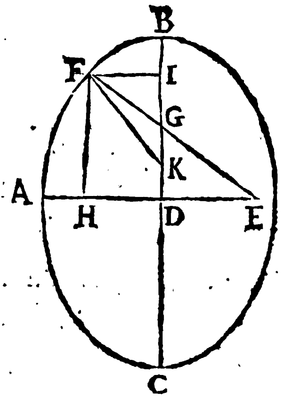
10. huius.

PROPOSITIO XXXXV.



a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, ponamus E H ad H D in proportione figuræ, & producamus perpendicularem H F, & iungamus F E, & ducamus perpendicularem F I. Et quoniam E H ad H D, nempe D I ad I G eſt, vt proportio figuræ, erit F G linea breuiſſima (10. ex 5.) b Et quoniam iam educti ſunt ex E duo breuiſecantes F E, & E A (11. ex 5.) tunc à terminis ramorum egredientium ex E, qui terminantur ad ſectionem B F, linea breuiſſima egrediens erit remotior ab ipſo B, & qui terminatur ad ſectionem A F, breuiſſima egrediens ab extremitate illius erit proximior, ipſi B (51. 52. ex 5.) & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſ. XXXXIV.



PVto, numeros 53. & 54. Propoſitionum huius ſectionis mendoſos eſſe, nam Propoſitio 53. poſita fuit in præmiſſa ſectione, & Propoſitio 54. inferius appoſita reperitur; Cenſeo igitur, eſſe Propoſitiones XXXXIV. & XXXXV.

a Si ex axe recto ellipſis ſumatur menſura, &c. *Hoc eſt ſi ex axe minori, recto ellipſis ſumatur menſura, quæ habeat non minorem proportionem ad ſemiaxim rectum, quàm habet axis tranſuerſus ad ſuum latus rectum, quilibet ramus ſecans, ab origine ad ſectionem ductus, abſcindit ex axe tranſuerſo ad verticem ſectionis minorem lineam, quàm ſecat linea breuiſſima ab eius termino ad axim tranſuerſum ducta. Si vero menſura ad minorem ſemiaxim rectum proportionem minorem habuerit, quàm latus tranſuerſum ad rectum, tunc vnicus ramus erit breuiſecans; reliqui vero ſequentes terminum tranſuerſi, habent ſuperius expoſitas proprietates, & ſequentes extremitates axis recti, ſecant ex tranſuerſa maiorem lineam, quàm ſecet breuiſſima ab eius termino ad axim tranſuerſum ducta. Quod autem menſura neceſſario ſumi debeat in axe minori ellipſis patet, nàm ex hypotheſi rami ſunt ſecantes non quidem ex concurſu, ſed ex origine ducti igitur origo cadit infra centrum, & menſura maior erit medietate axis vt in textu habetur; debet autem habere menſura ad ſemiaxim rectum maiorem aut eandem proportionem, quàm axis tranſuerſus habet ad eius latus rectum, ergo proportio axis tranſuerſi ad ſuum latus rectum erit maioris inæqualitatis, & propterea tranſuerſus axis erit maior quàm axis rectus.*

Sit

b Sit A D dimidium axis recti ſectionis ellipticæ A B C, &c. *Sit A D dimidium axis minoris, & recti ellipſis A B C, ſitque menſura A E maior, quàm A D, & E A ad A D habeat maiorem, aut eandem proportionem, quàm habet latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus.*

c Ponatur ramus E F, & producamus ex F, &c. *Ducatur quilibet ramus ſecans E F, & ex F ad vtrumque axim perpendiculares F H, F I, quæ ſecent eos in H, & I. Et quia D H minor eſt, quàm D A, habebit eadem E D ad D H maiorem proportionem, quàm ad D A, & componendo E H ad H D, maiorem proportionem habebit, quàm E A ad A D; eſt vero E F ad F G, vt E H ad H D (propter parallelas D G, H F) nec non D I ad I G eſt, vt E F ad F G (propter parallelas E D, I F) ergo D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm E A ad A D: habebat autem E A ad A D maiorem, aut eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus; igitur D I ad I G maiorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus: fiat iam D I ad I K, vt latus tranſuerſum B C ad eius latus rectum, iungaturque F K, erit I K maior, quàm I G, & F K linea breuiſſima, quæ ſecat ſegmentum axis K B maius, quàm B G, vnde E F non erit breuiſcans.* 10. huius.

Notæ in Propoſ. XLV.

a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, &c. *Habeat E A ad A D minorē proportionem, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus, & fiat E H ad H D, vt latus tranſuerſum ad rectum; habebit E H ad H D maiorem proportionem, quàm E A ad A D, & diuidendo eadem E D ad D H habebit maiorem proportionem, quàm ad D A; & propterea D H minor erit, quàm D A; vnde ex puncto H ſi eleuetur H F perpendicularis ad D A intra ſectionem cadet, & ſecabit eam alicubi, vt in F: ducatur poſtea ex F recta F E, quæ ſecet axim in G, & F I perpendicularis ad axim B C eum ſecans in I. Et quoniam, propter parallelas G D, F H, eſt E F ad F G, vt E H ad H D, pariterque, propter parallelas E D, I F, eſt D I ad I G, vt E F ad F G, quare D I ad I G eandem proportionem habet, quàm E H ad H D, ſeu quàm latus tranſuerſum B C ad eius latus rectum; & propterea F G eſt breuiſſima.* 10. huius.

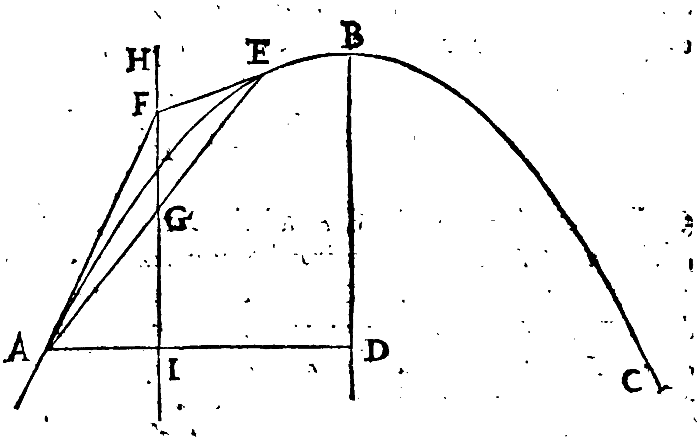
b Et quoniam iam eductæ ſunt ex E duæ breuiſecantes, &c. *Textus Arabicus vſque ad finem propoſitionis eſt omnino corruptus, cum ſupponat propoſitionem non demonſtratam, vt in propoſitione 56. notaui; Itaque, ſic eum reſtitui poſſe cenſeo. Quoniam ex conſurſu E breuiſſima F G, & ſemiaxis recti minoris D A rami educti ad ſectionem F A ſecant axis ſegmenta vſque ad verticem B maiora, quàm abſcindant breuiſſima ab eorum terminis ad axim ducta, ſcilicet breuiſſima cadunt ſupra ramos (ex Lemmate 8. præmiſſo) ſimiliter rami ex concurſu E ad ſectionem B F ducti cadunt ſupra breuiſſimas ab eorum terminis ad axim extenſas (ex eodem Lemmate 8.) & hoc erat oſtendendum.*

SECTIO VNDECIMA

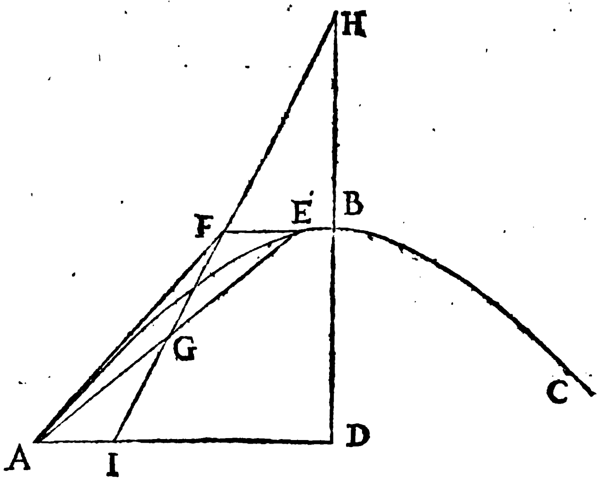
Continens Propoſ. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI. Apollonij.

PROPOSITIO LXVIII. LXIX.

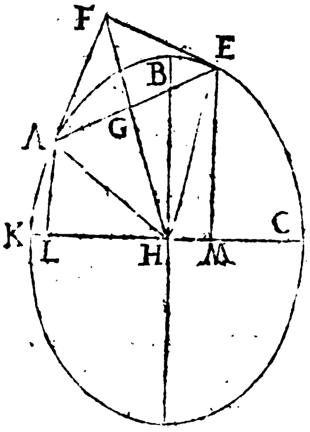
SI occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, vt ſunt A F, E F, vtique quod abſcinditur ex tangente proximiori vertici ſectionis, qui eſt B minus eſt ſegmento abſciſſo ex alia, nempe E F minor eſt, quàm A F. a



b Iuncta enim A E, & in parabola ex F producta linea F I parallela axi B D erit illa diameter, bifariam ſecans E A in 30. lib. 2. G (34. ex 2.) Similiter ex centro H producamus H F G, quæ eſt quoque diameter Ibidem. (34. ex 2.) bifariam ſecans E A in G, & ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim D B. Ergo angulus A I G in parabola eſt rectus, & in hyperbola obtuſus; ergo F G A erit obtuſus in illis omnibus; quare maior eſt, quàm angulus F G E, & A G æqualis eſt ipſi G E, & F G communis; igitur E F minor eſt, quàm F A.



PROPOSITIO LXX.



Poſtea in ellipſi iungamus E H, A H, & C ſit extremitas axis recti; erit A H minor c quàm E H (11. ex 5.) & angulus E G H, nempe A G F maior erit, quàm A G H, ſeu E G F, ergo E F minor eſt, quàm F A, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO LXXI.

d Patet ex hoc, quod ſi producantur ex duobus punctis contactus in ellipſi perpendiculares E M, A L, & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate minor quoque eſt, quemadmodum demonſtrauimus, & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI.

a Si occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, aut circulo, vt ſunt, &c. *Ideſt ſi coniſectionem A B C contingant duæ rectæ A F, E F in punctis A, & E concurrentes in F, erit portio tangentis inter occurſum, & contactum vertici B proximiorem intercepta, minor ea, quæ inter occurſum, & remotiorem à vertice contactum continetur: oportet autem in ellipſi B verticem eſſe axis maioris. Expungo verba*, aut circulo, *tanquam erronea, & incaute ab aliquo textui ſuperaddita. Circulum enim tangentes ab eodem puncto ductæ inæquales eſſe nequeunt.*

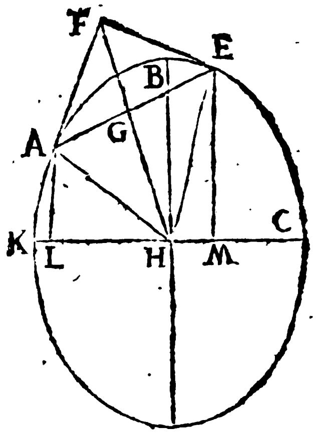
b Et ducamus A D in parabola, & hyperbola, &c. *Et ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim B D, ſecantem eum in D; atque G F H in I; cumque in parabola diameter F G I ſit parallela axi B D, erit angulus A I G rectus æqualis interno, & oppoſito ad eaſdem partes, angulo D; in hyperbola vero cum triangulum H D I ſit rectangulum in D, erit externus A I G obtuſus, eſtque in triangulo G I A angulus externus A G F maior interno, & oppoſito A I G, recto in parabola, & obtuſo in hyperbola; erit quoque angulus F G A obtuſus in parabola, & hyperbola.*

c Et angulus E G H, &c. *Quia F H eſt diameter ſecans bifariam E A in G; ergo triangula E G H, & A G H habent duo latera æqualia E G, A G, & G H, commune; eſtque H E, vertici B axis maioris ellipſis propinquior, maior remotiore H A; ergo angulus E G H maior erit angulo A G H; eſtque angulus A G F æqualis E G H maiori, & E G F æqualis minori A G H; igitur angulus A G F maior eſt angulo E G F, & latera circa inæquales angulos ſunt æqualia ſingula ſingulis, ergo tangens A F maior eſt, quàm E F.*

30. ex 2. Com.

11. huius.

Patet

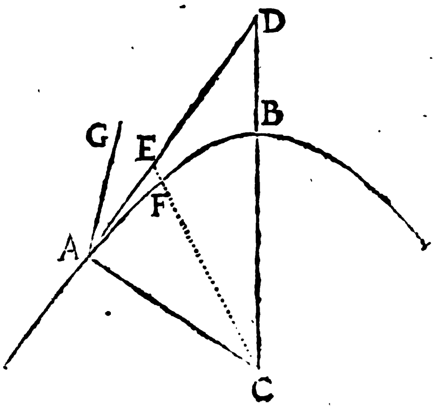


Patet ex hoc, quod ſi producantur ex duobus punctis contactus in ellipſi perpendiculares E M, A L; & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate, quæ eſt in ſectione, minor quoque eſt, &c. *Si enim ex punctis E, A contactuum in ellipſi ducantur ad axim minorem K C perpendiculares E M, & A L ſecantes eum in M, & L, fueritque E M minor, quàm A L, tunc quidem punctum E magis recedit à vertice B axis maioris, quàm punctum A; & propterea, ex præmiſſa 70. huius libri, erit tangens E F minor, quàm A F. Expungo determinationem ab aliquo incaute additam* (quæ eſt in ſectione) *manifeſtum enim eſt duci non poſſe contingentem ellipſim à perpendicularis termino M in axi minori poſito, ſed à termino E in ſectionis peripheria conſtituto.* d

SECTIO DVODECIMA

Continens XXIX. XXX. XXXI. Propoſ. Appollonij.

QVælibet linea recta A E D tangens ſectionem aliquam A F B in A extremitate lineæ breuiſſimæ A C eſt perpeudicularis ſuper illam, nēpe D A C eſt angulus rectus. Et ſi fuerit perpendicularis ſuper illam vtique tanget ſectionem.



a Alioquin producatur perpendicularis C E ſuper A D, erit A C maior, quàm E C, ergo maior eſt, quàm F C; ſed eſt minor, cũ ſit minor, quàm C F, quod eſt abſurdum. Igitur angulus D A C, eſt rectus, quod erat oſtendendum.

b Si verò fuerit D A C rectus, erit A D tangens, alioquin ſit tangens A G; ergo C A G erit rectus, ſed erat C A D rectus, quod eſt abſurdum; ergo A D eſt tangens, & hoc erat probandum.

Notæ

Notæ in Propoſit. XXIX. XXX. & XXXI.

a ALioquin producatur perpendicularis C E, &c. *Exiſtente C A linea breuiſsima, & A D tangente, ſi C A non eſt perpendicularis ad tangentem ducatur ex origine C recta C E perpendicularis ad tangentem A D, ſecans eam in E, & ſectionem in F, erit in triangulo A C E angulus C A E acutus, & minor angulo recto E, & propterea C A ſubtendens maiorem angulum rectum, maior erit quàm C E, quæ acutum ſubtendit: cumque punctum E tangentis cadat extra ſectionem, erit C F minor, quàm C E; ideoque C A multo maior eſt, quàm C F, quapropter C A non erit breuiſsima, quod eſt contra hypotheſin.*

b Si vero fuerit D A C rectus, &c. *Quia C A ſupponitur breuiſsima, & angulus D A C rectus, erit A D tangens; nam ſi hoc verum non eſt, ducatur ex puncto A recta linea A G, contingens ſectionem in A; ſecabit vtique tangens A G ipſam D A, & erit angulus C A G rectus nimirum contentus à breuiſsima C A, & tangente A G, ex proxime demonſtrata propoſitione; ergo duo anguli recti C A D, & C A G æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt abſurdum.* 33. 34. lib. 2.

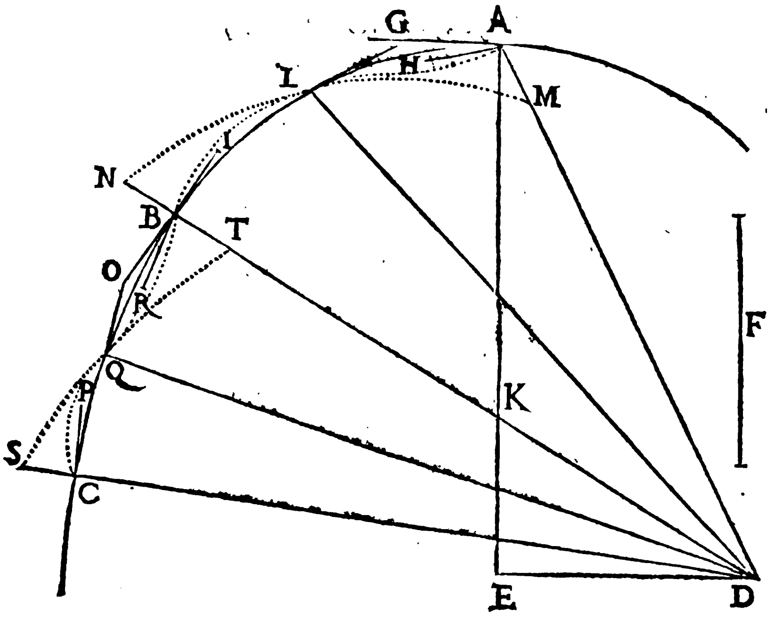
SECTIO DECIMATERTIA

Continens Propoſ. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. & LXXII. Apollonij.

PROPOSITIO LXIV. LXV.

SI ramorum ſecantium D C, D B, D A eductorum ex concurſu D ad ſectionem C A non fuerint duo breuiſecantes, vtique minimus eorum eſt, ramus terminatus D A, qui ambit cum axe A E angulum acutum; nempe D A E, & reliquorum propinquior illi minor eſt remotiore, ſcilicet D B maior, eſt quàm D A, & D C quàm D B.

Si vero inter illos fuerint duo breuiſecantes tunc vicinior vertici ſectionis eſt maximus ramorum, & maiori proximior, eſt maior, & minori propinquior eſt minor.



a Producamus perpendicularem D E ſuper axim E A, & reperiatur Trutina F. Et primo loco nullus ramus ſit breuiſecans, iam ſi D B, non eſt maior, quàm D A, ſit æqualis illi, & ducamus duas perpendiculares

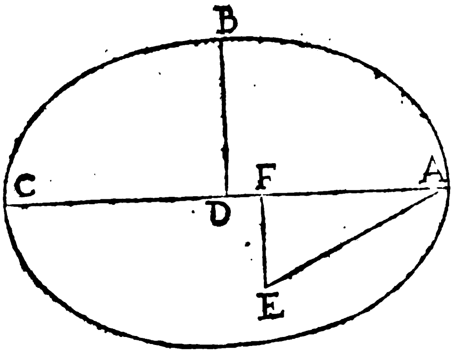
A G,

A G, A H ſuper E A, & D A. Et quia A G tangit ſectionem, cadet
A H intra ſectionem, & ducamus rectam B I tangentem ſectionem in 33. 34.
b B. Quoniam ex D non educitur ad ſectionem A C vllus breuiſecans, lib. 1.
erit E A non maior dimidio erecti (49. 50. ex 5.) aut erit D E maior
quàm F (52. ex 5.) Iis poſitis vtique linea breuiſſima ex B educta abſcindit cum A ex axi lineam maiorem, quàm A K (49. 50. 51. 52. ex 5.)
verùm linea breuiſſima continet cum tangente B I angulum rectum (29.
c 30. ex 5.) igitur D B I eſt acutus, quare ſi centro D, interuallo D B circulus deſcribatur, tunc B I cadit intra circulum, & A H cadit extra id
d ipſum, quia eſt perpendicularis ad D A; igitur circulus ſecat coniſectionem; ſecet eam in L, & iungamus L D, ducamuſque L G ſectionem 33. 34.
e tangentem. Patet (vt dictũ eſt) quod D L G ſit acutus; ergo L G cadit lib. 1.
intra circulum B L A, ſed cadit extra, quod eſt abſurdum; ergo B D
non eſt æqualis ipſi A D. Neque minor illo eſſe poteſt; quia ſi ſecetur
D M maior, quàm D B, & minor, quàm D A, & centro D, interuallo
D M, circulus M L N deſcribatur, tunc D N, nempe D M maior eſt,
f quàm D B, & propterea circulus N L M ſecat coniſectionem. Subinde
patebit (quemadmodũ demoſtrauimus) quod D B non ſit minor, quàm
D A; igitur D B maior eſt, quàm D A.

g Poſtea dico, quod D C maior eſt, quàm D B; quia demonſtrauimus, angulũ D B O eſſe obtuſum, & patet, quod D C P eſt acutus, & procedendo trito iam itinere demonſtrabimus, quod Q O neceſſe eſt, vt cadat intra circulum C Q B. Et quod ſi fuerit D C minor, quàm D B, aut æqualis, neceſſe eſt, vt Q O cadat intra circulum C Q B; ſed cecidit extra, quod eſt abſurdum; igitur D C maior eſt, quàm D B, & D B maior, quàm D A, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXVI.

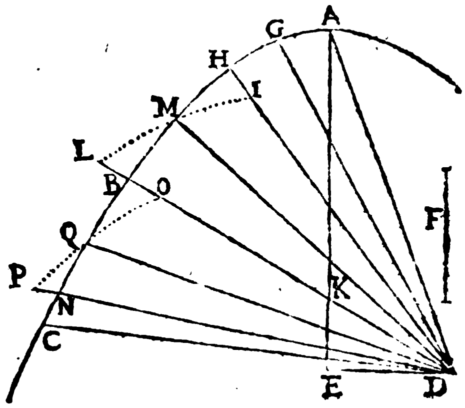
IN ſectione elliptica A B C, cuius axis maior A C eius centrum D, & D B dimidium recti, duci nequeat ex E ad quadrantem A B breuiſecans, & producatur perpendicularis E F; Dico punctum F cadere inter D A.



a Quia ſi caderet inter C, D duci poſſet ex E ad ſectionem A B
b aliqua breuiſecans (56. ex 5.) quod eſt contra ſuppoſitionem. Deinde
patet, quemadmodum demonſtrauimus in parabola, & hyperbola, quod pr. 64. 65.
E A minima ſit linearum, & ramorum ad ſectionem B A cadentium, & huius.
propinquior illi, minor ſit remotiore, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO LXVII.

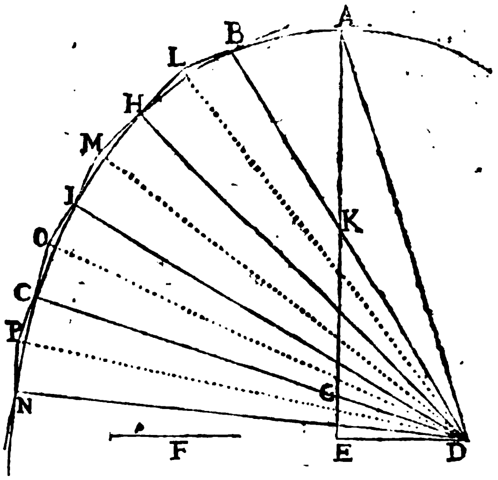
POſtea repetamus figuras, paraboles, & hyperboles, & a
quoquot ſunt illius ſigna, & ſupponamus quod ipſius D B
portio B K, ſit tantummodo linea breuiſſima; Dico, quod D A
quoque minima eſt linearum egredientium ex D ad ſectionem
A C, & illi propinquiores ſunt minores remotioribus. b



Quia educitur ex D vnus tantum c
breuiſecans erit menſura E A maior
dimidio erecti, & D E æqualis F
Trutinæ (51. 52. ex 5.) vnde ſequitur,
quod lineæ breuiſſimæ eductæ
ab extremitatibus reliquorum ramorum
abſcindunt cum A ab axi lineas
maiores, quàm ſecant illi rami.
Ducamus prius ad ſectionem B A
ramum D G, inde conſtat D G maiorem
eſſe, quàm D A (64. 65. ex d
5.) Dico iam, quod D B maior eſt
illa, alioquin eſſet æqualis, vel minor
illa, & producamus D H ad ſectionem B G; ergo D H maior eſt,
quàm D G, quia remotior eſt ab D A (64. 65. ex 5.) quare maior eſt,
quàm D B, & ex illo ſecetur D I maior, quàm D B, & minor, quàm
D H, & centro D interuallo D I deſcriptus circulus ſecabit ſectionem
B G, ſecet eam in M, & iungamus D M; ergo D M, nempe D I, quæ e
conceſſa fuit maior, quàm D B eſt etiam maior, quàm D H, propterea
quod eſt remotior ab D A, quàm D H (64. ex 5.) igitur D I maior eſt
quàm D H, quod eſt abſurdum; quare D B maior eſt, quàm D H.

Patet etiam, quod D B minor ſit, quàm D C, alioquin eſſet vel illi f
æqualis, aut maior, & ducamus D N ad ſectionem C B; ergo D N minor
eſt, quàm D C, eò quod proximior eſt D A (64. ex 5.) quare minor
eſt, quàm D B, & ſecetur D O ex D B maior, quàm D N, & minor
quàm D B, & centro D, interuallo D O circulus deſcriptus ſecabit g
ſectionem exempli gratia, in Q, & iungamus D Q; igitur D Q minor eſt
quàm D N, ſed eſt æqualis D O, quæ ſuppoſita fuit maior, quàm D N,
ergo D Q maior eſt, quàm D N; verum eſt minor illo, quod eſt abſurdum;
igitur D C non eſt minor D B, neque æqualis; quare maior illa
eſt. Atque ſic patet, quod D B minor ſit omnibus lineis egredientibus
ex D ad ſectionem B C, & illi proximiores ex illa parte, minores ſunt
remotioribus. Quapropter manifeſtum eſt, quod D A ſit minimus omnium
ramorum egredientium ex D ad ſectionem A B C, & reliqui proximiores
illi, minores ſunt remotioribus, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXII.



SI eductæ fuerint ex D duæ breuiſecantes D C, D B, quorum ſegmenta G C, B K ſint breuiſſima, & D B propinquior ſit vertici ſectionis; Dico, quod D B maximus eſt ramorum
a egredientium ad ſectionem A B C, & minimus eorũ D C, & ramorum egredientiũ ad ſectionem A C, qui D B propinquiores maiores ſunt remotioribus, & propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus.

Sit F Trutina, & quia iam ducti ſunt ex D duo breuiſecantes, ideo E A excedit dimidium erecti, & D E minor eſt, quàm F (51. 52. ex 5.) his poſitis, vtique lineæ breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus ramorum qui ſunt in ſectione B C abſcindunt ab axi E A minores lineas, quàm abſcindunt rami (51. 52. ex 5.) & qui ducuntur ab extremitatibus egredientium ad reliquas ſectiones abſcindunt lineas maiores. Educamus itaque ramos D H, D I ad ſectionem B C, & ducamus B L, L H M, & I
M tangentes ſectionem in punctis B, H, I; quia B K eſt breuiſsima erit 29. 30.
L B D angulus rectus, & quia breuiſſima egrediens ex H abſcindit cum huius.
A ab axi E A lineam minorem, quàm ſecat D H erit L H D obtuſus, & Ex 29. 30.
iungamus D L; igitur duo quadrata D H, H L minora ſunt, quàm quadratum huius.
D L, quod eſt æquale duobus quadratis L B, D B; verum L B
minor eſt, quàm H L (68. ex 5.) ergo D B maior eſt, quàm D H: atq;
b ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, quia D H M eſt acutus, & D Ibidem.
I M obtuſus: & D I maior ſit, quàm D C. Quare B D maximus eſt ramorum
c egredientium ad B C, & iam demonſtratum eſt, quod ſit maximus ramorum egredientium ad B A (64. 65. ex 5.)

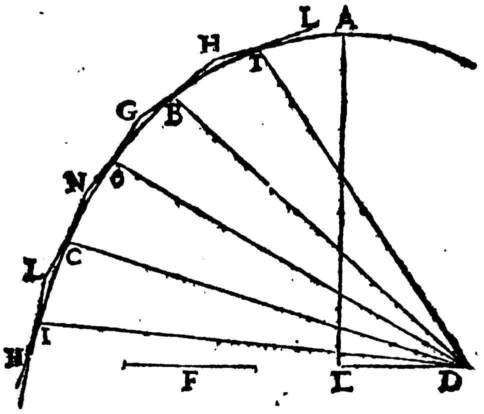
Ponamus poſtea N extra ſectionem B C, & iungamus D N, itaque
linea breuiſſima egrediens ex N abſcindit ab axi E A maiorem lineam, 51. 52.
d quàm ſecat D N; ergo tangens in N continet cum D N angulum acutum: huius.
poſtea oſtendetur, quemadmodum hic dictum eſt, quod D C minimus Ex 29. 30. huius.
ſit reliquorum ramorum egredientium ad reliquas ſectiones, & ſit minimus ramorum egredientium ad A C, quare manifeſtum eſt, quod D B ſit maximus ramorum, & D C minimus, & quod maioribus propinquiores ſunt maiores remotioribus, & minoribus propinquiores, minores ſunt remotioribus, quod erat oſtendendum.

MONITVM.

ANtequam huius Decimætertiæ Sectionis explicationes, atque emendationes aggrediamur, vt Notæ breuiores, clarioreſque reddentatur, & teſtus Arabici menda facilius corrigi poſſent, operæ pretium duximus (amice lector) Lemmata ſequentia præmittere.

LEMMA IX.

Si ad coniſectionem, atque ad vnum quadrantem ellipſis A B C à concurſu D nullus ramus duci poſsit, qui ſit breuiſecans; Dico, quod quilibet ſecans ramus D B cum tangente H B G per eius terminum B ducta efficit angulum D B H ad partes verticis A acutum, & D B G, qui deinceps eſt, obtuſum.



Quoniam nullus ramus ex concurſu D ad ſectionem A C ductus eſt breuiſecans, erit (ex conuerſa propoſitionis 49. 50. 51. 52. huius) menſura A E aut non maior ſemiſſe lateris recti, aut perpendicularis D E maior Trutina, quæ ſit F. & ideo quilibet ramus ſecans D B cadit ſupra breuiſsimam ex puncto B ad axim ductam, eſt verò breuiſsima ex puncto B ad axim ducta 29. 30. huius *perpendicularis ad G B H tangentem ſectionem in B; ergo angulus D B H, verticem A reſpiciens eſt acutus, & qui deinceps eſt D B G erit obtuſus.*

LEMMA X.

Iiſdem poſitis, ſi à concurſu D vnicus tantum ramus D B breuiſecans ad ſectionem A B duci poteſt; Dico, quod quilibet alius ramus ſecans D I ſupra, vel infra breuiſecantem D B poſitus efficit cum recta L I H tangente ſectionem in I angulum D I L, verticem reſpicientem, acutum, & D I H, qui deinceps eſt, obtuſum.

Nam ex conuerſa propoſitione 51. & 52. huius perpendicularis D E æqualis erit Trutinæ F, & ideo quilibet ramus D I poſitus ſupra, vel infra breuiſecantẽ

(qui

(qui eſt D B) cadit ſupra breuiſsimam ex puncto I ad axim ductam, quæ perpendicularis eſt ad tangentem L I H, & propterea angulus D I L, verticem A reſpiciens erit acutus, & conſequens angulus D I H obtuſus. 51. 52. huius. 29. 30. huius.

LEMMA XI.

Iiſdem poſitis, ſi à concurſu D duo breuiſecantes D C, D B ad ſectionem A B duci poſſunt; Dico, quod quilibet ramus ſecans D I poſitus ſupra breuiſecantem D B vertici proximiorem, vel infra infimum breuiſecantem D C, efficit cum recta L I H tangente ſectionem in I angulum D I L, reſpicientem verticem A, acutum, & conſequentem D I H obtuſum, & quilibet ramus D O inter breuiſecantes poſitus efficit cum recta G O N ſectionem tangente in O angulum D O G verticem reſpicientem obtuſum, conſequentem vero D O N acutum.

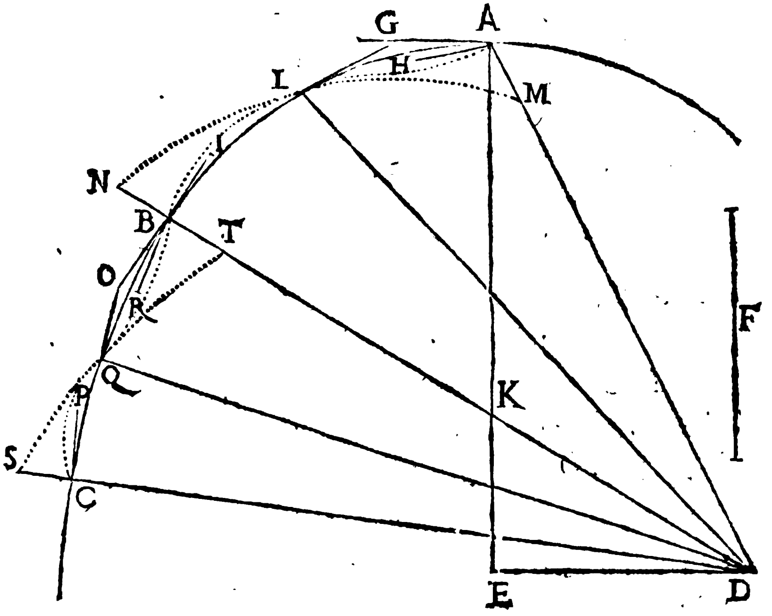
Quia (ex conuerſa propoſitione 51. & 52. huius) perpendicularis D E minor eſſe debet Trutina F, & propterea quilibet ramus D I ſupra breuiſecantem D B, vel infra breuiſecãtem D C cadit ſupra breuiſsimam ex puncto I ad axim ductam, cum qua contingens L I angulum rectum conſtituit; ergo angulus D I L verticem reſpiciens, eſt acutus, & conſequens D I H obtuſus; Similiter quilibet ramus D O inter breuiſecantes poſitus cadit infra breuiſsimam ex puncto O ad axim ductam, & cum illa ſectionem contingens G O efficit angulos rectos, igitur angulus D O G verticem reſpiciens, eſt obtuſus, & conſequens D O N acutus. 51. 52. huius. 29 30. huius. Ibidem.

Notæ in Propoſ. LXIV. & LXV.

ANtea Apollonius docuit qui nam rami ab origine ad coniſectionem ducti eſſent minimi, & quo ordine reliqui rami ſe ſe excederent, modò agit de ramis axim ſecantibus à concurſu ductis, & quærit qui minimus, & qui maximus ſit, & quo ordine diſponantur.

a Producamus perpendicularem D E ſuper axim, &c. *Si nullus ramus breuiſecans à concurſu D ad ſectionem A C duci poteſt; Dico, quod ramus terminatus D A eſt minimus omnium ramorum ſecantium D B, D C, & propinquiores vertici A minores ſunt remotioribus; ducatur D E perpendicularis ad axim eum ſecans in E, & reperiatur Trutina F. Et ſiquidem D A non eſt minor quolibet alio ramo ſecante D B infra ipſum poſito erit æqualis, aut maior illo; ſitque prius D A æqualis D B, ſi fieri poteſt, & ex puncto A verticis ducatur A G perpendicularis ad axim A E, quæ continget ſectionem in A, pariterque ducatur recta A H perpendicularis ad ramum A D inclinatum ad axim;* 17. lib. 1. 32. pr.

& quia



& quia A H cadit infra A G ad partes axis cum D A; ad quam illa perpendicularis eſt, extendatur vltra axim A E, nec poſsit inter tangentem A G, & ſectionem conicam A B, aliqua recta linea intercipi; igitur A H cadit intra coniſectionem, & angulus E A H eſt acutus.

Quoniam ex D non educitur ad ſectionem A C vllus breuiſecans, &c. *Sequitur quidem ex hac hypotheſi, quod menſura E A non ſit maior ſemirecto* b
Ex 49. 50. huius. *aut ſi maior eſt, ſit quoque perpendicularis D E maior Trutina F, ex conuerſa propoſitione* 51. 52. *huius per deductionem ad inconueniens.*

Quare ſi centro D interuallo D B, &c. *Circulus enim B I L H A radio D B deſcriptus tranſibit per verticem A cum radius D B poſitus ſit æqualis D A, cumque angulus D B I ſit acutus, ex Lemmate nono, cadet neceſſario B I intra circulum B I L.* c

Igitur circulus ſecat coniſectionem, &c. *Quia B I cadit extra coniſectionem, quàm tangit, & intra circulum B L A, vt dictum eſt, è contra recta A H cadit intra eandem coniſectionem, & extra ipſum circulum, quem tangit, cum H A perpendicularis ſit ad circuli radium D A; igitur circulus B I L A fertur extra coniſectionem ad partes B I, & intra eandem ad partes A H; quare neceſſario coniſectionem ſecat.* d

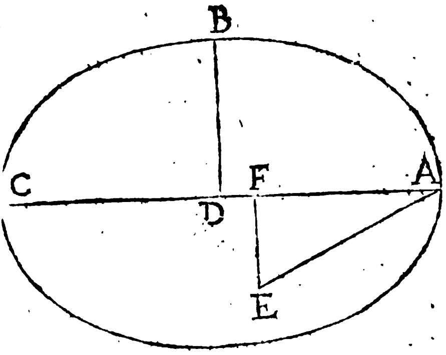
Patet, vt dictum eſt, quod D L G ſit acutus, &c. *Hoc enim ſequitur ex nono Lemmate præmiſſo, reſpicit enim angulus D L G verticem A; & ideo eſt acutus, & cadit neceſſario recta L G intra circulum B L A radio D L deſcriptum ad partes L A; & portio circuli L H A cadit intra coniſectionem L A; igitur recta L G cadit intra coniſectionem L A, ſed cadit extra eandem ſectionem, cum contingat eam in L, quod eſt abſurdum.* e
35. 36. lib. 1.

Deinde

f Deinde patebit, quemadmodum demonſtrauimus, &c. *Quia D M facta eſt maior, quàm D B, & minor quàm D A, eſtque circuli radius D N æqualis D M; ergo punctum M cadit intra coniſectionem, N vero extra ipſam; & propterea circulus M L N ſectionem conicam ſecabit alicubi, vt in L, & portio circuli M L intra coniſectionem A L incidet: rurſus ducatur radius D L, & L G coniſectionem tangens in L erit, vt priùs angulus D L G acutus;* 33. 34. lib. 1. *& ideo L G cadit intra circulum L M, & propterea intra coniſectionem A L, ſed eadem L G cadit extra ipſam, quia eam contingit in L, quod eſt abſurdum; quare ramus D A non eſt maior, quàm D B; ſed priùs neque illi æqualis erat; igitur ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo ſecante D B infra ipſum poſito, & propterea minimus erit omnium ſecantium.*

g Poſtea dico, quod D C maior eſt, quàm D B, &c. *Demonſtratio ſecundæ partis huius propoſitionis, quàm Apollonius innuit (quia conſtructione, ac progreſſu ſimili ſuperiori perfici poteſt) hac ratione reſtituitur. Demonſtrandum eſt quemlibet ramum D B vertici A proximiorem eſſe minorem quolibet ramo D C remotiore. Ducantur recta C P contingens ſectionem in C, & O B tangens ſectionem in B, & recta B R perpendicularis ad ramum D B; & ſi quidem ramus D C non concedatur maior, quàm D B, ſit primo ei æqualis, ſi fieri poteſt, & centro D interuallo D C deſcribatur circulus C P R, qui tranſibit per punctum B, ob æqualitatem radiorum D C, D B; & quia (ex Lemmate nono) angulus D C P verticem reſpiciens, eſt acutus, recta C P cadet intra circulum C P R; ſed cadit extra coniſectionem, cum ſit contingens; igitur portio circularis peripheriæ C P ducitur extra coniſectionem C Q B: rurſus, quia angulus D B O eſt obtuſus (ex nono Lemmate, cum verticem A non reſpiciat) ergo R B perpendicularis ad D B cadit intra coniſectionẽ, cum B O poſita ſit eã contingens: cadit verò eadem B R extra circulum B R Q, cum ſit perpendicularis ad circuli radium D B; igitur circuli portio B R intra coniſectionem cadet: ſed priùs eiuſdem circuli portio C P extra eandem ſectionem ducebatur; igitur idem circulus ſecat coniſectionem alicubi, vt in Q, ducaturque denuo ramus D Q, & Q O contingens ſectionem in Q; Vnde (ex nono Lemmate) angulus D Q O erit acutus;* 33. 34. lib. 1. *& propterea recta Q O intra circuli portionem Q R conſtituta intra coniſectionem cadet, quod eſt abſurdum; recta enim Q O extra coniſectionem Q A cadit, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C æqualis eſt ipſi D B. Sit ſecundò D C minor, quàm D B (ſi fieri poteſt) ſeceturque D T minor quàm D B, ſed maior quàm D C; & centro D interuallo D T deſcribatur circulus T Q S; is quidem ad partes B cadet intra, ad partes vero C extra coniſectionem; & propterea eam alicubi ſecabit, vt in Q; & ducto ramo D Q, & Q O contingente ſectionem in Q, erit angulus D Q O acutus,* Lem. 9. *& ideo recta Q O cadet intra circulum T Q, & propterea intra coniſectionem, quod eſt abſurdum; Q O enim cadit extra ſectionem Q A, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C minor eſt, quàm D B, ſed neque æqualis priùs oſtenſus fuit; igitur quilibet ramus D B vertici A propinquior minor eſt quolibet ramo remotiore D C, quod erat oſtendendum.*

Notæ in Propoſ. LXVI.

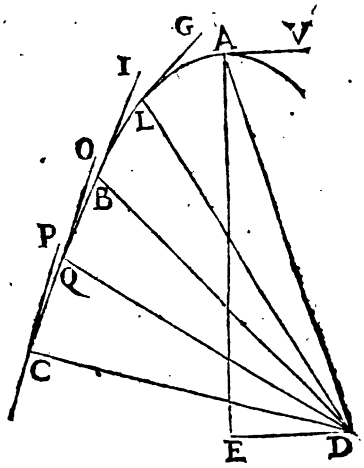


a QVia ſi caderet inter C, D duci poſſet, &c. *Quotieſcumq; enim perpendicularis E F cadit ſuper centrũ D, vel ſecat ſemiaxim D C inter D, & C, tũc ex concurſu E vnicus ramus breuiſecans duci* 45. 56. huius. *poteſt ad ſectionem B A, qui nimirum cadit inter verticem remotiorem A, & axim minorem D B: ſed ex hypotheſi nullus ramus ex concurſu E ad quadrantem ellipſis A B duci poteſt, qui ſit breuiſecans; igitur perpendicularis E F ſecat ſemiaxim A D in puncto F poſito inter A, & D.*

Deinde patet, quemadmodum demonſtrauimus in vtraque hyperbola, &c. *Permuto particulam [vtraque] vt manifeſtè erroneam, legi enim debet in parabola, & hyperbola. Quod vero ramus terminatus E A minimus ſit omnium ramorum ſecantium manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſitionis 64. 65., quæ comprahendit etiam ellipſim, quando menſura F A minor eſt ſemiaxi A D, vt ex propoſitione 52. patet. Et ſimiliter ramorũ ſecantium ex concurſu E ad ſectionem A B ductorum propinquiores vertici A minores ſunt remotioribus ex eadem demonſtratione 64. 65. huius.*

*Ex demonſtratione præmiſſa propoſitionum 64. & 65.
deduci poteſt conſectarium, à quo notæ ſubſequentes breuiores reddantur.*

COROLLARIVM PROPOSIT. LXIV. & LXV.



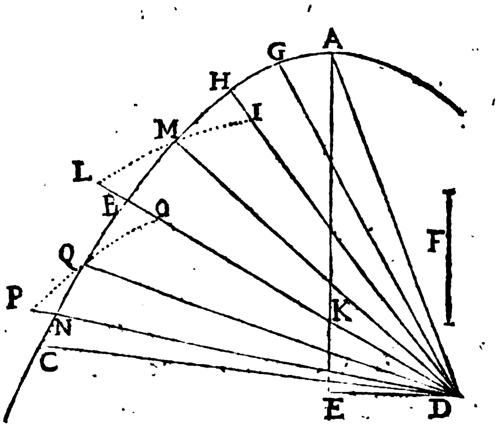
SI in aliqua peripheria cuiuslibet coniſectionis omnes rami ſecantes, qui à concurſu duci poſſunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis conſtituunt angulos, qui verticem reſpiciunt, acutos; rami proximiores vertici ſectionis minores erunt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propoſitionibus 64. & 65., omnes rami D A, D L, D B, D Q, D C, & reliqui omnes, qui duci poſſunt ex concurſu D ad ſectionem A B C efficiunt cum tangentibus ſectionẽ à terminis A, L, B, Q, C angulos, verticem A reſpicientes, acutos, vt

ſunt

ſunt D A V, D L G, D B I, D Q O, D C P, oſtenſus eſt ramus D A minor quàm D B, & D B propinquior vertici A, minor ramo D C remotiore.

Notæ in Propoſ. LXVII.



a POſtea repetamus figuram vtrãque hyperboles, &c. *Lego; Repetamus figuras paraboles, & hyperboles, & ſupponantur denuo eadem lineæ eductæ ex concurſu D ad ſectionem; & perpendicularis D E, atque Trutina F, & omnium ramorum ſecantium vnicus tantummodo D B ſit breuiſecans.*

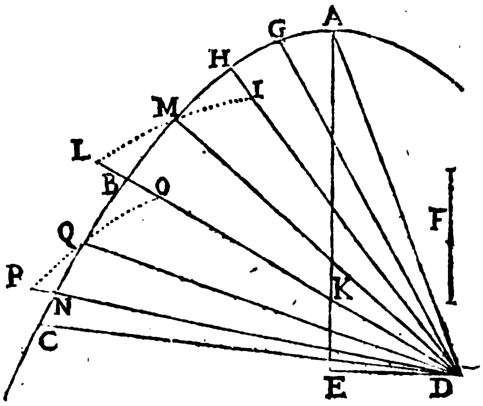
b Et illi propinquiores ſint maiores remotioribus, &c. *Sed mendoſè; legi debet: Et illi propinquiores ſint minores remotioribus.*

c Quia educitur ex D vnus tantum breuiſecans, &c. *Legi debet. Quia educitur ex concurſu D vnus tantum breuiſecans, erit menſura E A maior dimidio erecti, & D E perpendicularis ad axim æqualis erit Trutinæ F.* Conuerſ. 51. 52. huius.

d Inde conſtat D G maiorem eſſe, quàm D A, &c. *Quia ex concurſu D ad ſectionem A C vnicus ramus D B breuiſecans ſupponitur igitur omnes rami cadentes inter A, & B præter infimum D B conſtituunt cum tangentibus ſectionem, ab eorum terminis ductis, angulos reſpicientes verticem A acutos; & propterea ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo D G infra ipſum, & ſupra ramum D B poſito; atque ramus D G minor eſt quolibet alio à vertice remotiore ducto ex D ad peripheriam A B. Dico iam, quod ramus D B maior eſt quolibet ramo D G, poſito infra verticem A, & ſupra breuiſecantem D B; Si enim hoc verum non eſt, erit D B æqualis, aut minor, quàm D G, & tunc ducto quolibet ramo D H ad ſectionem G B infra ramum D G, erit D H remotior à vertice A maior propinquiore D G, & propterea ramus D B adhuc minor erit ramo D H.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. Ibidem.

e Ergo D M nempe D I, &c. *Quia D M, vt remotior à vertice A, eſt maior, quàm propinquior D H eſt vero D L, atque D I æqualis D M cum ſint radij eiuſdem circuli; ergo D I portio maior eſt, quàm totum D H, quod eſt abſurdum; quare D B maior eſt quolibet ramo D G infra verticem A, & ſupra ramum D B poſito; & propterea D B multo maior erit, quàm D A.* Ibidem.

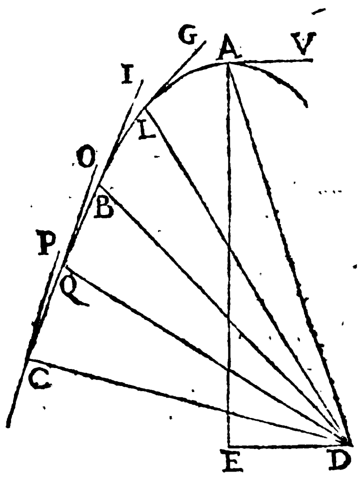
f Ergo D N minor eſt, quàm D C, &c. *Dubitare quis poſſet, an ramus D N, quia propinquior eſt vertici A ſit minor remotiore ramo D C, vt in propoſitione 64. & 65. verificabatur; & ratio eſt, quia hypotheſes ſunt diuerſæ, nam ibi nullus ramus breuiſecans à concurſu D ad ſectionem A C duci poſſe ſupponebatur, in hac vero propoſitione 67. ponitur vnicus breuiſecans D B, at ſcrupulus omnis tolletur, ſi dicatur, non quidem ex propoſitionibus 64. & 65. ſed ex demonſtratione ibi allata, ſeu ex Corollario in fine notarum appoſito,*



propoſitum deduci, nam duo rami D C, & D N poſiti infra ſingularem breuiſecantem D B efficiunt cum rectis tangentibus ſectionẽ angulos verticem reſpicientes acutos; igitur vt in ſecunda parte propoſitionum 64. & 65. demonſtratum eſt, erit ramus D N vertici propinquior minor remotiore ramo D C. Lem. 10.

Et centro D, interuallo D O circulus deſcriptus ſecabit ſectionem exempli gratia in Q (56. ex 5.) & iungamus, &c. *Videtur omnino expungenda citatio in textu appoſita; (56. ex 5.) nam circulum O Q manifeſtum eſt, ſecare coniſectionem alicubi, vt in Q, cum radius D O poſitus ſit minor D B, & maior D N; poſtea, quia D Q propinquior eſt vertici A, quàm D N, & omnes rami à D ad peripheriam ſectionis N Q ducti, efficiunt cum ſuis tangentibus angulos, verticem reſpicientes, acutos; igitur D Q minor eſt, quàm D N, quod eſt abſurdum; poſita enim fuit D O, ſeu ei æqualis D Q, & D P maior, quàm D N.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXVII.

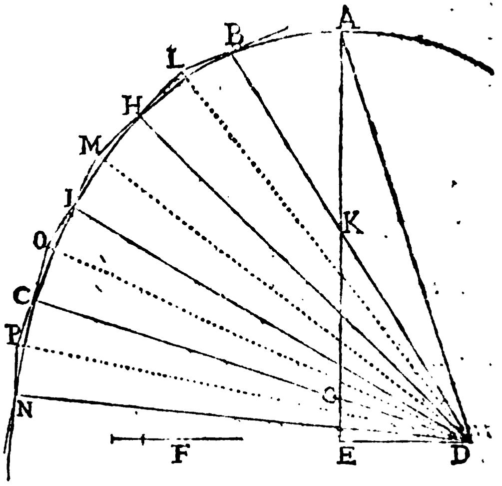


Angulorum à ramis ſecantibus, qui à cõcurſu ad coniſectionem duci poſſunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis cõpræhenſorum, ſi vnus tantum rectus fuerit, reliqui omnes verticem reſpicientes acuti; rami proximiores vertici ſectionis, minores erũt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propoſitione 67. omnes rami D A, D L, D C, & reliqui omnes, qui duci poſſunt ex concurſu D ad ſectionem A B C, cum tangentibus ſectionem à terminis A, L, C compræhenderunt angulos verticem reſpicientes D A V, D L G, D C P acutos, & tantummodo vnus D B I rectus fuit oſtenſus eſt ramus D A minor, quàm D L, & D L vertici A propinquior, minor, quàm D B, atq; D B minor quolibet remotiore D C.

Notæ in Propoſit. LXXII.

a ET minimus eorum D C, &c. *Textus videtur mendoſus ; nam vt inferius oſtendetur, ramus breuiſecans D C à vertice remotior, non ſemper minimus eſt omnium ramorum cadentium ex concurſu D ad ſectionem A B C ; itaque legendum puto ; D C eſt minimus ramorum cadentium ad peripheriam ſectionis B C N ; quod manifeſtè indicatur ex determinatione in fine propoſitionis appoſita ; inquit enim : propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus, vbi conijcitur, Apollonium noluiſſe pronũciare, ramum D C minimum eſſe omnium, qui in ſectione A C N duci poſſunt, neque propinquiores D C minores eſſe quolibet remotiori ad partes verticis A conſtituto, ſed tantummodo eorum, qui in ſectione C B, & in inferiori C N ducuntur minimum eſſe D C, & ei propinquiores minores eſſe remotioribus.*



b Atque ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, &c. *Ex vndecimo enim Lemmate angulus D H M eſt acutus, & D I M obtuſus, & coniuncta D M erunt duo quadrata D H, H M maiora quadrato D M, qua ſubtendit angulum acutum; quadratum verò D M maius eſt duobus quadratis D I, I M, ergo multo magis duo quadrata D H, H M ſimul ſumpta maiora ſunt duobus quadratis D I, I M ſimul ſumptis, & auferatur ex aggregato maiori quadratum minus H M, & ex minori tollatur quadratum maius I M (cum contingens H M propinquior vertici A minor ſit remotiore M I) remanet quadratũ D H maius quadrato D I, & propterea ramus D H maior erit ramo D I, & ſimili modo ramus D I maior oſtendetur ramo D C.*

68. 69. huius.

c Et iam demonſtratũ eſt, &c. *Scilicet : quia omnes rami ex D ad peripheriã A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos verticem reſpicientes acutos; & propterea ramus D B maior erit quolibet alio ramo inter B, & A ducto; ideoque D B erit maximus cadentium in peripheria A B.*

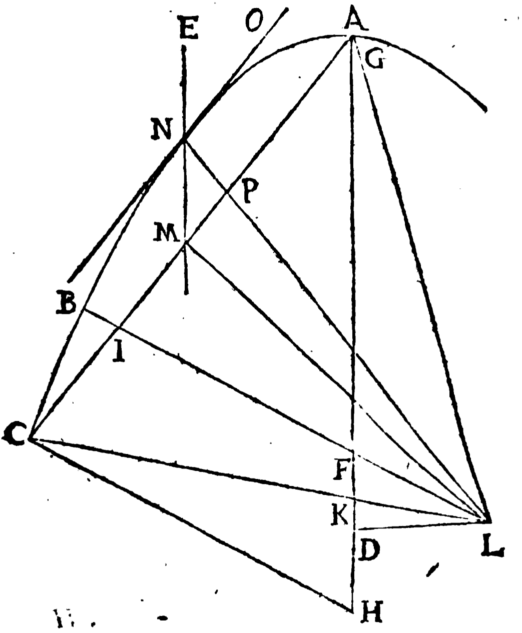
Lem. 11. Coroll. 64. 65. huius.

d Poſtea oſtendetur, quemadmodum hîc dictum eſt, &c. *Textus eſt valde corruptus ; ſic reſtituendum puto ; Oſtendetur, quemadmodum ſupra dictum eſt, (ſcilicet in ſecunda parte propoſ. 67.) quod D C minimus ſit omnium ramorum ad ſectionem infimam C N cadentium, & vt hîc oſtenſum eſt, ſit minimus ramorum egredientium ad ſectionem B C ; quare patet, quod D B ſit maximus ramorum cadentium ad ſectionem A C, & D C ſit minimus cadentium ad ſectionem B C N, & quod propinquiores maioribus, ſunt maiores remotioribus in peripheria ſectionis A C, & propinquiores minoribus, ſunt minores remotioribus in peripheria ſectionis B C N, & hoc erat oſtendendum.*

Quod

Quod autem infimus ramus breuiſecans D C non ſit neceſſario minimus omnium ramorum cadentium ad peripheriam ſectionis A B, modò oſtendetur.

PROB. 6. Addit. *In coniſectione duos ramos breuiſecantes, ducere, quorum infimus maior ſit ramo ſecante poſito in peripheria à vertice, & ſuprema breuiſecante comprænhenſa: oportet autem in ellipſi, vt rami ſecantes ad vnum eius quadrantem ducantur à concurſu, inter axim minorem, & verticem collocato.*

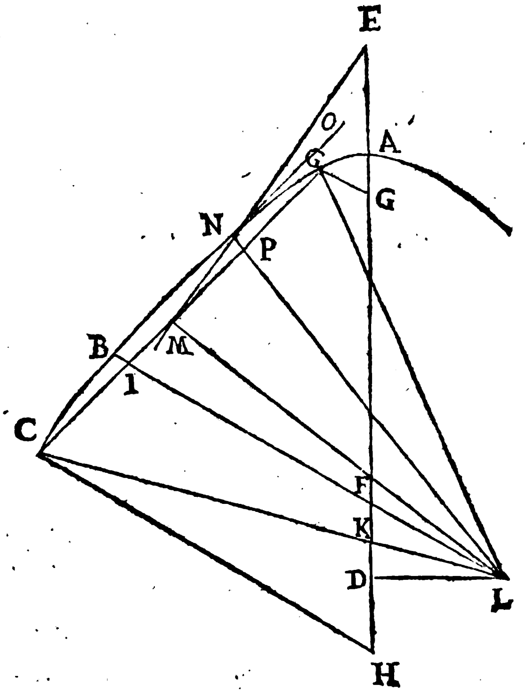


In coniſectione A B C, cuius vertex A axis A D, & in hyperbola, & ellipſi centrum E ducatur qualibet breuiſsima F B: poſtea ſecetur F G ex axi, ita vt punctum G non cadat ſupra verticem A, ſeceturque F H non maior, quàm F G, ducanturque rectæ H C, G G parallelæ ipſi F B occurrentes ſectioni in C, & G, coniungaturque recta C G ſecans F B in I: patet, C I maiorem non eſſe, quàm I G; propterea quod G C, G H à parallelis ſecantur proportionaliter; Deinde ex C ducatur alia breuiſsima C K, occurrens B F vltra axim in L, iungaturque ramus G L: oſtendendum eſt L C maiorem eſſe, quàm L G. Secetur C G bifariam in M, atque per M ducatur ſectionis diameter M N parallela axi in parabola, & per centrum exſtenſa in reliquis ſectionibus, occurrens ſectioni in N, ducaturque O N ſectionem contingens in N, iunganturque L M, & L N, qua ſecet G C in P. Quoniam G I æqualis, aut maior eſt, quàm I C, cadet punctum M bipartitæ diuiſionis totius C G, vel in I, vel inter I, G, & in vtroque caſu punctum N cadet inter G, & B (eoquod diameter M N parallela axi in parabola, aut ex centro E educta in reliquis ſectionibus efficit angulum N M L ad partes verticis A) & ideo ramus L N cadens ſupra duos breuiſecantes L C, L B ad partes verticis efficit cum tangen-

8. 9. 10. huius.

8. 9. 10. 26. 27. 28. huius.

33. 34. lib. 1.

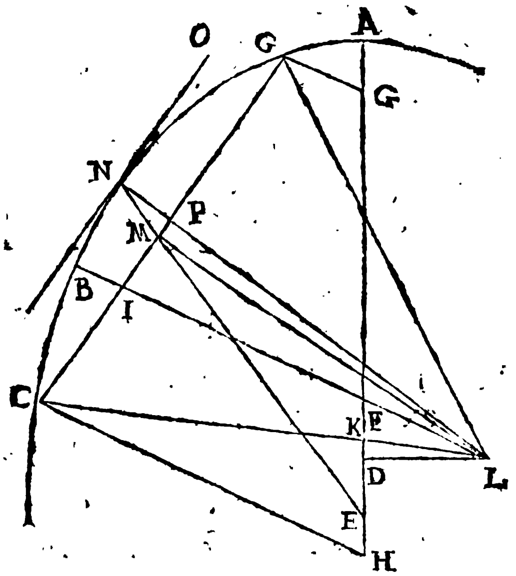


te O N

Lem. 11.

5. lib. 2.

te O N angulum acutum L N O verticem A reſpicientem; eſtque G C ordinatim applicata ad diametrum N M parallela tangenti verticali O N; ergo angulus L P G externus æqualis erit angulo L N O interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes conſtituto; & ideo angulus G P L acutus quoque erit, at in triangulo P M L angulus internus L M P, & oppoſitus minor eſt externo L P G acuto; igitur angulus L M P acutus pariter erit, & L M C obtuſus; ſuntq; in triangulis L M G, & L M C circa angulos inæquales, latera G M, M C æqualia, & L M commune; ergo L C maior eſt, quàm L G, quod erat faciendum.



E contra fieri poteſt, vt infimus breuiſecans ramus L C æqualis, aut minor ſit ramo aliquo ſupra breuiſecantem reliquum B L poſito. Nam L C minor eſt, quàm B L, & maior effici poteſt ramo non vltra ſectionis verticem A collocato ex prima parte huius propoſitionis, ſed rami à concurſu L educti cadentes inter puncta A, & B ſucceſſiuè augentur quo magis à vertice A recedunt; Ergo ramus L C æqualis, aut minor erit aliquo ramo ab eodem concurſu L educto inter puncta A, & B cadente; igitur manifeſtum eſt ramum breuiſecantem C L infimum duorum breuiſecantium, non eſſe ſemper minimum omnium ramorum cadentium ex concurſu L ad peripheriam ſectionis A B C, ſed tantummodo minorem eſſe eorum, qui inter duo breuiſecantes B L, C L cadunt, & reliquorum infra ramum C L cadentium, atque aliquorum in pepheria A N exiſtentium propè maximum L B; quapropter exiſtimandum eſt, incuria alicuius verba illa non ſine Apollonij iniuria textui irrepſiſſe.

⁂

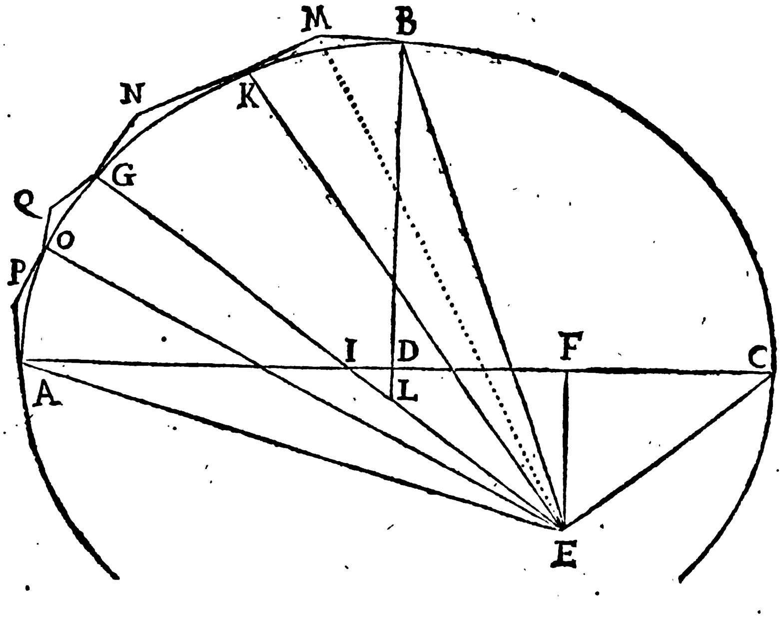
SECTIO

SECTIO DECIMAQVARTA

Continens Propoſ. LXXIII. LXXIV. LXXV. LXXVI. & LXXVII.

PROPOSITIO LXXIII.

SI ex concurſu E non exiſtente ſuper rectum minorem ellipſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C ſit breuiſſima, vel duo breuiſecantes; vtique ramorum ſecantium ex illo concurſu egredientium maximus erit breuiſecans, qui ſectionis rectum ſecat, nempe E G, & illi proximior maior eſt remotiore; minimus verò eorum eſt, qui terminatur à vertice ſectionis proximiori concurſui, nempe E C, & illi propinquiores minores ſunt remotioribus, nempe inter C G. Si autem egrediantur ex illo tres breuiſecantes, & duo illorum ſecuerint menſuram, & vnus ſecuerit rectum, vtique qui rectum ſecat eſt maximus ramorum ſecantium: & ramorum inter mediam breuiſecantem, & remotiorem verticem ſectionis à concurſu cadentium, proximior illi, eſt maior remotiore, & maximus duorum reliquorum breuiſecantium eſt ille, qui vertici proximus eſt, & ramorum, inter proximiorem verticem ſectionis, & intermedium breuiſecantem cadentium, vicinior illi, maior eſt remotiore. a



b Erigamus itaque ſuper D perpendicularem D B occurrentem E G in
L; ergo eſt dimidium recti, & E non eſt indirectum, quia non egreditur
c ex E, niſi vnicus breuiſſecans; inſuper lineæ breuiſſimæ egredientes
ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt ab axi A C cum
C, lineam maiorem, quàm ſecant rami illi. (51. 52. ex 5.) His poſitis
manifeſtum eſt, quod E C F eſt acutus; atque E C minima eſt linearum
egredientium ex E ad quadrantem E B, & illi propinquior, minor
d eſt remotiore; modo demonſtrandum eſt, quod E K maior quoque eſt,
quàm E B, producamus itaque B M, M K tangentes, ergo M B E eſt
obtuſus, & M K E acutus (29. ex 5.) quia breuiſſima egrediens ex K
abſcindit cum A minorem lineam, quàm ſecat K E (57. ex 5.) eo quod
K cadit inter duas lineas L B, L G; & iungamus M E; ergo duo quadrata
M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quare minora
erunt duobus quadratis M K, K E, & M B maior eſt, quàm M K, ergo 70. huius.
B E minor eſt, quàm K E; & ſic demonſtratur, quod G E maior ſit,
quàm K E; Nam ſi producamus G N tangentem, tunc N G E eſt rectus,
quia G I eſt breuiſſima, & N K E obtuſus; ergo G E maior eſt, 30. huius.
quàm E K; itaque G E maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem
G C, & minimus eorum E C, atque propinquior E C minor
eſt remotiore.

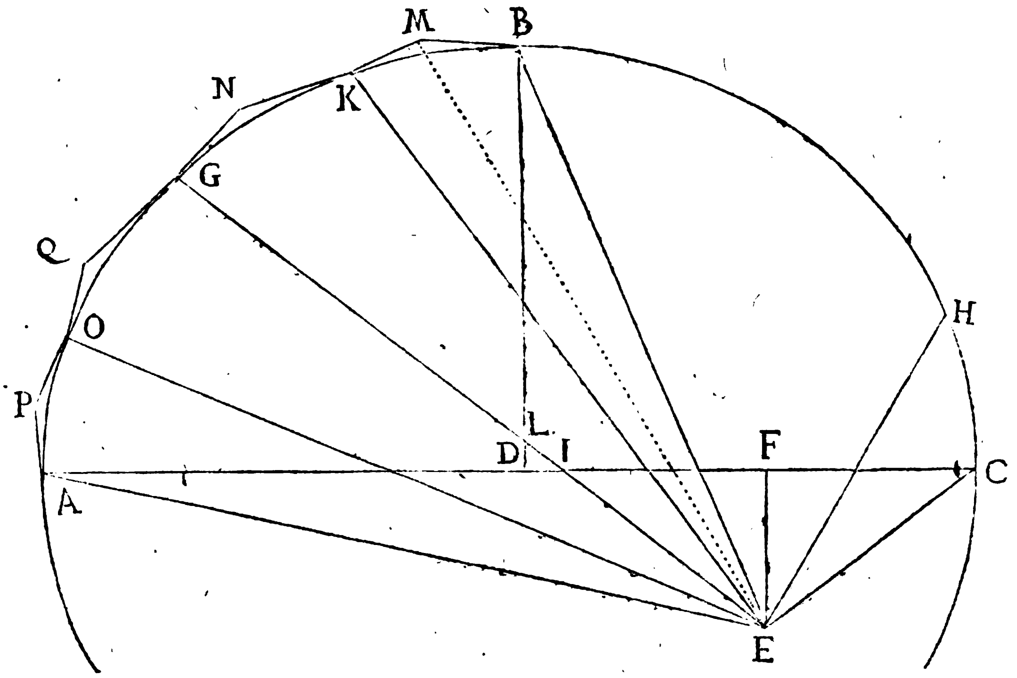
e Educamus ex E ad ſectionem A G, E A, E O, oſtendetur quod E G maior ſit, quàm E O, & E O, quàm E A. Erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P eſt obtuſus, & producamus P O Q tangentem; ergo P O E eſt acutus, quia linea breuiſſima egrediens ex O ſecat cum A lineam maiorem; 57. huius. ergo E O maior eſt, quàm E A: atq; ſic patet, quod E G maior ſit, quàm E O (29. ex 5.) quia Q G E eſt rectus, & Q O E obtuſus, & G Q maior, quàm O Q, ergo E G maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & minimus eorum E C, & propinquiores minimo, remotioribus minores ſunt, & propinquiores maximo, maiores ſunt remotioribus; quod erat oſtendendum.

PROPOSITO LXXIV.

DEinde ſint E H, E G duo breuiſecantes, & E G ſecet rectum B D. Dico, quod E G eſt maximus ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & E C eſt minimus.

Producatur perpendicularis E F, quæ non cadet ſuper centrum; ſi enim per centrum duceretur, duci poſſet ex E, aut vnicus breuiſecans tantum (44. ex 5.) aut tres (45. ex 5.) quod eſt contra hypotheſin; ergo E F per centrum non tranſit, cadat ſuper C D; & quia ducuntur ex E duo breuiſecantes, erit C F maior dimidio erecti, & E F æqualis Trutinæ (52. ex 5.) patet itaquè, vti antea demonſtrauimus, quod E G maximus ſit ramorũ, & E C minimus; atquè propinquior maximo, maior eſt, & propinquior minimo, eſt minor. a

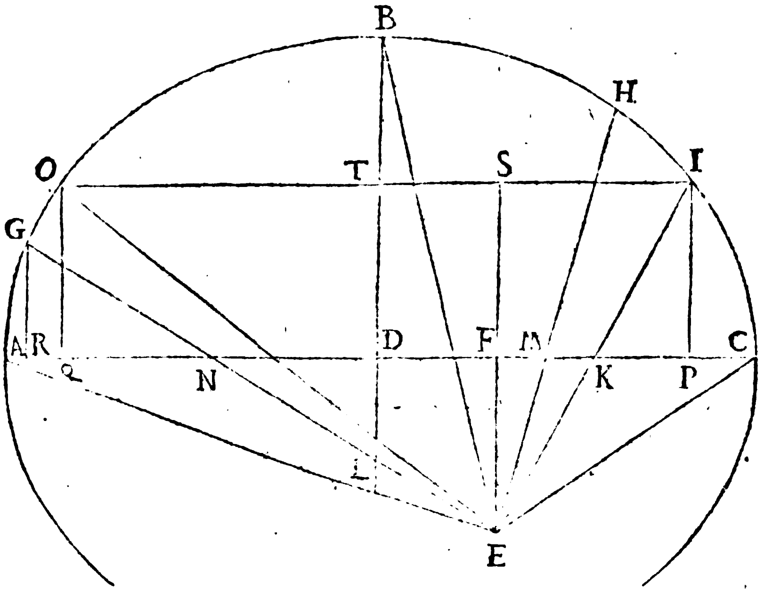
Ex 45. huius.



PROPOSITO LXXV.

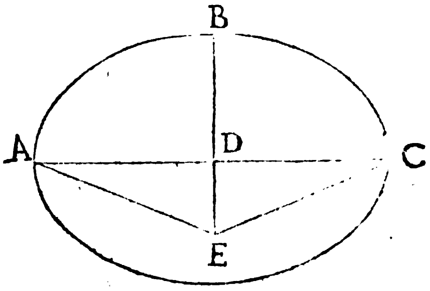
POſtea educamus ex E tres breuiſecantes E G, E H, E I, & ſecent E I, E H menſuram, & E G ſecet rectum in L. Dico, quod E G eſt maximus ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & ramorum inter A H cadentium propinquiores illi, maiores ſunt remotioribus, & E I eſt maximus ramorum egredientium ad ſectionem H C, & illi propinquiores maiores ſunt remotioribus. a

Quo-



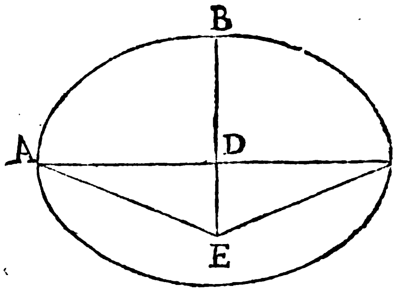
b Quoniam I K, H M ſunt duæ breuiſſimæ conſtat, quod E I maximus
ſit ramorum cadentium ad illam ſectionem (72. ex 5.) & propinquior
c illi maior eſt remotiore : nec non; quia H M, G N ſunt duæ breuiſſimæ
conſtat, vt dictum eſt, quod G E ſit maximus ramorum cadentium vtrinque 74. huius.
d ad ſectionẽ A H. Dico etiam, E G maiorem eſſe, quàm E I; nam
ſi producatur I O parallela ipſi A C, & iungatur E O, ducanturque perpendiculares
I P, O Q, G R, E F S, quia G N, I K ſunt breuiſſimæ erit 15. huius.
D P ad P K, quæ eſt, vt proportio figuræ, vt D R ad R N; ergo F P
ad P K minorem proportionem habet, quàm F R ad R N, & diuidendo
F K ad K P, nempe F E ad I P, minorem proportionem habet, quàm
F N ad N R, nempe F E ad G R: ergo F E ad I P minorem proportionem
habet, quàm ad G R, & propterea G R minor eſt, quàm I P, quæ
eſt æqualis O Q, cuius punctum O remotior eſt à vertice, quàm G,
& ideo E G maior eſt, quàm E O. (74. ex 5.) Et quia O T æqualis
eſt T I erit O S maior quàm S I, & S E perpendicularis ad O I eſt communis;
igitur O E maior eſt, quàm E I; & oſtenſa eſt E G maior, quàm
O E; Ergo E G maior eſt, quàm E I, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXVI.



a SI ex concurſu E in recto E B poſito ellipſis A B C nõ educatur breuiſecans præter E B, qui tranſeat per centrum; erit E B maximus ramorum ſecantium ex concurſu ad ſectionem egredientium.

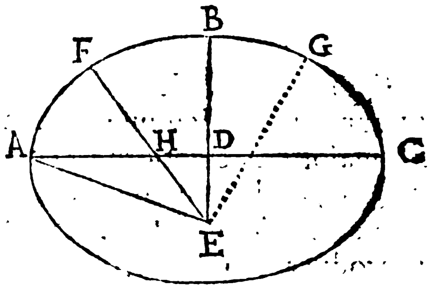
Si vero ex illo educatur alius breuiſecans erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus. b



Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum C, vel A lineas maiores, quàm ſecent rami (illi 44. ex 5.) demonſtrabitur ductis tangentibus, per extremitates illorum (quemadmodum antea oſtenſum eſt) quod E B ſit maximus ramorum egredientium ad duos quadrantes C B, B A, & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXVII.

POſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æque remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium. a



Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ, b ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A maiores lineas, quàm ſecent breuiſſimæ, egredientes ab eorum extremitatibus: idem dicendum eſt de ramis educti ad ſectionis peripheriam B G, & rami educti ad peripherias C G, A F abſcindunt cum C, vel A lineas minores (45. ex 5.) conſtat itaque adhibitis lineis tangentibus, c vt dictum eſt, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium ex E ad C B A egredientium, excepto vno E G, cui eſt æqualis, quod erat oſtendendum.

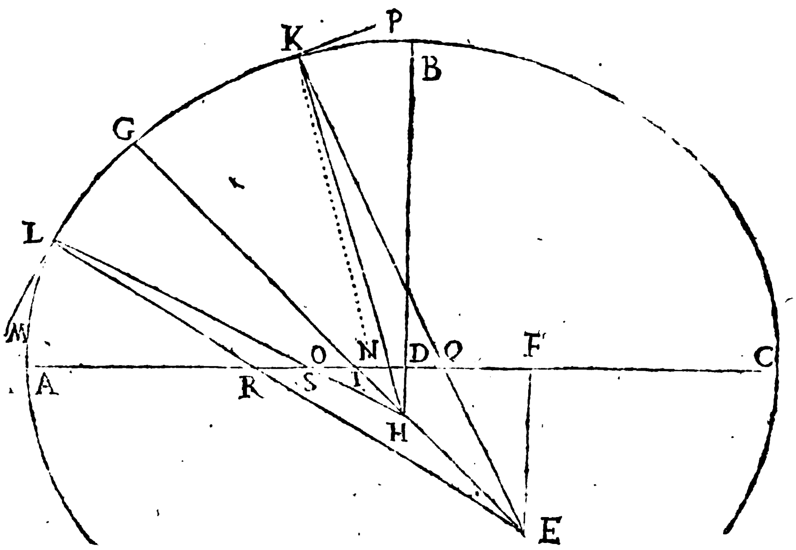
Notæ in Propoſit. LXXIII.

P*RO clariori intelligentia propoſitionum huius ſectionis hæc præmitto.*

LEMMA XII.

Si in ellipſi A B C à concurſu E ductus fuerit ramus E G ſecans vtrumque axim in H, & I, cuius portio G I, inter axim maiorem A C, & ſectionem intercepta, ſit linea breuiſsima; dico, quod quilibet alius ramus E K inter breuiſecantem G E, & axim minorem interceptus, efficit cum ſectionem tangente K P angulum E K P acutum, reſpi-

reſpicientem verticem C concurſui propinquiorem : & quilibet ramus E L inter breuiſecantem G E , & axim maiorem poſitus efficit cum tangente L M angulum E L M reſpicientem eundem verticem A acutum.

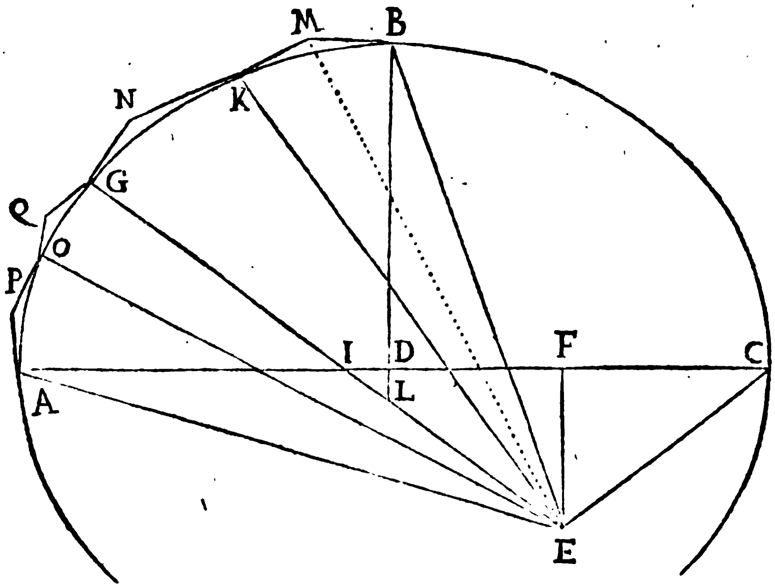


Ducatur E F perpendicularis ad axim maiorem , eum ſecans inter verticem C , & centrum D in F , & ex concurſu axis minoris B H , & breuiſsimæ G E , ſcilicet ex H ducantur rectæ H K , & H L ; pariterque ex punctis , K , & L ducantur ad axim maiorem A C lineæ breuiſsimæ K N , L O , ei occurrentes in N , & O . Quoniam (ex præmiſſo Lemmate 8.) à concurſu H ducitur ramus H K inter breuiſecantes H B , H G interceptus ; ergo H K cadit infra breuiſsimam K N ad partes verticis C ; eſt vero angulus N K P rectus à tangente, & breuiſsima contentus ; ergo angulus H K P erit acutus , cum H K cadat inter N K , & tangentem K P ; cadit vero E K infra ramum H K verſus C ; igitur angulus E K P reſpiciens verticem C proximiorem concurſui E erit acutus. 29. 30. huius.

Similiter (ex eodem Lemmate 8.) quia ramus H L ducitur inter breuiſecantem H G , & verticem A à concurſu E remotiorem , cadet ipſe ſupra breuiſsimā L O , eſtque angulus O L M ad partes verticis A rectus ; ergo H L M acutus erit, cumque E L cadat ſupra H L verſus A ; igitur angulus E L M , verticem A remotiorem reſpiciens , erit acutus , quod erat oſtendendum. Ibidem.

a Si à concurſu E non exiſtente ſuper recto ellipſis A C , producatur vnicus ramus ſecans ipſam A C , vt E G , cuius ſegmentum G I , & A C ſit breuiſsimum, vel duo breuiſecantes ; vtique maximus ſecantium ramorum egredientium ex illo concurſu , eſt breuiſecans , qui rectum ſectionis abſcindit, nempe E G , &c. *Textum mendoſum ſic reſtituendum cenſeo. Si ex*

concurſu



concurſu E non exiſtente ſuper axim rectum minorem ellipſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C intercepta ſit linea breuiſsima; vel ducatur præter E G alius ramus breuiſecans, menſuram tantummodo abſcindens; vtique ramorum ſecantium, ex illo concurſu egredientium, maximus erit ille, qui axim rectum ſectionis diuidit, &c.

Erigamus itaque ſuper D perpendicularem, &c. *Scilicet ex centro ſectionis D eleuetur D B perpendicularis ad axim maiorem A C, occurrens ſectioni in B, & ipſi E G in L, & propterea D B erit ſemiſsis recti axis, & punctum E in axi B D non exiſtit ex hypotheſi, &c.* b

Quoniam non egreditur ex E niſi vnus breuiſecans, ergo lineæ breuiſsimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum, abſcindunt ab axi cum A C, L A lineam maiorem, quàm ſecent illorum rami (51. 52. ex 5.) & iam patet, quod ſi ita ſe res habet L E C eſt acutus; quia E C breuiſsima eſt linearum egredientium ex E ad quadrantem A B, & propinquior illi, minor eſt remotiore, &c. *Sic legendum puto: Quia præter E G, vtrumque axim ſecantem nullus alius breuiſecans duci poſſe à concurſu E ad ſectionem ſupponitur, ergo linea breuiſsima egredientes ab axtremitatibus reliquorum ramorum in quadrante C B abſcindunt ab axi A C cum vertice C lineas maiores, quàm ſecent rami (51. 52. ex 5.) pariterque conſtat, quod angulus E C F ſit acutus, atque ramus E C eſt minimus egredientium ex E ad quadrantem C B, & propinquior minimæ, minor eſt remotiore. Demonſtrandum modo eſt, quod K E maior quoque eſt, quàm E B, &c.* c

Producamus itaque M B, M K tangentes; ergo M B E eſt obtuſus, & M K E eſt acutus (29. ex 5.) quia breuiſsima egrediens ex K abſcindit A lineam minorem, quàm A E (57. ex 5.) eo quod K eſt inter duo ſegmenta L B, L G: & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quæ minora ſunt duobus quadratis M K, K E, &c. *Ideſt: ex punctis B, K ducantur duæ tangentes ſectionem M B, K M occur-* d

occurrentes in M, & quia angulus D B M rectus eſt contentus ab axe, & tangente, Conue ſ.
& cadit B E inter C, & D ergo angulus E B M eſt obtuſus; poſtea, quia E 32. lib. 1.
K cadit infra breuiſſimam E G, & ſupra minorem axim B D, ergo angulus Lem. 12.
E K M reſpiciens verticem C propinquiorem concurſui, erit acutus, & iuncta
M E erunt duo quadrata E B, B M minora quadrato E M, eſtque quadratum
E M minus duobus quadratis E K, K M circa acutum angulum (cum priora
angulum obtuſum comprehendant,) Igitur duo quadrata E B, B M ſimul ſumpta
minora ſunt duobus quadratis E K, K M: eſtque quadratum M B maius
quadrato M K, cum contingens M K, proximior vertici A axis maioris minor 70. huius.
ſit remotiore B M; igitur quadratum E B, ſcilicet reſiduum minoris ſummæ minus
erit quadrato E K, & propterea ramus E B minor erit, quàm E K.

e Et educamus ex E ad ſectionem A G, E A, E O, & patebit, quod E G maior ſit, quàm E O, & E O, quàm E A: erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P eſt obtuſus: & ducamus P O Q tangentem; ergo P O E eſt acutus, quia linea breuiſſima egrediens ex O abſcindit cum A lineam maiorem, & P O eſt maior, quàm P A; ergo E O maior eſt quàm E A, atque ſic patet, quod E G maior ſit, quàm E O, &c.

Demonſtratio poſtremæ partis huius propoſitionis neglecta ab Apollonio ob ſui facilitatem occaſionem errandi alicui præbere poſſet, propter verba illa poſtrema textui ſuperaddita; non enim ex maiori ſumma duorum laterum P O, O E ſi auferatur maior O P, & ex minori ſumma P A, A E auferatur minor P A, neceſſario reſiduum maioris, ideſt E O maior erit quam E A reſiduum minoris; itaque ſenſus huiüs contextus talis erit.

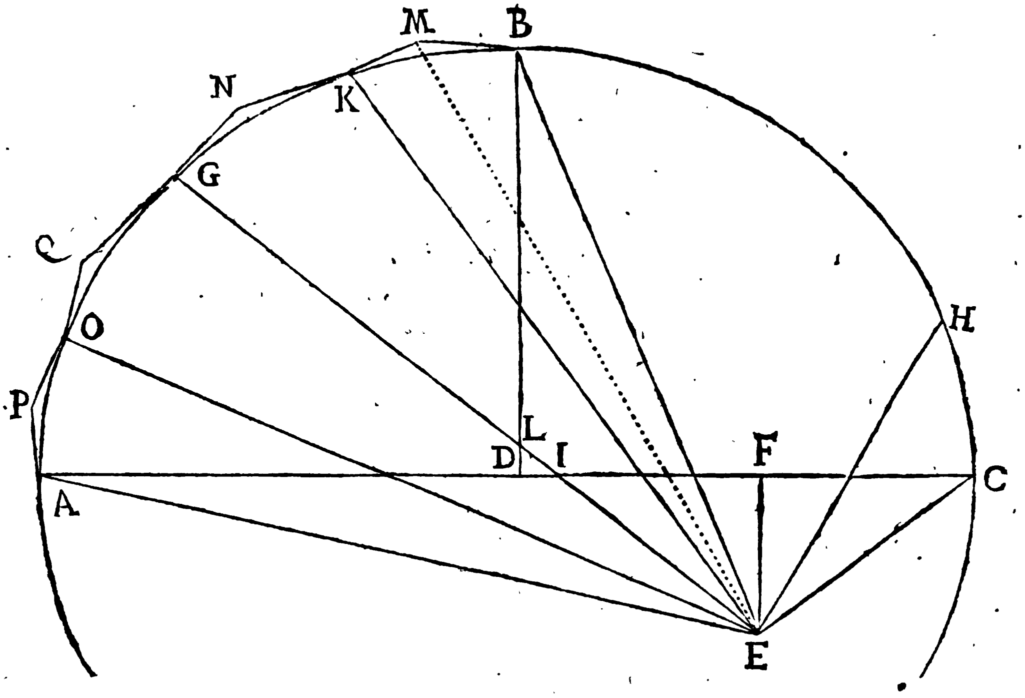
Ex concurſu E ad ſectionem A G ducantur rami E A, & quilibet alius E O;
oſtendendum eſt, E G maiorem eſſe, quàm E O, & E O maiorem, quàm E A: ducantur
A P, Q O tangentes ſectionem in A, & O conuenientes in P, & tangenti Conuerſ.
G Q in Q. manifeſtum eſt angulum E A P obtuſum eſſe, cum angulus C A P ſit 32. lib. 1.
rectus pariterque quilibet ramus E O inter breuiſecantem E G, & verticem A Lem. 12.
remotiorem interceptus efficit angulum E O P, verticem A reſpicientem acutum,
& ſic reliqui omnes rami inter puncta G, & A cadentes; quare (ex Corollario
propoſitionum 64. & 65.) ramus E A minor erit quolibet ramo E O inter verticem 29. 30.
A, & G cadente: rurſus, quoniam breuiſecãs E G conſtituit cum tangente huius.
angulũ E G Q rectum; quare ex concurſu E ad ſectionis peripheriam G A omnes Lem. 12.
rami cadentes efficiunt cum tangentibus angulos, verticem A reſpicientes, acutos,
& vnus tantummodo E G Q eſt rectus; igitur (ex Coroll. propoſ. 67. huius) ramus
E O vertici A propinquior minor eſt remotiore E G; Quapropter ramus breuiſecãs
E G maximus eſt omnium ramorum ſecantium ad peripheriam A B C cadentium.

At adhuc non conſtat, ramum B C minimum eſſe prædictorum ramorum omnium, niſi prius oſtendatur, E C minorem eſſe quolibet ramo ad peripheriam A G educto: & hoc etiam ob ſui facilitatem neglectum fuit ab Apollonio. Abſoluetur tamen hac ratione.

Quoniam perpendicularis E F cadit inter C, & D, igitur A F maior eſt, quàm C F, & F E eſt communis circa angulos rectos in triangulis C F E, A F E, igitur C E minor eſt, quàm E A: eſtque E A minor quolibet alio E O inter A, & G cadente, igitur E C minor eſt omnium ramorum cadentium ad peripheriam A G, ſed prius minor oſtenſus fuit reliquis omnibus cadentibus ad peripheriam C B G; igitur ramus E C minimus eſt omnium ſecantium, quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſ. LXXIV.

Ergo E F per centrum non tranſit, cadat ſuper C D, & quia producti ſunt ex E duo breuiſecantes; ergo C F excedit dimidium erecti, & E F æqualis eſt Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vt antea demonſtrauimus, quod E G ſit maximus ramorum, & E C minimus, &c. a



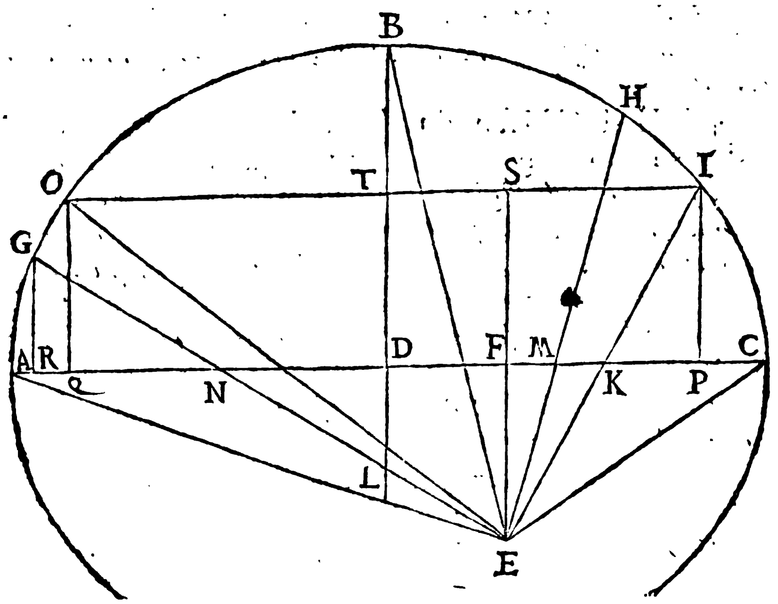
Quoniam in 11. *huius oſtenſum eſt, quod ſemiaxis minor ellipſis eſt ramus breuiſſimus, ergo ſi incidentia perpendicularis E F ſuper axim A C, ideſt punctum F eſt centrum ellipſis educerentur ex concurſu E tres breuiſecantes, nimirum E H, E G, & E F producta, quæ eſſet axis minor ellipſis: hoc autem eſt contra hypotheſim, cum ducti ſint ex E duo breuiſecantes: ergo eorum vnus E H menſuram C F ſecat, quæ minor eſſe debet ſemiſſe axis maioris C D; igitur ex conuerſa propoſitione* 50. *huius, menſura C F maior erit ſemiſſe lateris recti, & (ex conuerſa propoſ.* 52. *huius) erit perpendicularis E F æqualis Trutinæ. Demonſtratio huius propoſitionis neglecta ab Apollonio, propterea quod eodem ferè modo, ac præcedens oſtendi poteſt, breuiſsimè perficietur in hunc modum.*

Propoſ. 67. huius. *Quoniam à concurſu E vnicus tantum breuiſecans E H ad quadrantem C B ducitur; igitur C E minimus eſt omnium ramorum cadentium ad ſectionis peripheriam C B, & E C vertici B propinquior minor eſt remotiore E H, & E H minor, quàm E B: rurſus, quia ramorum cadentium ex E ad peripheriam*
Ex 29. 30. huius. *B G vnus tantummodo breuiſecans E G conſtituit cum tangente N G angulum rectum,*

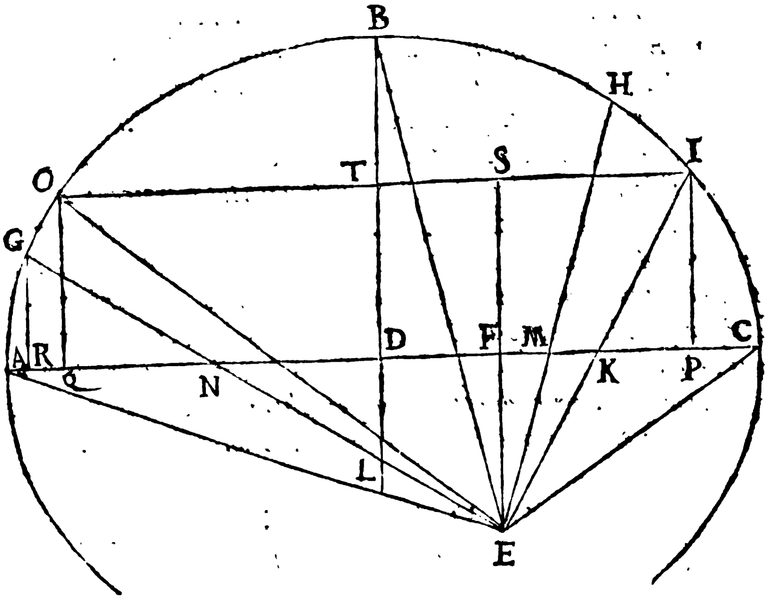
rectum, & reliqui omnes rami cadentes ſuper totum arcũ G B, conſtituunt cum Lem. 12.
ſuis tangentibus angulos acutos, reſpicientes verticem C; igitur quilibet ramus Coroll.
E B propinquior vertici C minor eſt quolibet remotiore ramo E K, & E K mi- prop. 67.
nor eſt remotiore E G: & propterea ramus E G maximus eſt omnium cadentium huius.
ad peripheriam C B G. Poſtremò, quia ramorum cadentium inter breuiſecan-
tem E G, & remotiorem verticem A axis maioris, vnicus tantũ E G efficit cum 29. 30.
ſua tangente angulum E G N rectum; reliqui vero omnes cadentes inter G, & huius.
A efficiunt cum ſuis tangentibus angulos, reſpicientes verticem A remotiorem, Lem. 12.
acutos; igitur (ex Corollario propoſ. 67. huius) ramus E G maior eſt quolibet huius.
ramo E O vertici A propinquiore, & E O maior eſt, quàm E A: quapropter
breuiſecans E G vtrumque axim abſcindens maximus eſt omnium ex E caden-
tium ad ſemiperipheriam ellipſis C B A, & ramus E C, vt in præcedenti dictũ
eſt, minimus erit omnium, atque propinquiores maximo ex eadem parte maio-
res erunt remotioribus, & cadentium ad peripheriam C B G minimo C E pro-
pinquiores, minores erunt remotioribus, quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. LXXV.

a Poſtea ducamus ex E tres breuiſecantes E G, E I, E H, & ſecent E I menſuram, & E G ſecet rectum in L, &c. *Ideſt: Poſtea ſi ex concurſu E ducti fuerint tres breuiſecantes E G, E I, E H; quorum duo E I, E H ſecent menſuram in K, & M: E G vero ſecet axim rectum in L, & axim maiorem A C in N. Dico, &c.*



b Quoniam I K, N M ſunt duæ breuiſſimæ conſtat, quod E I maximus ſit ramorum egredientium ad illius ſectionem (52. ex 5.) & reliquorum ramorum propinquior illi, maior eſt remotiore, &c. *Ideſt: Quia in quadran-*



te ellipſis C B ducuntur à concurſu E duo breuiſecantes E I, E H; igitur (ex propoſitione 72. huius) erit breuiſecans E I vertici A propinquior maximus omnium ramorum cadentium ex concurſu E ad ellipſis peripheriam C H; & propinquior maximo E I maior erit remotiore, ſed non omnium ramorũ cadentium ad quadrantem C B, ſed eorum ſolummodo, qui inter verticem C, & infimum breuiſecantem E H, & aliquorum propè ipſum; nam rami ſecantes cadentes propè punctum H hinc inde ſucceſsiuè augentur, vt dictum eſt in notis propoſ. 67. in eiuſque Corollario.

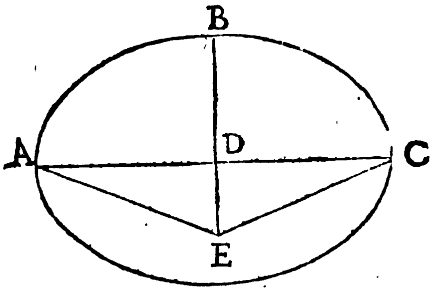
Nec non, quia H M, G N ſunt duæ breuiſſimæ, conſtat, vt dictũ eſt, quod G E ſit maximus ramorũ egredientiũ ex vtroque latere eius ad A H, &c. C
Quorũ verborũ ſenſus hic eſt. Quia ex concurſu E ducuntur duæ breuiſecantes E G & E H ad ſemiellipſim A B C, quarum E G ſecat vtrumq; axim, at E H ſecat tantummodo menſuram; ergo, ſicuti in præcedenti propoſ. 74. oſtenſum eſt, erit ramus E G maximus omniũ cadentiũ ad peripheriam H A, &c. At quia dubitari poſſet de certitudine huius conſequentiæ, quandoquidem hypotheſes non ſunt omnino eædem; in propoſitione enim 74. non tres, ſed duo tantummodo breuiſecantes ex concurſu E ad ſectionem C B A ducebãtur, hic vero etiam tertia breuiſecans ducitur: ſed ſi conſideretur progreſſus Apollonij, eandem concluſionem ex vtraque hypotheſi deduci poſſe percipitur; nam (ex propoſitione 72. huius) breuiſecans E H, infra breuiſecantem E I poſitus, minimus eſt omnium ramorum cadentium ex E ad peripheriam H B ellipſis, & propinquior minimo E H minor eſt remotiore, reliquorum vero ramorum cadentium ad quadrantem B A maximus eſt breuiſecans E G, vt oſtenſum eſt in præcedenti propoſit. 74. ex Lemmate 12. huius, & ex Corollario propoſit. 67, atque propinquior ramus maximo E G eorum, qui ad quadrantem B A cadunt maior eſt remotiore; quapropter ramus E G maximus eſt omnium ramorum ex E ad ellipſis peripheriam H A cadentium.

Dico

d Dico etiam, quod E G maior ſit, quàm E I, &c. *Ideſt: Oſtendetur etiam, quod ramus E G maximus etiam ſit omnium ramorũ cadentium ad peripheriam C H, propterea quod E G oſtendetur maior E I maximo eorum, qui ad peripheriam C H duci poſſunt. Ducatur ex puncto I recta I O parallela axi maiori A C, quæ ſecabit axim minorem, & ſectionem, cum punctum I cadat inter vertices C, & B duorum axium; ſecet igitur ſectionem in O, coniungaturque E O, atque ex punctis I, O, G, E ducantur perpendiculares ad axim I P, O Q, G R, E F S, quæ ſecent axim in P, Q, R, F, & I O in S, & quia G N, & I K ſunt breuiſsimæ; ergo D R ad R N, atque D P ad P K eandem proportionem habent,* 15. huius. *nimirum eam, quàm habet latus tranſuerſum ad rectum; eſt verò K F minor, quàm D K, atque R F maior, quàm D R; igitur F P ad P K minorem proportionem habet, quàm D P ad P K, ſeu quàm D R ad R N, & multo minorem, quàm F R ad R N; quare diuidendo F K ad K P minorem proportionem habebit, quàm F N ad N R, & propter parallelas F E, I P, & ſimilitudinem triangulorum E K F, I K P eſt E F ad I P, vt F K ad K P; igitur E F ad I P minorem proportionem habet, quàm F N ad N R; ſed propter ſimilitudinem triangulorum E F N, G R N eſt E F ad G R, vt F N ad R N; igitur eadem E F ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R; & propterea I P, ſeu ei æqualis O Q (in parallegrammo rectangulo P O) maior erit, quàm G R, & propterea punctum O recedit à puncto G verſus B, ideoq; ramus* 74. huius. *E G maximus, maior erit ramo E O, &c.*

Notæ in Propoſ. LXXVI.

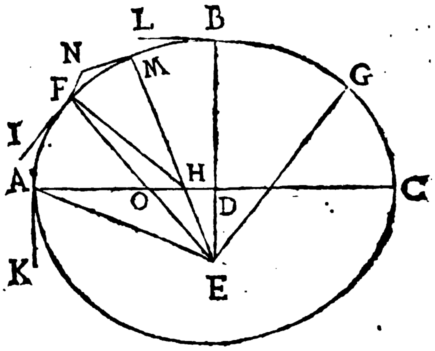
a SI autem non educatur ex concurſu E ad rectum E B ellipſis A B C breuiſecans præter tranſeuntem per centrum, vt E B, vtique erit maximus ramorum ſecantium egredientium ex concurſu ad ſectionem.



Si vero eductus fuerit ex illo alius breuiſecans, ipſe erit ramus maximus, &c. *Imperceptibilis eſt ſenſus huius textus, quia, præter phraſis Arabicæ difficultatem, nonnulla verba in textu deſiderantur; itaq; ſic legendum puto. Si ex concurſu E in recto E B poſito ellipſis A B C non educatur breuiſecans præter E B tranſeuntem per centrum, erit E B maximus ramorum ſecantium ex concurſu ad ſectionem egredientiũ.*

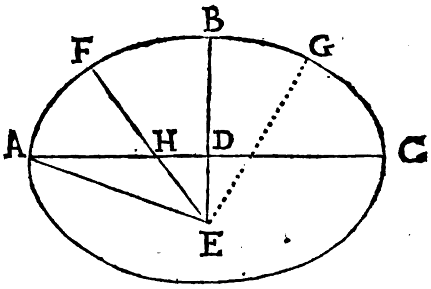
Si vero ex illo educatur alius breuiſecans, erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus: Si enim hæc extrema verba non opponerentur, propoſitio non eſſet vera, vt oſtendetur.

b Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum A, vel B lineam maiorem, quàm ſecet ramus illius (49. ex 5.) demonſtratum ergo eſt in lineis tangentibus ad extremitatem illius, quemadmodum antea, &c. *Mendoſe citatur quadrageſima nona huius, debet potius legi 43. in qua oſtenſum eſt, quod quotieſcunque ramus E B ad ſemiaxim*



miaxim minorem B D habet eandem, aut maiorem proportionem, quàm latus tranſuerſum A C ad eius latus rectum; tunc nullus alius ramus ad ſectionem A B C breuiſecans duci poteſt, & qualibet linea breuiſsima vt F H ducta ex puncto F ad axim A C cadit infra ramum E F ad partes centri, & propterea ſi per F ducatur
ex 29. 30. huius. *F I contingens ellipſin quilibet ramus E F efficiet cum tangente angulum E F I reſpicientem verticem A acutum: Similiter ſi ducatur A K contingens ſectionem in A co-*
ex 32. lib. 1. *niungaturque E A, erit quoque angulus E A K acutus, & ducta B L contingente ſectionem in B erit angulus E B L rectus; quapropter omnes rami ex concurſu E ad quadrantem A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos reſpicientes*
Coroll. 67. huius. *verticem A acutos, & vnus tantummodo E B L eſt rectus; igitur ramorum cadentium ex E ad quadrantem B A minimus eſt E A, & quilibet ramus E F propinquior vertici A minor eſt quolibet remotiore; & propterea E B erit maximus: ſimili modo E B maior erit quolibet ramo E G in quadrante B C exiſtente; Et hic eſt ſenſus, ni fallor illorum verborum;* demonſtrabitur in lineis tangentibus, quemadmodum antea oſtenſum eſt, &c.

Notæ in Propoſit. LXXVII.



a

POſtea educatur E F, qui eſt maximus ramorum, &c. *Repono hic ſimiliter verba, quæ in textu deſiderantur; Poſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æquè remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium.*

Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ; ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A lineas maiores, quàm ſecent breuiſſimæ egredientes ab eorum extremitatibus, & rami egredientes ad duas peripherias C B, F A abſcindunt cum A, vel C lineas minores (52. ex 5.) &c. *Quia in ellipſi ſemiaxis minor B D, & breuiſsima F H*
Lem. 8. huius. *concurrunt in E; ergo quilibet ramus ex E ad peripheriam F B ductus cadit infra breuiſsimam ab eius termino ad axim A C ductam: ſimiliter, quia ramus E G æquè recedit ab axi D B, ac ramus E F; propterea, ne dum ramus F E æqualis erit ramo E G, ſed ſimiliter quilibet alius ramus incidens inter E B,*
Ibidem. *& E G cadet infra breuiſsimam ab eius termino ad axim A C ductam verſus*
Ibidem. *D, & rami cadentes ad peripherias A F, & C G cadunt ſupra breuiſsimas ab eorum terminis ad axim C A ductas ad partes A, & C.*

Conſtat itaque, vt dictum eſt de lineis tangentibus, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium egredientium ex E ad A B C, quod erat oſten-

den-

dendum, &c. *Quæ poſtrema verba ſic intelligi, ac corrigi debent. Quia quilibet ramus ex E ad A F ductus cadit ſupra breuiſsimam ad partes A ab eius termino ad axim C A ductam; igitur, vt multoties dictum eſt, conſtituit cum ſua tangente angulum reſpicientèm verticem A acutum, ſicuti angulus E A K acutus quoque eſt, & omnium ramorum ad peripheriam A F cadentiũ tantummodo angulus E F I eſt rectus; igitur omnium ramorum ex E ad peripheriam A F cadentium maximus eſt F E remotiſsimus à vertice A, eſtque ramus E G æqualis E F, & E G maximus eſt ramorum cadentium ex E ad peripheriam G C; igitur ramus E F maximus etiam eſt ramorum cadentium ad peripheriam G C: poſtea ducto quolibet ramo E M inter F, B, & M N tangente ſectionem in M, qua conueniat cum tangente I F in N, quia E M, vt dictum eſt, cadit infra breuiſsimam ex M ad axim B A ductam, cum qua contingens N M angulum rectũ conſtituit, (ex 30. huius) ergo angulus E M N reſpiciens verticem A eſt obtuſus, & angulus E F N eſt rectus, cum F O ſit breuiſsima, igitur duo quadrata E F, F N maiora ſunt duobus quadratis E M, M N ſimul ſumptis, & ablatum quadratum M N ex minori ſumma maius eſt ablato quadrato N F, cum contingens N F vertici A maioris axis propinquior ſit; ergo quadratum E F maius ex quadrato E M, ideoque ramus E F maior erit quolibet ramo E M inter F, & B poſito. Non ſecus oſtendetur E M maior quàm E B; quare ramus E F maximus erit omnium cadentium ad peripheriam F B. Eodem modo ramus breuiſecans E G maximus erit omnium cadentium ad peripheriam G B; & propterea ramus E F maximus erit omnium ad peripheriam F B G cadentium; Quapropter ramus breuiſecans E F æqualis erit vni tantummodo E G æquè ab axi remoto, & maximus omnium ramorum ex concurſu E ad ſemiellipſim A B C cadentium, quod erat oſtendendum.*

Lem. 8. huius.

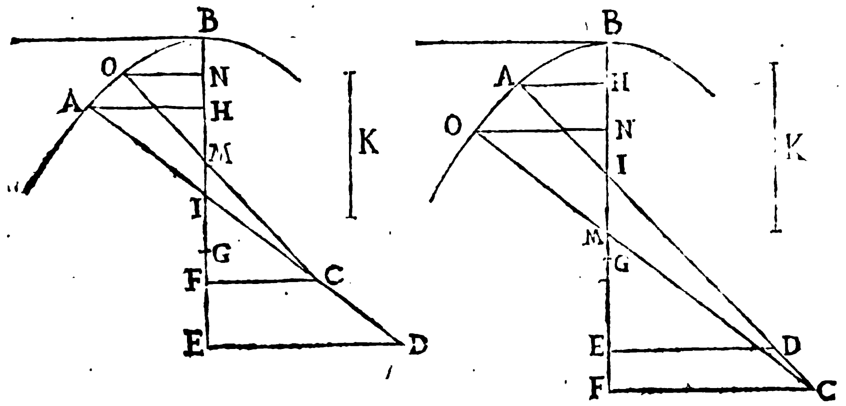
Coroll. Prop. 67. huius.

70. huius.

Sicuti in prioribus propoſitionibus factum eſt, reperientur, quotnam rami inter ſe æquales à puncto concurſus ad coniſectionem duci poſſunt, qua occaſione afferam propoſitiones aliquas non iniucundas, quarum prima erit.

PROP. 7. Addit.

Si ad coniſectionem B A à concurſu D vnicus tantum breuiſecans D A duci poſſit, & ducatur quælibet F C parallela perpendiculari D E



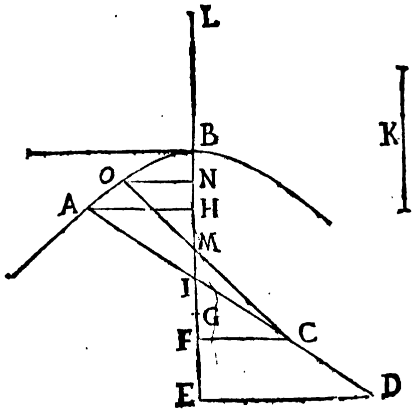
inter productionem breuiſsimæ, & axim intercepta quem ſecet in F, reperia-

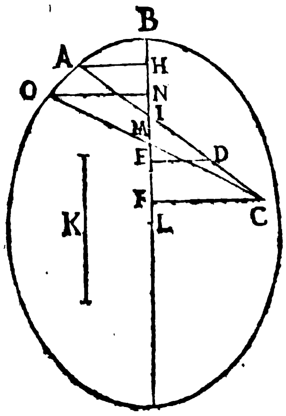
periaturque Trutina K minoris, vel maioris menſuræ F B: dico perpendicularem C F minorem eſſe Trutina K.

Secentur primo in parabola abciſsæ B H, & B N æquales trienti exceſſus inæqualium menſurarum ſupra ſemierectum (vt præcipitur in propoſitione 51. huius) manifeſtum eſt, abſciſſam B N minorem eſſe ipſa B H, quando B F minor eſt, quàm B E, & maior, quando B F ſuperat ipſam B E; eo quod eorum triplæ, vna cum ſemierecto, ideſt menſura B F minor fuerat in primo caſu; & maior in ſecundo, quàm menſura B E.

Lem. 7. huius.

In hyperbola vero, & ellipſi fiat proportio rectæ H L ad ſemiaxim tranſuerſum L B ſubtriplicata eius, quàm inuerſa L E ſegmentum L G homologum lateri tranſuerſo habet ad ſemiaxim tranſuerſum (ex præſcripto propoſit. 52. & 53. huius) pariterque fiat proportio N L ad L B ſubtriplicata eius quàm inuerſæ minoris L F in primo caſu, & maioris in ſecundo, ſegmentum homologum lateri tranſuerſo habet ad L B.

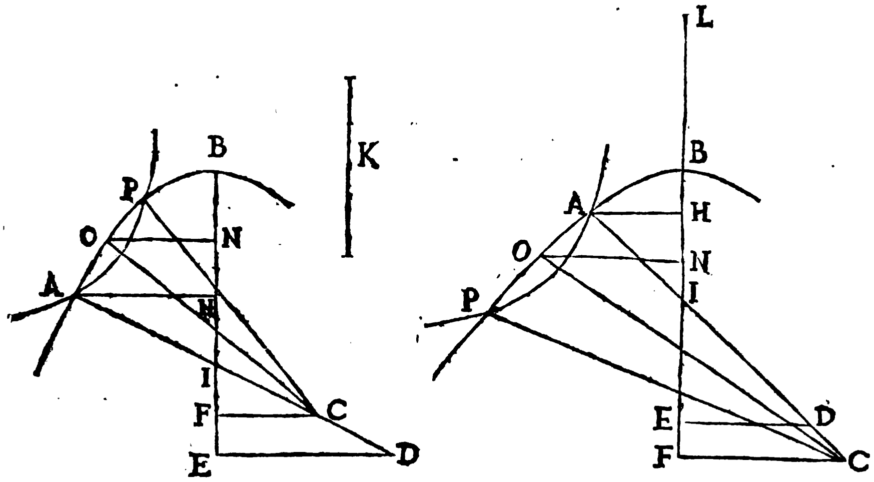




Quoniam in primo caſu maius ſegmentum G L ad eandem L B habet maiorem proportionem, quàm minus ſegmentum ex L F diſſectum; igitur earum ſubtriplicatæ proportiones inæquales erunt, videlicet H L ad L B maiorem proportionem habebit, quàm N L ad ipſam L B, & propterea H L maior erit, quàm N L, & ablata communi L B, erit H B abſciſſa maioris menſuræ maior, quàm N B abſciſa menſuræ minoris. Similiter oſtendetur in ſecundo caſu, quod abſciſſa N B maioris menſuræ maior eſt, quàm B H. Oſtendedum modo eſt, perpendicularem C F in vtroque caſu minorem eſſe trutina K; Si enim hoc verum non eſt, ſi fieri poteſt, ſit C F maior trutina K; igitur ex concurſu C ad ſectionem B A nullus ramus breuiſecans duci poteſt, quod eſt contra hypotheſim; erat enim A I breuiſsima; quare C F non erit maior trutina K. Sit ſecundo C F æqualis K, ſi fieri poteſt, ergo ramus principalis C O ductus legibus propoſit. 51. 52. huius cui competit trutina K erit breuiſecans ſingularis eorum, qui ad ſectionem duci poſſunt, nec vllus alius, præter C O, breuiſecans erit: cadit vero ramus C A infra, vel ſupra ramum C O, propterea quod abſciſſæ B H, & B N inæquales oſtenſæ ſunt; igitur ramus C A diuerſus à breuiſecante ſingulari C O non erit breuiſecans, quod eſt contra hypotheſim; 51. 52. huius.

non ergo perpendicularis C F æqualis erit Trutinæ K , ſed priùs , neque maior illa erat ; igitur perpendicularis C F neceſſario minor erit Trutinæ K ; quod erat oſtendendum.

PROP.8. Addit. *Iiſdem poſitis , ſi in productione breuiſsimæ A I ſumatur quodlibet punctum C citra terminum D perpendicularis D E , à puncto C duci poterit alter ramus breuiſecans ſupra C A incedens ; & ſi punctum C ſumatur vltra punctum D poterit ex C duci alter ramus breuiſecans infra ipſum C A.*

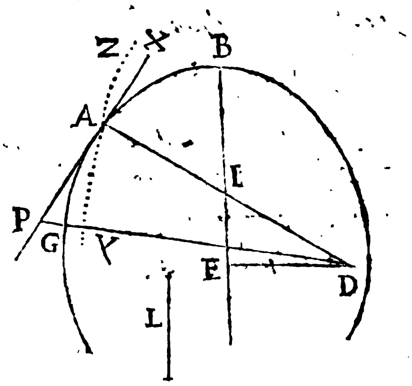


Quoniam qualibet recta C F parallela perpendiculari D E interpoſita inter productionem breuiſsima A I , & axim minor eſt Trutina K noua menſura B F (ex præcedenti propoſ.) propterea ramus principalis C O cadit ſupra ipſum C A , quando B F minor eſt , quàm B E , & tunc quidem duci poteſt hyperbola , ex puncto A circa aſymptotos (vt in propoſitione 51. & 52. factum eſt) quæ producta occurret ſectioni B A inter B , & O , vt in P , & coniuncto radio C P , 51.52.53. huius. *erunt duo rami C A , & C P breuiſecantes , quorum infimus eſt C A. Si vero punctum C ſumatur vltra punctum D , tunc quidem menſura B F maior erit , quàm B E , & propterea abſciſſa N B maior , quàm H B , & ideo principalis ramus C O cadet infra ramum C A ; & denuo facta eadem constructione propoſit. 51. & 52. huius , erunt duo rami C P , & C A breuiſecantes , quorũ ſupremus verſus B erit C A , quod erat probandum.*

PROP.9. Addit. *Sit coniſectio , vel ellipſis portio quadrantis B A G , cuius axis B E , perpendicularis E D , cuiuſque Trutina L ſit minor perpendiculari D E , & centro D , interuallo cuiuslibet rami ſecantis D A circulus Z A Y deſcribatur , & ex puncto A ducatur recta A X contingens ſectio-*

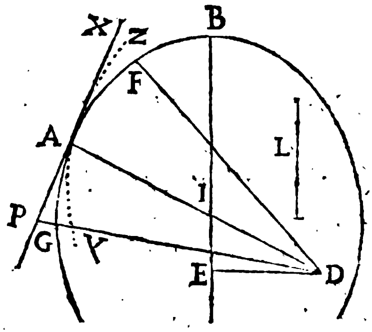
nem:

nem: Dico, quod circumpherentia Z Υ ſecat tangentem rectam lineam x A, & coniſectionem B G in puncto A.



Quoniam perpendicularis D E ponitur maior 51. 52. huius. *trutina L; ergo quilibet ramus D A cadit ſupra breuiſſimam ex puncto A ad axim B E ductam: efficit vero breuiſſima cum tangente* 29. 30. huius. *A x angulum rectum; ergo angulus D A x eſt acutus; & propterea recta A x cadit intra circulum A Z;* 35. 36. lib. 1. *ſed A x cadit extra coniſectionem B A, quàm contingit; ergo circumferentia Z A cadit extra ſectionem B A, & extra tangentem A x: poſtea ducatur quilibet ramus D G infra ramum D A ſecans circumferentiã circuli in Υ: & quia ramus D A propinquior* 64. 65. huius. *eſt vertici B, quàm D G, erit D A minor, quàm D G; eſtque D Υ æqualis D A (cum ſint ambo radij eiuſdem circuli) ergo D Υ minor erit, quàm D G: & propterea quodlibet punctum Υ peripheriæ circularis infra punctum A poſitum cadet intra coniſectionem B G; & ideo circumferentia Z A Υ ſecat tangentẽ, & coniſectionẽ in A, quod erat propoſitum.*

PR. 10. Addit. *Iſdem poſitis, ſit perpendicularis D E æqualis Trutinæ L, & ſit D A ſingularis ille ramus breuiſecans, qui ex concurſu D ad ſectionem* 51. 52. huius. *B G duci poteſt; perficiaturque conſtructio, vt antea factum eſt; Dico, circulum Z A Υ ſecare coniſectionem in A, & contingere rectam A x.*



*Ducatur quilibet ramus D F ſupra breuiſecantem D A, ſecans circuli peripheriam in Z, & quilibet alius ramus D G infra D A ſecans eandem peripheriam in Υ. Et quia ex concurſu D ad ſectionem B G vnicus tantum breui-*Ibidem. *ſecans D A duci poteſt; igitur ramus D F* 67. huius. *propinquior vertici B minor eſt remotiore D A, & D A propinquior vertici B minor eſt remotiore D G: ſuntque rectæ D Z, D Υ æquales eidem D A (cum ſint radij eiuſdem circuli) ergo D Z maior eſt, quàm D F, & D Υ minor, quàm D G; & propterea quodlibet punctum Z circuli ſupra A ſumptum cadit extra coniſectionem B F A, & quodlibet infimum punctum Υ eiuſdem circuli cadit intra eandem coniſectionem A G; quapropter circumferentia circuli Z A Υ ſecat coniſectionem B A G in A. Poſtea quia recta A x contingens ſectionem in A perpendicularis eſt ad breuiſecantem D A, cum I A ſit breuiſſima; igitur recta linea x A, quæ perpendicu-*29. 30. huius. *laris eſt ad radium D A, continget circulum Z A Υ. Quapropter circulus Z A Υ ſecant coniſectionem B A G in A, & tangit eandem rectam lineam A x, quàm contingit ſectio conica B A G, & in eodem puncto A, quod erat oſtendendũ.*

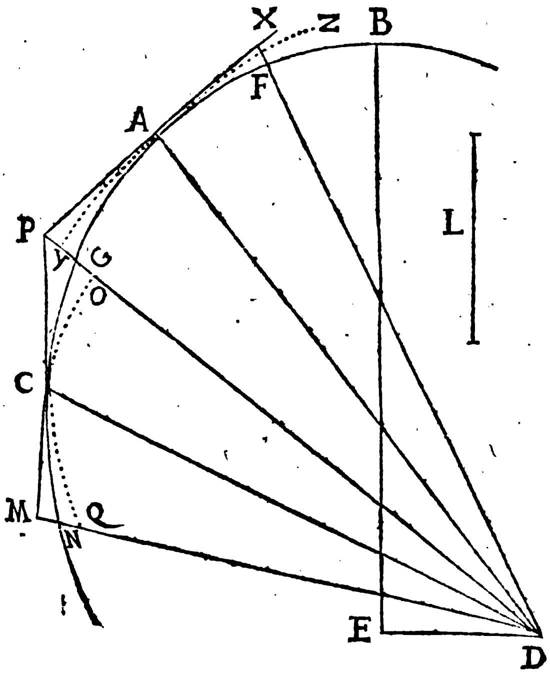
COROL-

COROLLARIVM.

Hinc conſtat, ſupremam circuli peripheriam A Z cadere in locum à tangente X A, & coniſectionem B A contentum, infimam vero circuferentiam A Y cadere ne dum infra tangentem, ſed etiam infra coniſectionem A G; eoquod recta A X cadit extra circuli peripheriam A Z, quàm contingit in A, & eadem circumferentia A Z cadit extra ſectionem A B, quàm ſecat in A, vt dictum eſt.

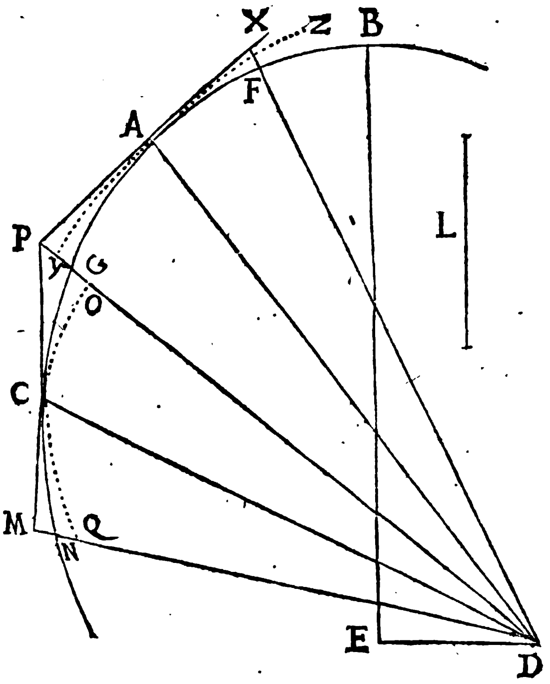
Mirabile quidem hoc videri poterit aliquibus, qui contingentiæ angulos, quos vocant, verè angulos eſſe cenſent; nam hìc duæ circumferentiæ curuæ, conica nimirum B A G, & circularis Z A Y ſe mutuo ſecant in A, & tamen ambo tanguntur ab eadē recta linea A X in eodem puncto A, in quo illæ ſe mutuò ſecant. Vnde colligent etiam, quod anguli contingentiæ facti à coniſectione B A G, & recta linea X A non ſunt æquales inter ſe, quando punctum A in vertice axis non exiſtit; nam duo anguli contingentiæ circumferentiæ circularis, & rectæ tangentis X A æquales ſunt inter ſe: at angulus contingentiæ ſectionis conicæ ſupremus reſpiciens verticem B maior eſt angulo contingentiæ circularis, vt dictū eſt: infimus vero angulus contingentiæ à ſectione conica, & eadem tangente contentus minor eſt eodem angulo contingentiæ circularis, & propterea ſupremus angulus contingentiæ ſectionis conicæ maior erit inferiori.

PROP. 11.
Addit.
Ex 51. 52. 53. huius.



Sit perpendicularis D E minor trutina L, ſintque D A, & D C duo illi rami, qui tantummódo breuiſecantes eſſe poſſunt omnium ramorum ex concurſu D ad ſectionem B C cadentium; atque centro D, interuallo D A deſcribatur circulus Z A Y; pariterque centro D, interuallo D C deſcribatur circulus O C Q; ducanturque rectæ X P, M P contingentes coniſectionem in A, & C. Dico, circulū Z A Y contingere coniſectionem in A, & extra ipſam cadere, at circulum O C Q contingere eandem coniſectionem in C, & intra ipſam cadere.

Ducantur quilibet rami D F, D G ſupra, & infra breuiſecantem D A, ſecantes circulum Z A Y in Z, & Y; pariterque ducantur quilibet rami D G,

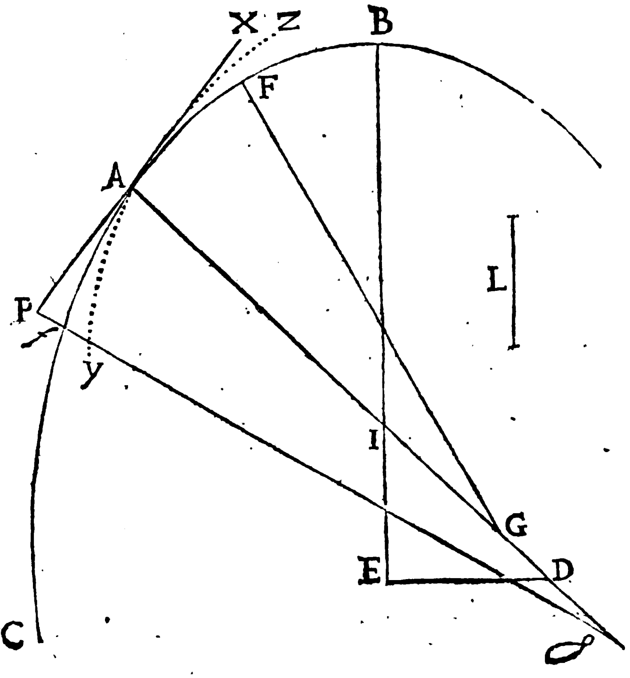


D N ſupra, & infra breuiſecantem D C, ſecantes circulum O C Q, in O, & Q, dummodo D G non ducatur infra D C in primo caſu, nec ſupra D A in ſecundo. Quoniam ramus D A ſupremus duorum breuiſecantium maximus eſt omnium ramorum cadentium ad peripheriam B A C; igitur D A maior 72. huius. erit, quàm D F, & quàm D G; ſunt verò D Z, & D Y æquales eidem D A (cum ſint radij eiuſdem circuli) ergo D Z maior eſt, quàm D F; pariterque D Y maior eſt quàm D G: & propterea duo quælibet puncta Z, Y eiuſdem circuli Z A Y cadunt extra coniſectionem B A G; & ideo circulus Z A Y tantummodo in puncto A coniſectionem extrinſecus tangit.

Poſtea quia ramus D C infimus breuiſecantium eſt minimus omnium ramorum cadentium ex D ad peripheriam A C N; ergo ramus D C minor eſt, quàm 72. huius. D G, & quàm D N: ſunt vero D O, D Q æquales eidem D C (cum ſint radij eiuſdem circuli) igitur D O minor eſt, quàm D G: pariterque D Q minor eſt, quàm D N: quare qualibet duo puncta O, Q circuli O C Q hinc inde à puncto C cadunt intra coniſectionem B C N, & ideo circulus O C Q intrinſecus contingit coniſectionem in C, quod erat oſtendendum.

PROP. 12. Addit.

Si ad coniſectionem, vel ad portionem quadrantis ellipſis B A C, ex concurſu D duci non poſsit, niſi vnicus tantum breuiſecans D A, atque centro D, interuallo D A circulus Z A Y deſcribatur; Dico, omnium circulorum tangentium eandem rectam lineam X A P (quàm cõtingit quoque coniſectio in A) vnicum eſſe circulum

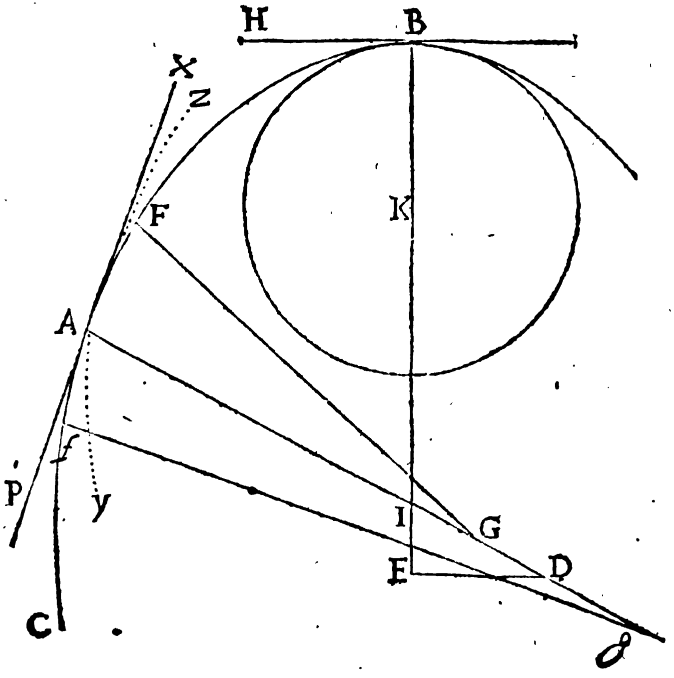


culum Z A Y, qui coniſectionem in puncto A ſecat.

Sumatur enim quodlibet punctum G in productione breuiſsima A I ſupra, vel infra punctum D: manifeſtum eſt (ex 8. præcedentium propoſit.) à puncto G duci poſſe duos breuiſecantes ramos, quorum A G erit infimus, ſi punctum G cadit ſupra punctum D, & tunc circulus radio G A deſcriptus continget coniſe- 11. Additarū. ctionem intrinſecus in A: ſi vero punctum g cadat infra punctum D, tunc pa- 8. Additarū. riter ex g duo breuiſecantes duci poſſunt ad ſectionem, quorum ſupremus erit g A; & propterea circulus radio g A deſcriptus continget coniſectionem B A C 11. Additarū. extrinſecus in A; quapropter circulus radio D A deſcriptus (quem contingit eadem recta linea X A quæ tangebat ſectionem in A) vnicus erit, qui ſectionem B C ſecet in A, quod erat oſtendendum.

PROP. 13. Addit.

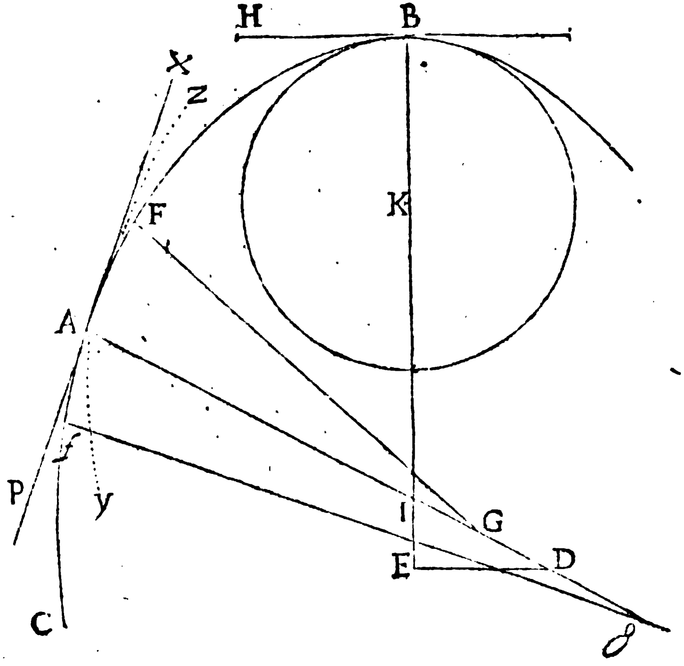
Circulorum omnium intrinſecus tangentium coniſectionem non in axis vertice, aſsignari non poteſt maximus: tangentium vero intrinſecus ſectionem in termino axis maximus erit, cuius radius æqualis eſt ſemierecto.



Repetatur figura, & hypotheſis præcedētis propoſitionis. Quoniā quilibet circulus radio G A minori, quàm D A deſcriptus ſemper intrinſecus tangit coniſectionem in A (vt in præcedēti propoſitione dictum eſt) vbicumque ponatur centrum G ſupra punctū D; neque augendo radium G A efficitur alius contactus circuli, & ſectionis, quàm intrinſecus, & tunc primo circulus deſinit intrinſecus tangere ſectionem in A, quando D A efficitur radius, ſcilicet quando non amplius intrinſecus ſectionem tangit, ſed eam ſecat in A; quapropter aſsignari non poteſt maximus circulorum tangentium intrinſecus ſectionem in A. Quod vero circulorum intrinſecus tangentium eandem ſectionem in vertice axis B, ille, cuius radius B K æqualis eſt ſemierecto B H ſit maximus, oſtenſum eſt à Maurolico propoſ. 5. 8. & 11. libri 5. Conicorum. Patet ergo propoſitum.

PROP. 14. Addit.

Iiſdem poſitis: dico circulorum omnium extrinſecus tangentium coniſectionem minimum aſsignari non poſſe.



11. Addit. *Sumpto in eadem figura quolibet puncto* g *infra punctum D, quoniam circulus radio* g *A deſcriptus contingit extrinſecus coniſectionem in A, nec vnquam ceſſabit prædictus cōtactus extrinſecus, licet magis, ac magis in infinitum punctum* g *ipſi D propinquior fiat, & tunc demum ceſſat huiuſmodi extrinſecus contactus, quando deſcribitur circulus radio* **D** *A, qui quidem ſectionem ſecat in A, vt dictū eſt; quapropter minimus omniū extrinſecus ſectionem tangentium in A aſsignari nequit. Quod vero extrinſecus tangentium eandem ſectionem in vertice axis B non poſsit aſsignari minimus, patet; nam omnes* Maurol. 4. 7. & 10. lib. 5. Conic. *circuli, quorum radij maiores ſunt ſemierecto ſectionis, eam extrinſecus tangunt; & tunc demum eiuſmodi contactus extrinſecus ceſſat, quando radius circuli æqualis efficitur ſemierecto: at tunc intrinſecus ſectionem tangit; quapropter reperiri non poteſt minimus circulorum coniſectionem extrinſecus tangentium: quod erat oſtendendum.*

Ex dictis colligitur, quod ex concurſu ad quamlibet coniſectionem poſsunt duci tres, vel quatuor ramiſecantes inter ſe æquales: in ellipſi vero, & in reliquis ſectionibus ſi rami ſecantes non fuerint, duci poteſt vnus, vel duo rami inter ſe æquales.

Nam circulus radio alicuius breuiſecantis deſcriptus tangit, vel ſecat coniſectionem, & ſiquidem eam extrinſecus tangit, neceſſario eandem bis ſecat, ſi fuerit parabole, aut hyperbole, quæ infinitè augētur, & dilatātur; & propterea radij circuli ad occurſus, & contactum ducti æquales ſunt interſe; & ideo tres rami tantum erunt æquales: ſi vero deſcribatur circulus, cuius centrum eſt concurſus, radius vero minor eſt maximo, & maior minimo duorum breuiſecantium: tunc quidem neceſſario circulus quatuor in punctis ſectioni conicæ occurret: & propterea quatuor radij ad occurſus ducti erunt inter ſe æquales.

At in ellipſi ſi concurſus fiat circuli centrum, radius vero breuiſecans maximus trium, qui in ea duci puſſunt, circulus prædicto radio deſcriptus continget quidem exterius ellipſim, neque deinceps vnquam ei occurret: & propterea ramus ille maximus erit vnicus, cum nullus alius ei æqualis duci poſsit in eadem ellipſi: ſi verò à concurſu in productione axis ellipſis poſito deſcribatur circulus, cuius radius minor ſit maximo ramo, ſed maior vtroque terminato; tunc quidem circulus duobus in locis ellipſi occurret; & propterea duo tantum rami inter ſe æquales erunt; pari modo, quando à concurſu tres breuiſecantes ad ellipſin

educun-

educuntur, tunc quidem circulus, cuius centrum eſt concurſus, radius vero minor maximo breuiſecantium, & maior duobus reliquis neceſſariò ellipſin duobus in locis ſecabit; & ideo duo tantummodo rami inter ſe æquales erunt.

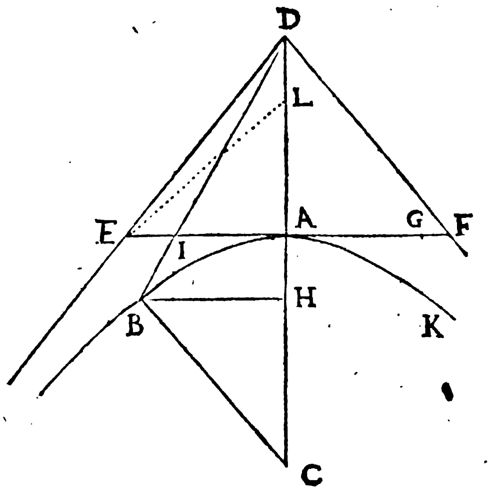
SECTIO DECIMAQVINTA

Continens Propoſ. XXXXI. XXXXII. XXXXIII. Apollonij.

PROPOSITIO XXXXI.

a IN hyperhola angulus contentus à linea breuiſſima, & à menſura minor eſt angulo compræhenſo à linea diſtante cum cõtinente.

b Sit hyberbole A B, eius axis D C, linea breuiſſima B C, duo continentes D E, D F, & diſtantia ſit A E, & dimidium erecti A G: Dico, angulum B C D minorem eſſe angulo D E A. Educamus itaque perdendicularem B H, & iungamus B D, quæ ſecet A E in I. Quia D A ad A G eſt, vt D H ad H C (14. ex 5.) & I A ad A D eſt, vt B H ad H D; ergo ex æqualitate I A ad A G, eandem proportionẽ habebit, quàm B H ad H C, & propterea E A ad A G, nempe D A ad diſtantiam A E maiorẽ proportionem habebit, quàm B H ad H C igitur angulus B C H minor eſt, quàm D E A, quod erat oſtendendum. 9. huius.

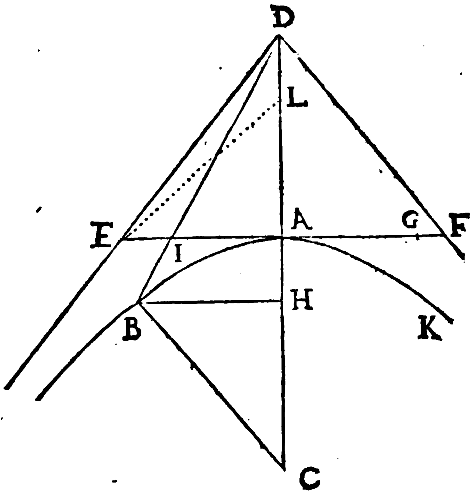


PROPOSITO XXXXII.

a IN parabola lineæ breuiſſimæ productæ occurrunt ſectioni ex vtraque parte.

Quoniam breuiſſima eſt linea recta ſecans diametrum paraboles intra ſectionem; & propterea ſectioni occurret ex vtraque parte (28. ex pr.) 27 lib. 1. & hoc erat oſtendendum.

PROP.



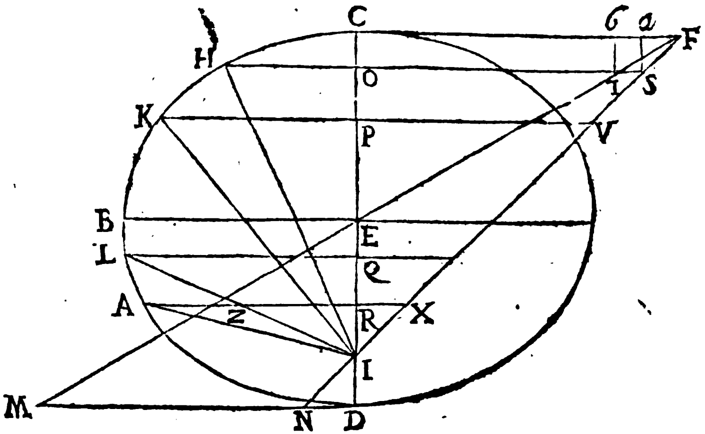
Lineæ vero breuiſſimæ, quæ cadunt ad peripheriam ſectionis B A, continent angulos minores, quàm B C D, vtique non occurrunt D F, &c. *Ideſt: quia qualibet* d
breuiſſima ex puncto peripheriæ A B
ad axim ducta efficit angulum propin-
26. 27. huius. *quiorem vertici, minorem ipſo angulo*
C; & propterea qualibet breuiſſima
ad peripheriam A B extenſa ſecabit ne-
28. huius. *ceſſario ipſam B C vlterius productam*
ad partes C: ſed prius oſtenſa fuit B
C parallela asymptoto D F; igitur qua-
libet breuiſſima ad peripheriam A B
educta ideſt inter parallelas poſita non
occurret alteri æquidiſtantium D F ad partes F, ſed ad partes oppoſitas verſus
Conuerſ. 8. lib. 2. *D; eo quod qualibet recta linea intra hyperbolam ducta non ſecat peripheriam ſe-*
ctionis in ea parté, in qua continentem D F nō ſecat; At qualibet alia breuiſſima
26. 27. huius. *infra C B ducta, neceſſario efficiet ad axim angulum maiorem, quàm C; & pro-*
28. huius. *pterea vlterius producta ſecabit ipſam B C ad partes C; ſed qualibet breuiſſima*
extra parallelas poſita quæ ſecat vnam æquidiſtantium B C, ſecabit quoq; reli-
quam ad eaſdem partes F C; quare prius ſectioni occurret, vt dictum eſt.

SECTIO DECIMASEXTA

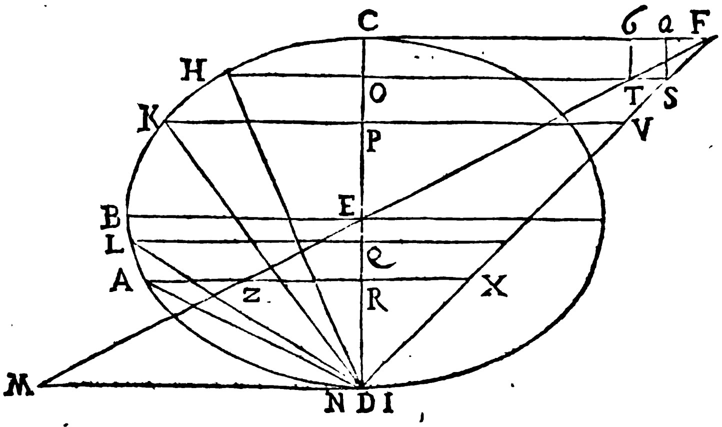
Continens XVI. XVII. XVIII. Propoſ. Apollonij.

SI menſura comparata ſumpta fuerit in axe recto minore ellipſis, erit maximus ramorum ab eius origine egredientium, & illi propinquior maior eſt remotiore: minimus vero ramorũ eſt differentia recti, & comparatæ, & illi propinquior, minor eſt remotiore, atque exceſſus quadrati comparatæ ſupra quadratum cuiuſcunque rami aſſignati æqualis eſt exemplari applicato ad abſciſſam illius rami, ſiue comparata ſit minor, aut æqualis, aut maior recto. a

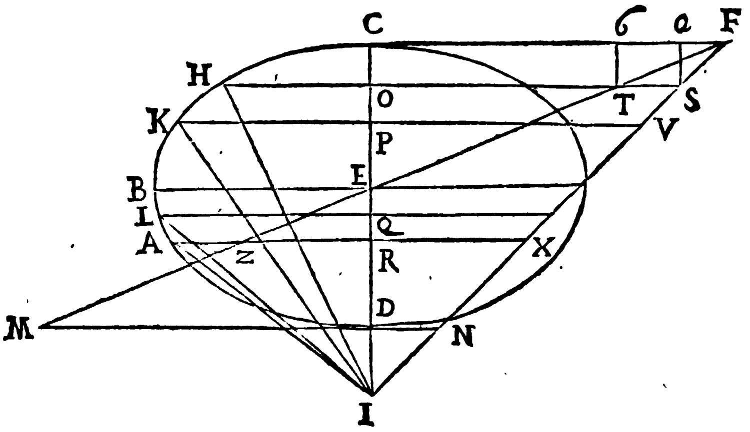
Sit D C rectus axis minor ſectionis ellipticæ A B C ſitque C I comparata, & rami I H, I K, I B, I L, I A, I D, & ſemiſſis erecti ſit C F, & centrum E, & edu-



educamus F E quouſque ſecet D M perpendicularem ad axim in M, &
F I occurrat D M in N, & ducantur ad axim perpendiculares H O T S,
K P V, B E, L Q, A R: & ſit in prima figura C I minor recto, in ſecunda
b æqualis, in tertia vero maior. Conſtat, quemadmodum demonſtrauimus
in propoſitione ſexta huius, quod quadratum I C æquale ſit duplo
trianguli I C F; at quadratum O H duplum eſt trapezij O T F C
(1. ex 5.) & quadratum I O duplum eſt trianguli O I S; ergo quadratum
I C, nempe duplum trianguli I F C excedit quadratum I H duplo
c trianguli F T S, quod eſt æquale rectangulo T a: & conſtat, vti dictum



eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C; ergo quadratum I C excedit
quadratum I H exemplari applicato ad O C abſciſſam ipſius I H. Patet
etiam, quod quadratum I C excedit quadratum I K exemplari applica-
d to ad P C; idemque conſtat in I B; igitur I C maior eſt, quàm I H, &
I H, quàm I K, & I K, quàm I B: poſtea, in figura prima, & tertia,



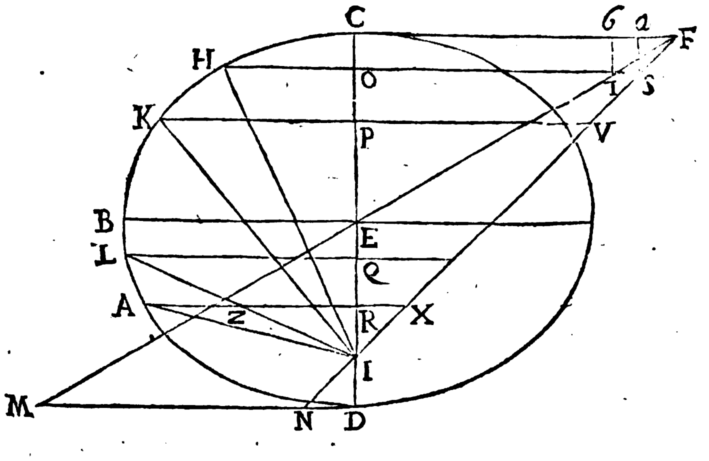
e quia triangulum F C E æquale eſt triangulo D E M; ergo quadratum
I C æquale eſt duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, quadratum
vero I D æquale eſt duplo trianguli D I N; igitur quadratum

I D minus eſt, quàm quadratũ I C duplo trianguli N F M, quod æquale eſt exemplari applicato ad D C, & quadratum I R æquale eſt duplo trianguli I X R, & quadratum A R æquale eſt duplo trapezij R M (3. ex 5.) ergo quadratũ I A minus eſt, quàm quadratum I C duplo trianguli F Z X, quod æquale ex exemplari applicato ad C R (6. ex 5.) ſimiliter quadratum I L minus eſt, quàm quadratum I C exemplari applicato ad C Q; eſtque C D maior, quàm C R, & C R quàm C Q; ergo I A maior eſt, quàm I D, & I L, quàm I A; quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVI. XVII. XVIII.

a Comparata ſi fuerit ex recto duorum axium ellipſis erit maximus ramorum, &c. *Addidi particulam illam axis minoris, quæ in textu deficiebat, nunquam enim C F ſemiſsis lateris recti, eſſe poteſt maior C E ſemiſſe lateris tranſuerſi, niſi C D fuerit axis minor ellipſis.*

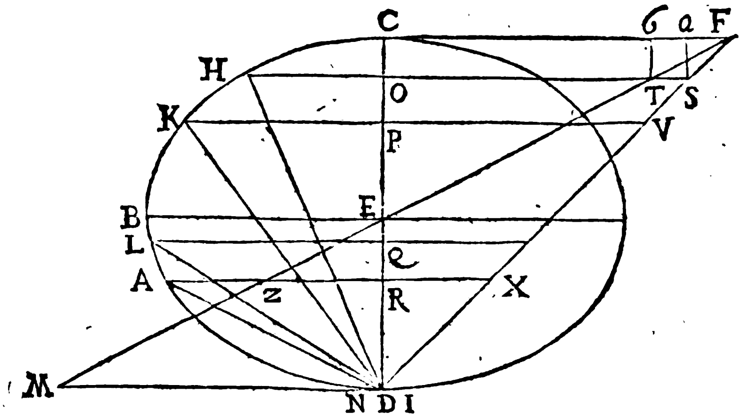
b Conſtat, quemadmodum demonſtrauimus in propoſitione 6. &c. *Quoniã menſura I C ſupponitur cõparata, ideſt æqualis ipſi C F ſemiſsi lateris recti; propterea triangulum I C F iſoſceleum erit, & rectangulum in C; & ideo quadratum I C æquale erit duplo trianguli I C F: eadem ratione propter parallelas S O, & C F, erit triangulum I O S ſimile triangulo I C F, & propterea illud quoque iſoſceleum erit, & rectangulum in O, & ideo quadratum I O æquale erit duplo trianguli I O S: eſt verò quadratum O H æquale duplo trapezij F T O C; igitur quadratum I H (quod eſt æquale duobus quadratis I O, O H circa angulum rectum O) æquale erit duplo trianguli I O S cum duplo trapezij F T O C, ſed hæc duo ſpatia minora ſunt duplo integri trianguli I C F, eſtque defectus duplum trianguli F T S, ſiue rectangulum S T* b a; *igitur duplum trianguli I C F, ſiue quadratum I C maius eſt quadrato I H, & exceſſus eſt rectangulum T* a: *quod vero rectangulum T* a *ſit exemplar demonſtrabitur modo, vt in ſexta propoſitione huius.* 1. huius.



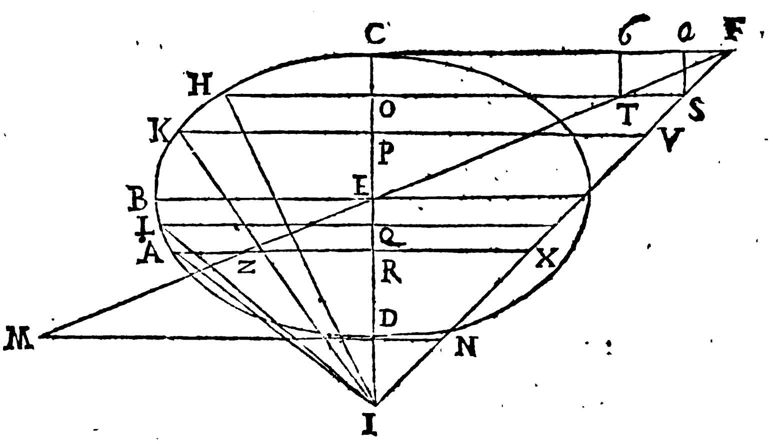
c Et conſtat, vt dictum eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C, &c. *Quoniam recta S* a, *T* b, *I C ſunt parallelæ, erunt triangula I C F, & S* a *F,*

ſimilia;

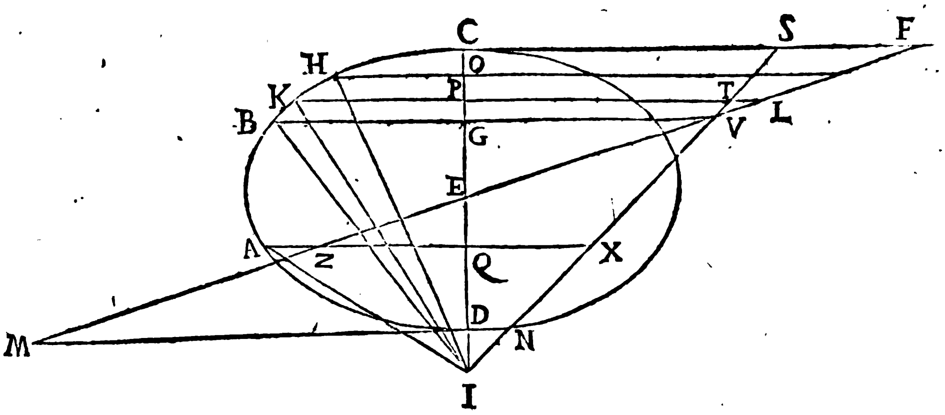
ſimilia; pariterque duo triangula E F C, T b *F ſimilia erunt; & propterea S* a *ad* a *F eandem æqualitatis proportionem habebit, quàm I C habebat ad C F, ſimiliter T* b *ad* b *F eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F, ſeu quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum: eſt vero T* b *æqualis S* a*, ſeu* a *F; ergo F* a *ad F* b *eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum; & comparando antecedentes ad differentias terminorum, erit F* a*, ſeu* b *T ad* b a*, vt latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare parallelogrammũ rectangulum S* b*, erit exemplar applicatum ad abſciſſam O C.* Lem. 1. huius. Defin. 9. huius.



d Igitur I C maior eſt, quàm I H; & I H, quàm I K, &c. *Eo quod abſciſſa O C minor eſt, quàm C P, & C P minor, quàm C E: ſuntque prædicta abſciſſa latera homologa exemplarium, quæ ad eaſdem abſciſſas applicantur; atque prædicta exemplaria ſimilia ſunt inter ſe, cum circa angulos rectos latera habeant eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I H minus eſt exceſſu eiuſdem quadrati I C ſupra quadratum I K; & adhuc minus exceſſu quadrati I C ſupra quadratum I B, & propterea recta I C minori exceſſu ipſam I H ſuperabit, quàm ipſam I K; & adhuc minori exceſſu ſuperabit I K, quàm excedat I B; & ideo I C maior erit, quàm I H; & I H maior, quàm I K, & I K maior, quàm I B.* Defin. 9. huius.



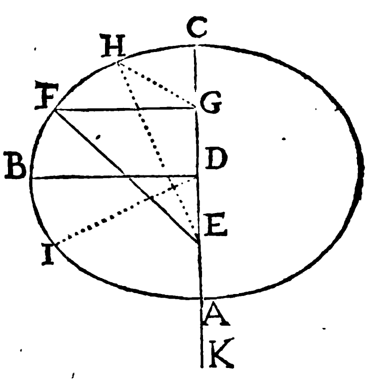
b Quoniam proportio E G ad G I facta eſt, vt E C ad C F, nempè E G ad G V, erit G V æqualis G I; & propterea quadratum G I æquale eſt duplo trianguli G I V, & quadratum G B æquale eſt duplo trapezij G F (1. ex 5.) ergo quadratum I B æquale eſt duplo trianguli I C S cum



duplo trianguli F S V; & ſic conſtat, quod quadratum I K æquale eſt duplo trianguli I C S cum duplo trapezij S L; & propterea quadrati I B exceſſus ſupra quadratũ I K æqualis erit duplo trianguli L T V, quæ æqualia ſunt exemplari applicato ad G P (6. ex 5.) atque ſic oſtendetur, quod I B potentia ſuperat I H; eſtque exceſſus exemplar applicatum ad G O, & ſuperat quoque I A poteſtate, eſtque exceſſus æqualis exemplari applicato ad G Q; eſt vero G O maior, quàm G P; ergo I B maior eſt quã I K, & quàm I H; & ſic oſtendetur, quod I B maior ſit, quàm I A; & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

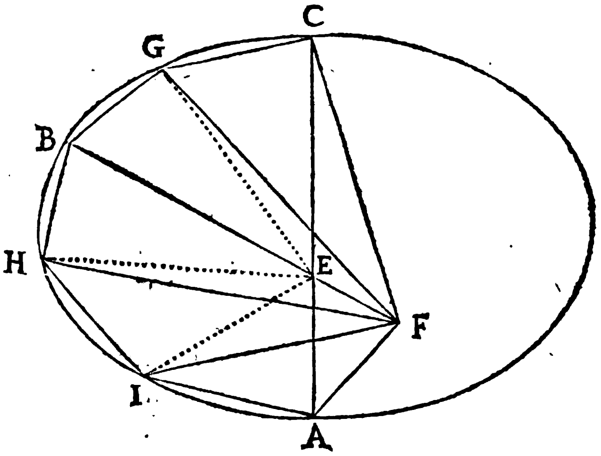
a E Contra, ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, at non in cẽtro ellipſis, nec ſit menſura continet cum ipſa menſura angulum acutum, & eius inuerſa ad abſciſſam à potentiali cum origine habet eandem proportionem figuræ axis recti minoris: ſi vero educatur ex centro, erit perpendicularis ſuper rectum.



b Sit ſectio elliptica A B C centrum D, & E origo, quæ ſit in axi minori C A, & E F ramus omnium maximus; erit vtique E C, vel maior ſemie-

ſemierecto, aut æqualis, aut minor illo; ſed ſi eſſet æqualis, aut maior eſſet
quoque E C maximus ramorum (16. 17. 18. 19. ex 5.) ergo C E minor
c eſt dimidio erecti, & ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſq;
ad E eandem proportionẽ habebit, quàm D C ad ſemiſſim erecti; & ſit D G
ad G E, & ex G ad axim ducamus perpendicularem: hanc, dico, occurrere
ſectioni in F; alioquin occurrat ei in H, & iungamus E H; igitur E
H eſt maximus ramus (20. ex 5.) & propterea maior, quàm E F, qui
maximus ſuppoſitus fuit, & hoc eſt abſurdum; igitur occurrit ſectioni in
d F; & quia G eſt rectus angulus, erit F E G acutus. Si verò ramus maximus
educatur *ex* cẽtro, vt D B erit perpendicularis ſuper A C; alioquin
educatur D I perpẽdicularis ad axim; igitur D I eſt ſemiſsis axis tranſuerſi
(11. ex 5.) & propterea eſt ramus omnium maximus, ſed D B ſuppoſitus
fuit maximus, quod eſt abſurdum, vti dictum eſt; quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XXV.



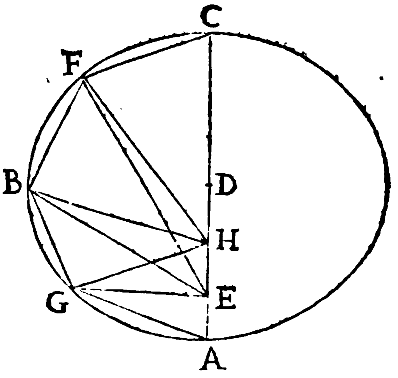
a SI in ellipſi ramus maximus E B mẽſuram ſecans vltra originem E, in axe eius minori exiſtentem, producatur ad F, fiet F B maximus omniũ ramorum F G, F H, F I, ab eodem puncto, ad ſectionem A B C cadentium, & propinquior maximo maior eſt remotiore.

b Educamus B G, B H, H I, I A, E G, E H, E I; & quia E B maior eſt, quàm E H, erit angulus B H E maior, quàm E B H; igitur angulus B H F multo maior erit, quàm H B F, & propterea B F maior, eſt quàm F H; atque ſic demonſtrabitur, quod H F maior ſit, quàm F I, & F I, quàm F A; & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. XIX.

a SI vero fuerit menſura E C ex recto duorum axium ellipſis A B C, ſed ſit maior comparata, &c. *Similiter hic declarari debet, quod axis rectus ſit minor; & propterea lego: Si menſura E C ſumatur in axe minori ellipſis, &c.*

Nam



b

Nam ſi coniungamus A G, B G, B F, F C, &c. *Ideſt; ſecetur C H æqualis comparata, ſeu ſemiſsi lateris recti axis A C; quia menſura E C ſuppoſita eſt maior comparata, erit quoque E C maior, quàm C H, & propterea recta linea E F cadet infra H F; ideoque angulus C F E maior erit angulo C F H: eadem ratione angulus F B E maior erit angulo F B H, atque angulus B F E minor erit angulo B F H, & ſic de reliquis, cumque C H ſit æqualis comparatæ, & ſit maior C D ſemiſſe axis recti minoris, omnium ramorum ex origine H ad ellipſim C F B G, cadentium maximus erit H C; & propterea H C maior erit, quàm H F, & in triangulo H F C angulus H F C oppoſitus maiori lateri maior erit angulo C; eſtque oſtenſus angulus E F C maior angulo H F C; igitur in triangulo C E F erit angulus C F E maior angulo F C E; & propterea ramus E C maior erit, quàm E F: ſimili modo, quia ramus H F propinquior maximo maior eſt remotiore H B, erit angulus H F B minor angulo H B F: ideoque angulus E F B, pars minoris, adhuc minor erit angulo E B F, maiorem excedente; & propterea in triangulo E F B erit ramus E F propinquior maximo E C, maior remotiore E B, &c.*

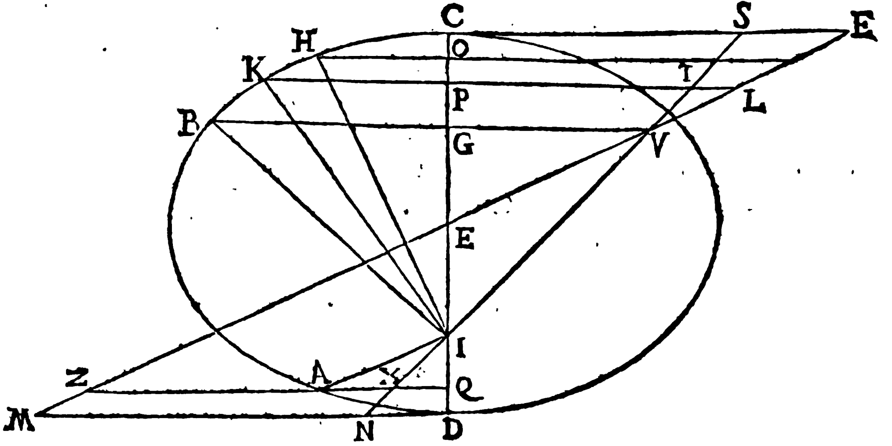
16.17.18. huius.

Ibidem.

Notæ in Propoſit. XX. XXI. XXII.

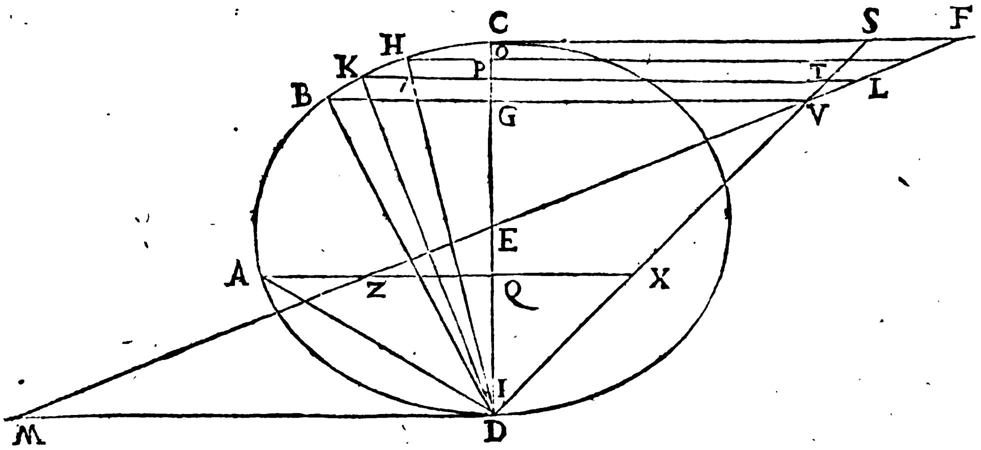
a

SI vero fuerit menſura I C minor comparata, quæ ſit C F, nempe ſemiſſe erecti, & maior dimidio recti E C, & origo ſit in recto, aut in eius productione, vt in I; tunc maximus ramorum egredientium ex origine, vt I A, I B, I K, I H eſt cuius inuerſi proportio E G (poſt abſolutionem figuræ cum perpendicularibus, & lineis præcedentibus) ad abſciſſam eius potentialis ex menſura cum origine, vt I G eſt, vt proportio figuræ recti, vt D C ad erectum illius, & quadratum eius, nẽpe quadratum



dratum maximi, qui eſt I B, ſuperat quadratum cuiuslibet illorum exemplari applicato abſciſſionibus eorum potentialium, &c. *Senſus huius textus penè vix diuinari poteſt inter tot menda, & phraſis Arabicæ obſcuritatem; puto tamen, eum eſſe, quem in textu appoſui, vbi paucula verba immutaui, quæ deſiderari videbantur, aliqua verò tranſpoſui, vt ſenſus continuari poſſet.*

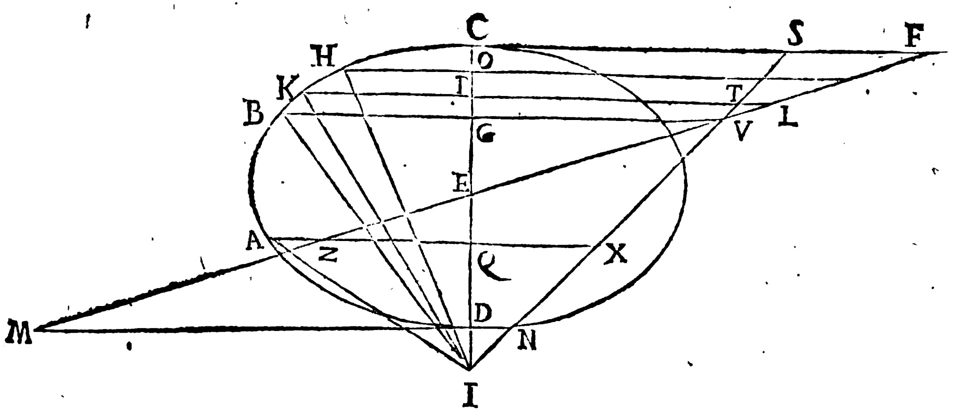
Cæterum animaduertendum eſt in hiſce propoſitionibus, ſicuti in 8. 9. & 10. huius libri ſupponi vt res manifeſta intra ſectionem duci poſſe à puncto originis ramum maximum, vel breuiſſimum, ideſt neceſſario reperiri debere ramum, cuius potentialis abſcindit à menſura verſus originem rectam lineam, ad quàm inuerſa eandem proportionem habeant quàm axis tranſuerſus ad ſuum erectum: hoc autem ſine demonſtratione admittere nefas eſt. Ergo quod in textu deſideratur ſuppleri poteſt hac ratione. Quia C I maior eſt, quàm C E, ſed minor, quàm C F; ergo eadem E C ad minorem C I maiorem proportionẽ habet, quàm ad C F; & comparando antecedentes ad differentias terminorum C E ad E I maiorem proportionem habebit, quàm E C ad differentiam ipſius C F à C E; quare aliqua magnitudo minor quàm prima ſcilicet G E ad E I eandem proportionem habebit, quàm C E ad differentiam ipſarum C F, & C E: & iterum comparando antecedentes ad ſummas terminorum E G ad G I eandem proportionem babebit, quàm E C ad C F; quare punctum G cadet intra ſectionem, pariterq; G B ad axim perpendicularis occurrens ſectioni in B cadet intra eandem ſectionem: & ideo duci poterit ramus I B, qui oſtendetur maximus reliquorum omnium.



b Quoniam proportio G E ad E I facta eſt, vt E C ad C F, &c. *Nam vt axis D C ad eius erectum, ſeu vt ſemiaxis E C ad ſemierectum C F, ita facta eſt E G ad G I: ſed propter parallelas G V, & F C: & ſimilitudinem triangulorum E G V, E C F eſt E G ad G V, vt E C ad C F; & propterea eadem E G ad duas G V, & G I habebit eandem proportionem, & ideo I G æqualis erit G V, & triangulum I G V iſoſceleum, & rectangulum erit in G; quare quadratum I G duplum erit trianguli I G V: eſt verò quadratum B G æquale duplo trapezij G C F V; ideſt duplo trapezij G C S V, cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B (quod eſt æquale duobus quadratis I G, G B circa angulum rectum G) æquale eſt duplo trianguli I G V duplo trapezij G*

1. huius.

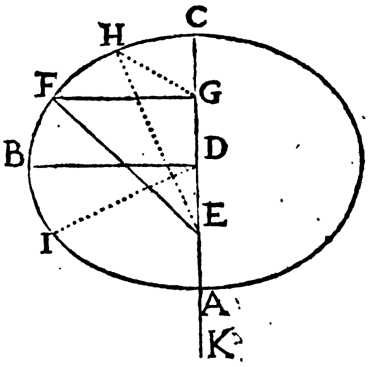
C S V cum duplo trianguli F S V; ideſt quadratum I B aquale eſt duplo trianguli I S C cum duplo trianguli F S V; & quoniam propter parallelas C S, & G V, triangulum I C S ſimile eſt iſoſcelio, & rectangulo triangulo I G V, erit, quadratum I C æquale duplo trianguli I C S iſoſcelei, & rectanguli in C; ergo exceſſus quadrati I B ſupra quadratum I C aquale eſt duplo trianguli F S V; eſt verò rectangulum, cuius baſis F S, altitudo verò C G aquale duplo trianguli F S V; atque huiuſmodi rectangulum eſt exemplar applicatum ad abſciſſam G C, vt in notis prop. 16. 17. & 18. *litera* c. *oſtenſum eſt igitur quadrati I B exceſsus ſupra quadratum I C eſt exemplar applicatum ad abſciſſam G C: Simili*



modo quadratum I K oſtendetur æquale duplo trianguli I C S vna cum duplo trapezij L T S F; atque dupli trianguli I C S cum duplo trianguli F S V exceſſus ſupra duplum trianguli I C S cum duplo trapezij L T S F eſt duplum trianguli L T V; ergo quadrati I B exceſſus ſupra quadratum I K eſt duplum trianguli L T V, ſeu exemplar applicatum ad G P differentiam abſciſſarum. Poſtea quia triangula ſimilia E C F, E D M ſunt æqualia, cum eorum homologa latera E C, E D æqualia ſint; ergo addito communi triangulo I E V, erit triangulum E C F cum triangulo E I V, ſeu triangulũ I C S cum triangulo F S V æquale duobus triaugulis E D M, & I E V, ſeu duobus triangulis M V N, & N I D: erat autem quadratum I B æquale duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B æquale erit duplo trianguli M N V cum duplo trianguli N I D; eſtque quadratum I D æquale duplo trianguli iſoſcelei, rectanguli I D N; igitur quadratum I B ſuperat quadratum I D, eſtque exceſſus duplum trianguli M N V ſeu exemplar applicatum ad G D. Tandem quia quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli iſoſcelei rectanguli I Q X, atque quadratum Q A æquale eſt duplo trapezij Q M; igitur quadratũ hypothenuſæ I A æquale eſt duplo trianguli I D N cum duplo trapezij X N M Z; ergo exceſſus quadrati I A ſupra quadratnm I D æqualis eſt duplo trapezij X N M Z; exceſſus autem trianguli N M V ſupra trapezium N Z eſt triangulum X Z V; & erat quadrati I B exceſſus ſupra quadratum I D, triangulum ipſum M V N bis ſumptum. Igitur quadrati I B exceſſus ſupra quadratum I A eſt duplum trianguli X Z V, ſeu exemplar applicatum ad G Q. Quod autem exemplaria æqualia ſint prædictis triangulis bis ſumptis, oſtenſum eſt in prop. 6. huius.

Notæ

Notæ in Propoſ. XXIII. XXIV.



a E Contra linea maxima, ſi non egrediatur ex centro, continet cum mẽſura angulum acutum, & proportio illius inuerſæ ad abſciſſam eius potentialis ex mẽſura cum origine, eſt vt proportio figuræ recti. Si verò fuerit extra centrum, erit perpendicularis ſuper rectum, &c. *Manifeſtè nō nulla in textu Arabico deficiunt; aliqua verò immutari debent; alioquin propoſitio vera non eſſet, itaque legendum puto: E contra ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, &c: Vt in textu habetur.*

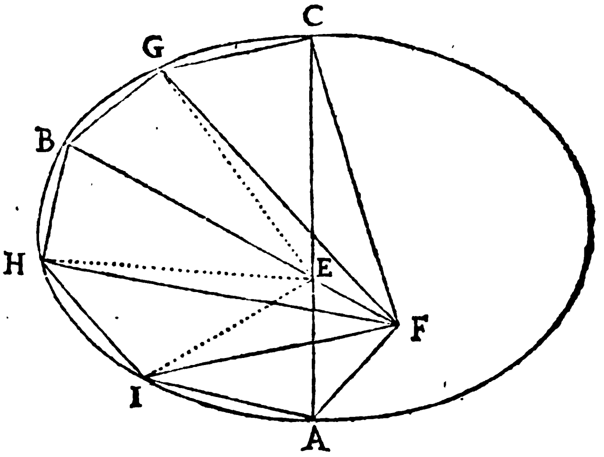
b Sit ſectio A B C elliptica, & E origo, & E F linea maxima, &c. *Addidi pariter in hac expoſitione verba, quæ deficiunt; nimirum: Sit centrum D, & origo E, quæ ſit in axi minori A C.*

c Et ideo D C ad dimidium erecti eſt linea minor, quàm D C, & ſit D G ad G E, &c. *Nonnulla adiungi debent huic textui corruptiſsimo, ne ſint verba nil prorſus ſignificantia, itaque ſic legendum puto. Et ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſque ad E eandem proportionem habebit, quàm D C ad ſemiſſem erecti; & ſit D G ad G E, &c. Quæ verba breuiſsimè more Apollonij expoſita ſic confirmantur. Quia E C oſtenſa eſt minor dimidio erecti axis minoris C A, fiat C K æqualis dimidio erecti; erit E C minor quàm C K, & ablata communi D C erit D E minor, quàm K D; & propterea D E ad eandem D C minorem proportionem habebit, quàm K D: fiat E D ad D G, vt K D ad D C, erit D G minor, quàm D C: & componendo, E G ad G D eandem proportionem habebit, quàm K C ad C D, & inuertendo, D G ad G E eandem proportionem habebit, quàm D C ſemiſsis axis recti ad C K ſemiſsim erecti eiuſdem axis; & ex G ducatur G F perpendicularis ad axim, quàm, dico, occurrere ſectioni in F termino maximi rami E F.*

d Et ſi maxima fuerit extra centrum, vt D B erit perpendicularis, &c. *Textus euidenter corruptus ſic corrigi debet. Si verò ramus maximus educatur ex centro, vt D B, &c.*

Notæ in Propoſ. XXXV.

a SI producatur vna linearum maximarum, vt E B ad latus illius originis E ad punctum F, fiet maxima linearum egredientium ab illo puncto F G, F H, F I, F A ad ſectionem B I A in directum, & propinquior illi maior eſt remotiore, &c. *Immutaui nonnulla, quæ ad propoſitionis integritatem facere videbantur: vt in textu habetur.*

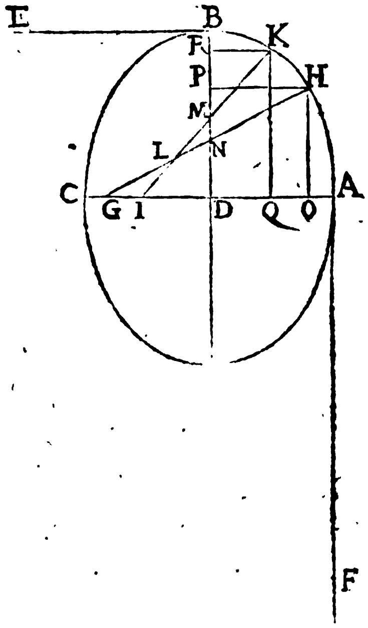


Erit angulus B H E maior, quàm E B H, &c. *Eo quod ramorum omnium ab origine E ad ellipſim C B H cadentium maximus ſupponitur E B; ergo maior erit, quàm E H, & propterea angulus E B H minori lateri oppoſitus minor erit angulo E H B: cadit vero recta H F infra H E; propterea quod punctum F infra punctum E exiſtit; igitur angulus F H B maior eſt angulo E H B; & ideo angulus F H B multo maior erit angulo F B H; igitur ramus F B, maiorem angulum ſubtendens, maior erit, quàm F H, &c.* b

SECTIO DECIMAOCTAVA

Continens XXXII. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XXXX. XXXXVII. XXXXVIII. Propoſit. Apollonij.

PROPOSITIO XXXII.



IN ellipſi A B C rami cuiuslibet maximi G H vtrumque axim ſecantis portio N H inter axim maiorem, & ſectionem intercepta, eſt linea breuiſsima. a

Producatur rectus axis minor A D vltra centrum D ad I, G, & ex I, G ad ſectionem ducantur duo rami maximi G H, I K, qui ſecent tranſuerſum B D in N, M, & ſit B E dimidium erecti axis B D, & A F dimidium erecti axis A G; & educantur perpendiculares ad axes H O, H P, K Q, K R. Dico, N H breuiſsimum eſſe ramorum egredientium ex H. Quia G H eſt linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, vt D O ad O G (22. ex 5.) nempe N H ad H G, ſeu N P ad b

PD;

P D; ergo B E ſemiſsis erecti ad B D ſemiſsim tranſuerſi eſt, vt N P ad P D, & ideo N H eſt breuiſsima linearum egredientium ex N (10. ex 5.) & ſic oſtendetur, quod ſi K I fuerit maximus, erit K M breuiſſima.

PROPOSITIO XXXIII. XXXIV.

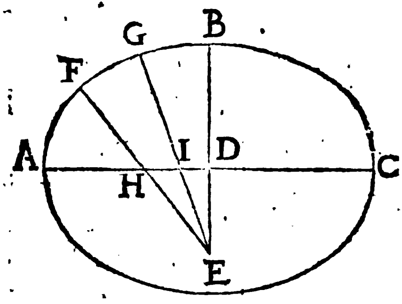
a E Contra oſtendetur, quod duæ breuiſſimæ, ſi producantur ad partes ſuarum originum vſque ad axim minorem rectũ ellipſis, fient duo maximi; & lineæ maximæ mutuò ſe ſecant inter tranſuerſum, & rectum in eadem parte, & quod continent cum menſura angulos, quorum proximior vertici ſectiouis maior eſt.

b Quia D Q ad Q I eſt, vt D O ad O G, quia quælibet earum eſt, vt D A ad A F (22. ex 5.) diuidendo, & permutando, fiet D Q minor ad D O maiorem, vt D I ad D G; ergo D I minor eſt, quàm D G, & K Q maior, quàm H O; quare angulus I maior eſt, quàm G; igitur H G, K I, ſe mutuo ſecantes, conueniunt in L.

Et conſtat, quod occurſus duarum breuiſsimarum (ſi producantur verſus ſuam originem) erit intra angulum contentum à duabus medietatibus axium ellipſis B D, D C ſupra vnum eorum, nempe punctum L cadit intra angulum B D C. Quoniam breuiſsimæ N H, M K ſe mutuò ſecant, ſi producantur ad partes ſuæ originis (28. ex 5.) occurrent vtique extra B D, & intra A G (33. ex 5.) & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXV.

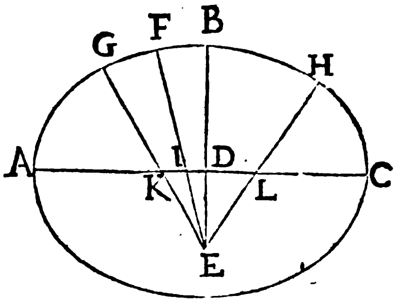
a SI per centrũ ellipſis tranſierit vna duarum breuiſſimarum, vtique rami egrediẽtes ab eorum occurſu ad ſectionis quadrantem alterius breuiſſimæ habebunt proprietates expoſitas in propoſitionibus 54. & 55.

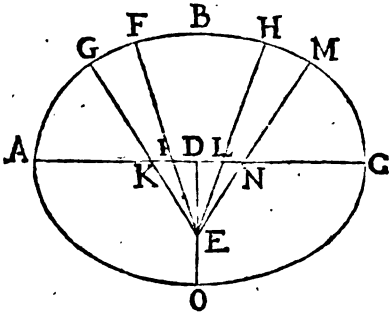


In ellipſi A B C ſit punctum E occurſus duarum breuiſſimarum B D, C I, & centrum ſectionis D: & ex E educamus E F, quæ ſecet tranſuerſum axim in H. Dico, quod H F nõ eſt breuiſſima, & quod breuiſſima egrediens ex F abſcindit ex ſagitta A C cum A lineam maiorem, quàm A H. Quoniam G I eſt breuiſſima; igitur F H, ſi eſſet quoque breuiſſima, 34. huius. occurreret ipſi G I intra angulum A D E: ſed non occurrit ei, niſi in E, ergo F H non eſt breuiſſima; & quia F E non cadit inter duas breuiſecantes E B, E G; ergo breuiſſima, egrediens ex F, abſcindit ex ſagitta lineam maiorem, quàm A H (54. ex 5.) quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXVI.

IN ſectione elliptica quatuor lineæ breuiſſimæ, vt B D, F I, G K, H L, non conueniunt omnes in vnò puncto.





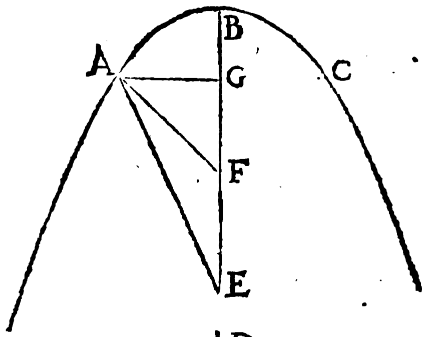
a

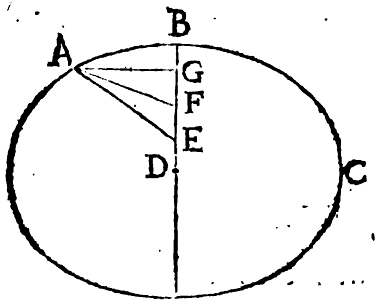
Alioquin ſit occurſus in E, & prius ſit B D perpendicularis ſuper A C, tranſiens per D centrum ſectionis; & quia E eſt occurſus duarum breuiſſimarum B D, 35. huius. F I, & B E tranſit per centrum; igitur G K non eſt linea breuiſſima, quod eſt contra hypotheſim. Si vero nullus eorũ tranſit per centrum, educamus per centrum D O perpendicularem ad A C; quare duæ breuiſſimæ F I, G K conueniunt intra angulum A D O (34. ex 5.) ſimiliter H L, M N breuiſſimæ occurrunt intra angulum C D O (34. ex 5.) ſed cõueniunt in E, quod eſt abſurdum; igitur quatuor lineæ breuiſſimæ non cõueniunt in vno puncto; quod erat oſtendendum.

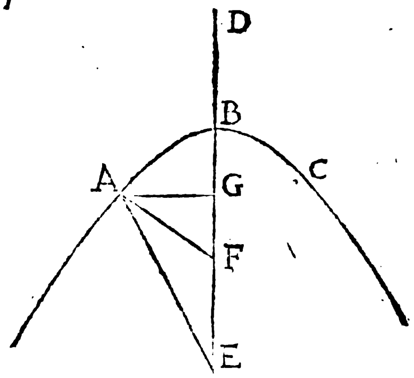
PROPOSITIO XXXVII. XLVI.

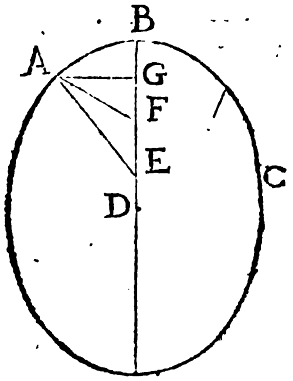
IN coniſectione A B, cuius centrum D duci non poſſunt duæ lineæ maximæ in ellipſi, neque duæbreuiſſimæ in omnibus ſectionibus, vt A E, A F ad vnum punctum A circumferentiæ ſectionis terminatæ.

Educamus A G perpendicularem ad axim B E. Si itaque ſectio fuerit parabole, fiet E G æqualis F G, quia quælibet earum eſt æqualis dimidio erecti (13. ex 5.) ſi vero fuerit hyperbole, aut ellipſis, fiet D G ad G E, vt D G ad G F; quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ (14. 15. ex 5.) igitur G F æqualis eſt G E, quod eſt abſurdum. Similiter ſi B G fuerit minor duarum axium ellipſis, & fuerint A E, A F rami maximi oſtendetur, quod G F æqualis ſit G E (23. ex 5.) Patet igitur, vt dictum eſt, quod ex vno puncto ſectionis educi non poſſunt ad axim illius duæ lineæ maximæ, neque breuiſſimæ, & hoc erat oſtendendum.





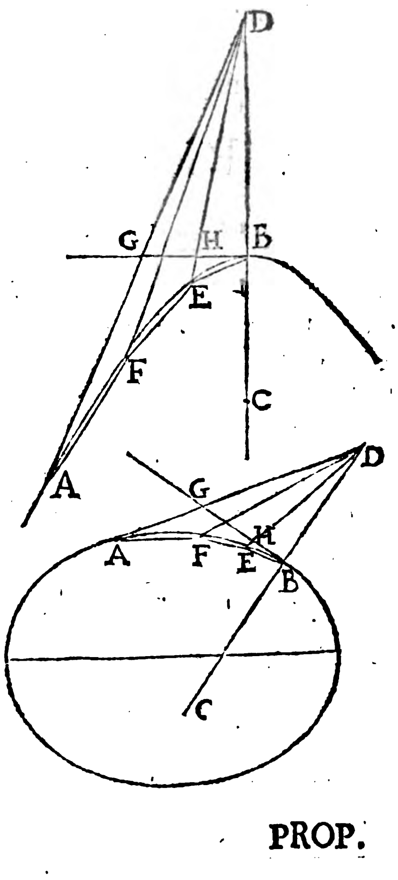




PROPOSITIO XXXVIII.

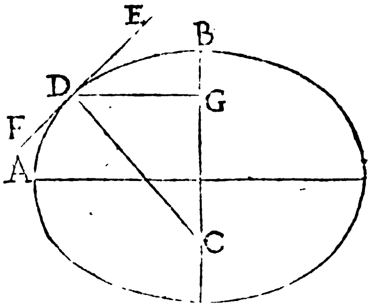
SI linea maxima, aut breuiſſima, vt C B, producatur extra ſectionem A B ad D, erit eius portio B D extra ſectionem abſciſſa minima omnium linearum D E, D F, D A egredientium ab illo pnncto ad circumferentiam ſectionis: reliquarũ vero propinquior, illi minor eſt remotiore.

a Educatur B G, tangens ſectionem in B; erit D B minor, quàm D H; ergo multo minor eſt, quàm D E: & iungamus F E, F A, erit angulus F E D obtuſus, & propterea D E minor eſt, quàm D F, & ſimiliter D F minor, quàm D A; quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO XXXIX.

IN ſectione A B elliptica quælibet perpendicularis F D ad lineam maximam C D, ab eius termino D in ſectione poſito educta, continget coniſectionem.



a

Alioquin ſecet illam, & in eius productione D G ſumatur punctum G intra ſectionem: & educamus B G C, igitur G C maior eſt, quàm C D, quia ſubtendit rectum angulum C D G, & propterea B C multo maior eſt, quàm C D, quod eſt abſurdum; igitur educta illa linea eſt tangens; quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXX.

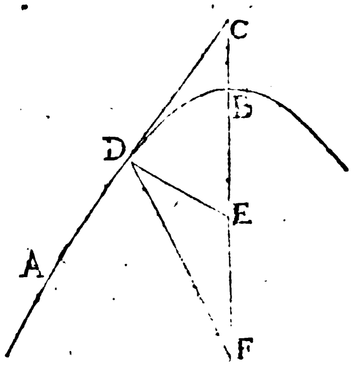
E Contra ſi fuerit F D tangens, erit perpendicularis ſuper maximam D C.

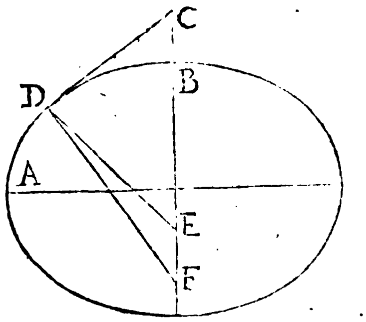
Alioquin educamus aliam E D perpendicularem ſuper illam; ergo E D tangit ſectionem in puncto D (39. ex 5.) ſed F D ſuppoſita fuit tangens; igitur duæ D F, & D E tangunt ſectionem in vno puncto, quod eſt abſurdum (36. ex 1.).

PROPOSITIO XXXXVII.

QVælibet linea D E ex puncto contactus D ad axim alicuius ſectionis A B educta perpendicularis ad tangentem D C, erit linea breuiſſima, aut maxima.

Ex 10. & 20. huius. Alioquin educamus D F breuiſſimam,
vel maximam; ergo D C perpendicularis
40. huius. eſt ſuper D F; ſed C D ſuppoſita fuit perpendicularis ſuper D E; quod eſt abſurdum: quapropter demonſtratũ eſt, quod fuerat propoſitum.

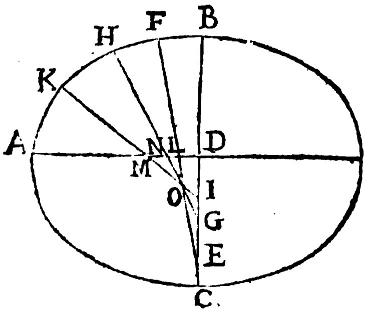




PROPOSITIO XXXXVIII.

a TRes lineæ maximæ E F, G H, I K ad vnum ellipſis quadrãtem A F B cadentens non cõueniunt in vno puncto.

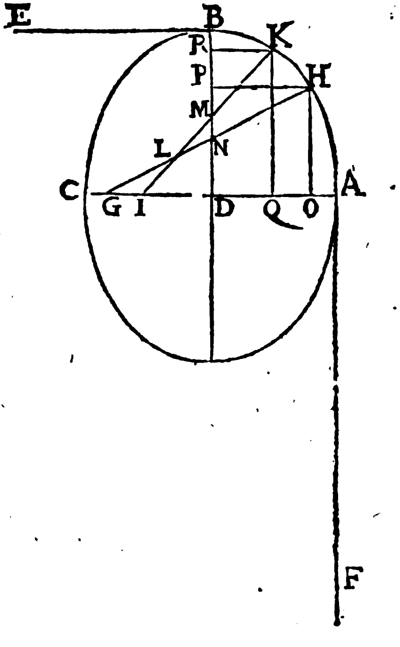
Alioquin cõueniant in O, & quia ſunt lineæ maximæ erunt M K, H N, L F, lineæ breuiſſimæ (32. ex 5.) & conueniunt in puncto O; quod eſt abſurdũ (54. ex 5.) oſtenſum ergo eſt, quod fuerat propoſitũ.



Notæ in Propoſit. XXXII.

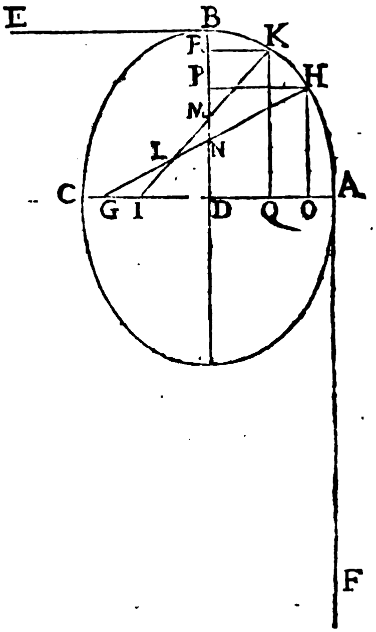
a LInea maxima ſecat tranſuerſam in pũcto, cuius intercepta inter punctum illud, & ſectionem, eſt linea breuiſſima, &c. *Verba, quæ in textu Arabico deſiderantur ſupplenda cenſui, vt æquiuocationes tollerentur.*

b Quia G H eſt linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, &c. *Quia in 22. huius oſtenſum eſt, linea maxima G H potentialem H O ſecare ſemiaxim minorẽ A D in O, vt ſit D O ad O G in eadẽ proportione figuræ axis minoris A C; ſcilicet erit, vt D A ſemiaxis minor ad A F eius ſemierectum; ſed vt A D ad A F, ita eſt B E ſemiſsis lateris recti axis tranſuerſi ad B D ſemiſſem eiuſdem tranſuerſi; igitur D O ad O G eandem proportionem habebit, quàm E B ad B D; ſed propter parallelas N D, H O, eſt N H ad H G, vt D O ad O G; pariterque propter parallelas D G, H P, erit N P ad P D, vt N H ad H G; & propterea N P ad P D eandem proportionem habebit, quàm D O ad O G, ſeu quàm E B ad B D; & permutando D P ad P N erit, vt D B ad B E, ſeu vt axis tranſuerſus ad eius erectum; & propterea linea N H erit breuiſſima.* Ex 15. lib. 1. 15. huius.



Notæ in Propoſit. XXXIII. XXXIV.

a E Contra oſtendetur, quod duæ breuiſſimæ, ſi educantur ex parte ſuæ originis ad rectum, fient duo maximi cum relatione ad rectum: Et oſtendetur ex dictis, quod lineæ maximæ mutuò ſe ſecant inter diametrum, & rectum, &c. *Textũ corrigi debere manifeſtum eſt ex dictis ſuperius.*

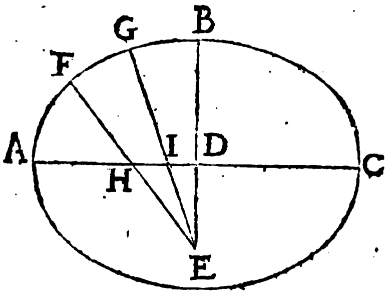


Quia D Q ad Q I eſt, vt D O ad O b
G, &c. *In eadem figura propoſitionis 32.*
præcedentis perficiatur conſtructio, vt prius
quia duæ K M, H N ſunt breuiſsimæ li-
Pr. 15. huius. *neæ; ergo M R ad R D, nec non N P ad*
P D eandem proportionem habent, ſcilicet
eam quàm habent latus rectum ad tranſuer-
ſum, ſeu eandem quàm habet ſemierectus
15. lib. 1. *E B ad ſemiaxim B D; eſt verò C A ad eius*
latus rectum, ſeu D A ad A F, vt E B ad
B D; igitur tam M R ad R D, quàm N P
ad P D eandem proporitonem habent, quàm
D A ad A F; ſed propter parallelas C D, R
K, P H, eſt M K ad K I, vt M R ad R D;
pariterque N H ad H G eandem proportionẽ
habet, quàm N P ad P D; atque propter pa-
rallelas D B, Q K, O H eſt D Q, ad Q I
vt M K ad K I, & D O ad O G eſt vt N H
ad H G; ergo tam D Q ad Q I, quàm D
O ad O G eandem proportionem habent, quàm D A ad A F, ſeu quàm axis mi-
20. 21. 22. huius. *nor A C ad ſuum erectum, & propterea tam K I, quàm H G eſt ramus maxi-*
mus; igitur ſi duæ lineæ breuiſſimæ H G, & K I producantur quouſque axim
minorem ſecent in punctis G, & I efficientur rami omnium maximi. Poſtea quia
D Q ad Q I, eſt vt D O ad O G; permutando D Q ad D O eandem propor-
tionem habebit, quàm Q I ad O G; & permutando, & comparando antecedentes ad
differentias terminorum erit D Q ad D I, vt D O ad D G: eſtque D Q minor
quàm D O; igitur Q I minor eſt, quàm O G; pariterque D I minor eſt, quàm
D G; & propterea punctum I cadit inter axim B D, & ramum H G; eſtque
etiam potentialis K Q propinquior & parallela axi maiori, & ideo maior re-
motiore H O; igitur punctum K cadit inter axim B D; & ramum H G; &
propterea ramus K I ſecat ramum H G in puncto L inter puncta H, & G:
36. huius. *ſed duæ breuiſsimæ K M, H N ſe ſecant vltra axim B D: igitur occurſus L*
cadit intra angulum B D C ab axibus comprahenſum. Tandem quia K I ſecat
H G inter puncta G, & H; ergo efficit angulum externum K I A maio-
rem interno, & oppoſito G: & propterea ramus K I propinquior vertici B;
quàm H G efficiet cum axe minore C A angulum A I K maiorem.

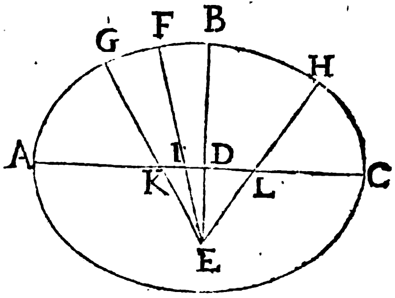
Notæ in Propoſit. XXXV.

SI tranſeat per centrum ellipſis vna duarum breuiſſimarum; vtique rami, &c. *Hæc propoſitio parum differt à 54. & 55. huius, vbi oſtenſum eſt, quod ſi duo rami E B, E G breuiſecantes ex eodem concurſu E ad ellipſim A B ducuntur, quilibet alius ramus E F, extra breuiſecantes poſitus, cadet ſupra breuiſsimam ex puncto F ad axim A C ductam: hic vero ſupponuntur duæ* a *breuiſsimæ B D, G I, quarum B D per centrũ tranſit, quæ productæ concurrunt in puncto E axis minoris, & concluditur, quod rami E F, portio F H, nedũ breuiſsima non eſt, ſed ſupra ipſam breuiſsimã ex puncto F eductam cadit.*

Sed duo hic notanda ſunt. Primo, quod hæc prop. 35. non poterat poſtponi, nã vſum habet in 57. huius vbi malè citatur prop. 52. loco huius 35., vt ibidem inſinuatum eſt. Secundo, quod hæc demonſtratio non videtur omnino perfecta nam pendet ex prop. 34., & ex eius conuerſa, quæ demonſtrata non reperitur quare ſuperuacanea non fuit noua demonſtratio in Lemmat. 8. appoſita.

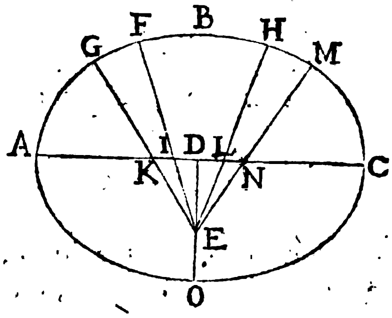


Notæ in Prop. XXXVI.



a SI verò nulla earum tranſit per centrũ, ducamus D O, &c. *Si enim fuerint quatuor lineæ breuiſſimæ G K, F I, H L, M N, quarum nulla per centrum D tranſit, ſimiliter oſtendetur, quod non conueniunt in vno puncto E; nam ducto ſemiaxe minori D O neceſſe eſt, vt punctum E concurſus duorũ breuiſecantiũ E G, E F cadat intra angulũ A D O; pariterque idem punctum E concurſus duorum breuiſecantium E H, E M, cadet neceſſario intra angulum C D O; ſed idem punctum E nequit duobus in locis reperiri, nimirũ intra angulum A D O, & intra angulum C D O, igitur non poſſunt ab eodẽ puncto educi ad ellipſim quatuor rami breuiſecantes.*

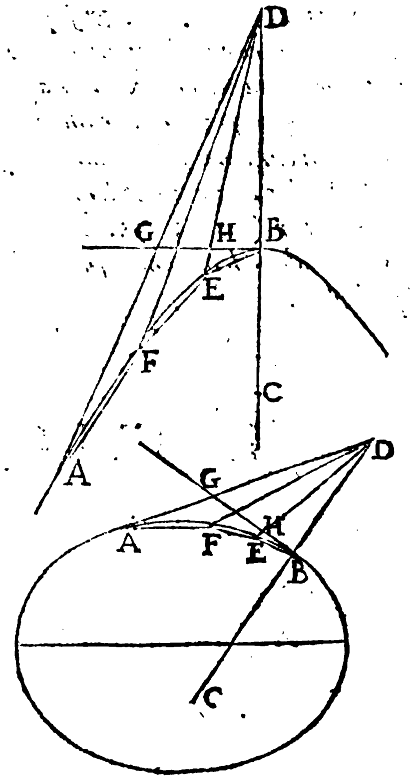
34. huius.
Ibidem.



Notæ in Prop. XXXVIII.

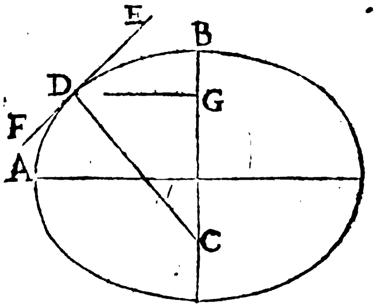
a NAm ſi educamus B G tangentem erit B D minor quàm D H, &c. *Quoniam C B eſt linea breuiſſima, aut ſi maxima eſt, eius portio erit breuiſſima, & G B cõtingens ſectionem in eius termino B perpendicularis ad B C; propterea in triangulo B D H latus H D, ſubtendens angulum rectum B, maius erit latere D B; eſt verò D E maior, quàm D H, eo quod punctum H contingentis B G cadit extra ſectionem; igitur linea B D minor èſt, quàm D E, & propterea angulus D E B acutus erit, quare eſt minor obtuſo*

32. huius.
29. 30. huius.



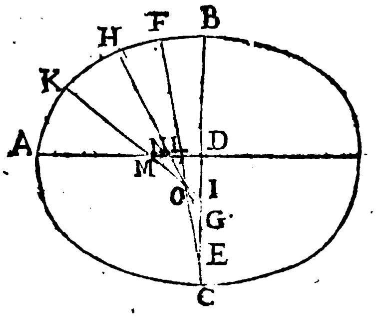
angulo D B E ; cadit verò F E infra rectam B E , quam ſecat in E , propter curuitatem ſectionis F E B ; igitur angulus D E F obtuſus quoque erit , & angulus D F E acutus ; & propterea recta linea D E minor erit , quàm D F ; eadem ratione oſtendetur D F minor , quàm D A.

Notæ in Propoſit. XXXIX.



a Alioquin ſecet illam, & ſecemus ex, & D G intra ſectionem, &c. *Si enim recta F D non contingit ellipſim A B, ſecet eam ſi fieri poteſt in D: quare F D producta in directum cadet intra ſectionem, & in producta recta linea F D G ſumatur quodlibet punctum G dummodo intra ſectionem exiſtat, & per G ad concurſum C coniungatur recta linea G C, quæ producta occurrat ſectioni in B: & quia ex hypotheſi recta F D G perpendicularis erat ad maximum ramum D C, ergo in triangulo D G C rectangulo erit hypothenuſa G C maior quàm D C, & ideò B C multo maior erit quàm D C; quod eſt abſurdum, ſuppoſita enim fuit D C omnium maxima earum, quæ ex C ad ſectionem A B duci poſſunt.*

Notæ in Propoſit. XXXXVIII.



a Alioquin occurtant in O, quia iſtæ lineæ ſunt maximæ, &c. *Secant enim lineæ maximæ ſemiaxim maiorem D A in punctis M, N, & L: & ſiquidem tres lineæ maximæ conueniunt in vnico puncto O,* 32. huius. *erunt ſegmenta inter axim maiorem, & ſectionem intercepta, nimirum M K, N H, L F lineæ breuiſſimæ; quarum duæ quæquè L F, N H educuntur ab eodem puncto concurſus O: igitur (ex 54. 55. huius) tertius ramus O K ab eodem concurſu O eductus non erit breuiſecans; quod eſt contra hypotheſim.*

LIBRI QVINTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI

CONICORVM LIB. VI.

DEFINITIONES.

I.

SEctiones ÆQVALES ſunt, quæ ad inuicem ſuperpoſitæ ſibi mutuò congruunt.

II.

SIMILES verò ſunt, in quibus omnes potentiales ad axium abſciſſas vtrobique ſunt in ijſdem rationibus, tum abſciſſæ ad abſciſſas.

III.

Et linea, quæ ſubtendit ſegmentum circumferentiæ circuli, aut ſectionis coni vocatur BASIS illius ſegmenti.

IV.

Et linea, quæ biſariam diuidit ordinationes æquidiſtantes baſi illius, vocatur DIAMETER illius ſegmenti.

V.

Et eius terminus, qui eſt ad ſectionem, VERTEX ſegmenti.

VI.

Et SEGMENTA ÆQVALIA ſunt, quæ ſuperpoſita ſibi mutuò congruunt.

VII.

Et SIMILIA ſunt, quorum baſes cum diametris æquales angulos continent, & in eorum ſingulis ductæ lineæ baſi parallelæ numero æquales ad abſciſſas diametrorum ſunt in ijſdem rationibus tum abſciſsæ ad abſciſsas.

VIII.

CONI SIMILES ſunt, quorum axes æquè ad baſes inclinati, ad diametros baſium proportionales ſunt.

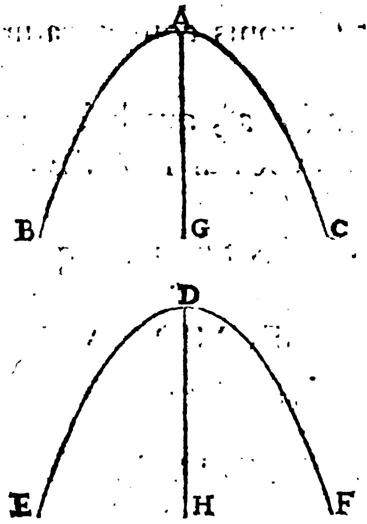
IX.

Et dicitur conus continere ſectionem, & ſectio in cono poſita eſſe, ſi ſectio tota fuerit in ſuperficie coni, aut cadat in illa, ſi producatur ex parte baſis.

N O T Æ.

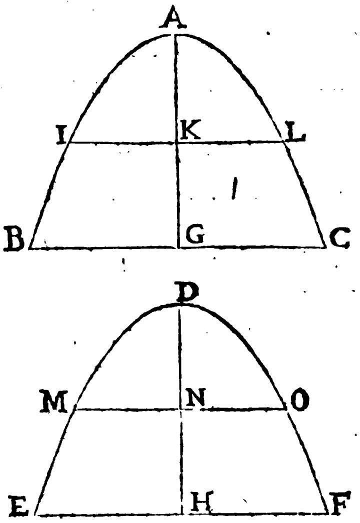
Definitiones huius ſeſti libri ferè omnes ſunt Appollonij, in paucis quidem alteratæ ab interprete Arabico: quod quidem conſtat teſtimonio Eutocij Aſcalonitæ, qui in tertiam propoſitionem ſecundi æquiponderantium Archimedis affert definitionem ſimilium portionum conicarum ſectionum, traditam ab Apollonio in eius ſeſto libro: & ſanè ordo doctrinæ exigebat, vt prius ſectiones æquales, & ſimiles definirentur, vt poſtea earum ſymptomata demonſtrari poſſent: ſed animaduertendum eſt, hactenus nomen ſectionis conicæ ſignificaſſe quamlibet indeterminatam portionem curuæ lineæ in coni ſuperficie ortam ex ſectione alicuius plani non per verticem coni ducti, non conſiderando termiuos eius neque menſuram. Segmentum verò ſignificat portionem aliquam ſectionis conicæ determinatæ menſuræ, & certis finibus terminatam; at multoties ſignificat ſuperficiem à coniſectione, & recta linea eam ſubtendente contenta. Igitur ad confuſionem vitandam vocabo huiuſmodi ſuperficiem planam, Mixtam ſuperficiẽ ſectionis conicæ. Modò in relatis definitionibus prius quanam coniſectiones vocari debeant inter ſe æquales exponit Apollonius.

I. *Et primo; Si fuerint duæ qualibet coniſectiones B A C, E D F, quarum axes A G, D H; vertices verò A, & D, & ſiquidem intelligatur ſectio B A C ſuperpoſita ſectioni E D F, vt nimirum vertex A ſuper verticem D cadat, atque axis A G ſuper axim D H, atque pariter peripheriæ B A C, & E D F ſibi mutuò congruant: tunc quidem vocantur duæ dictæ ſectiones conicæ æquales inter ſe. Vbi notandum eſt, non oportere longitudinem curuæ B A C æqualem eſſe longitudini curuæ E D F; ſicuti, vt duo anguli rectilinei dicantur æquales, & ſibi mutuò congruentes, neceſſe non eſt, vt rectæ lineæ, angulos continentes, ſint æquales longitudine, dummodo certum ſit, quod lineæ ipſæ vlterius productæ ſemper ſibi mutuò congruant; ſic pariter peripheriæ conicarũ ſectionum A B, & D E, ſi vlterius producantur, ſemper ſibi mutuò congruent.*



II. *In*

II. *Codex Arabicus habet*. Similes verò ſunt, quarum proportio potentium in vna earum ad ſua abſciſſa eſt eadem proportioni aliarum potentium ad ſua abſciſſa, & proportio abſciſſarum in vna earum ad ſua oppoſita abſciſſa eadem eſt. *Putabit forte quiſpiam, me nimis licentioſè tranſformaſſe potius, quàm emendaſſe textum in hac ſecunda definitione; ſed is ſciat velim, non meo arbitratu id feciſſe ſed ex præſcripto eiuſdem Apollonij pluribus in locis; non quidem in hiſce compendioſiſſimis definitionibus, in quibus vna particula omiſſa, vel addita (vt paſſim cõtingit in codicibus vetuſtiſſimis) ſenſum omninò permutat; ſed ijs in locis in quibus oratione continua exponit, & exemplis declarat germanum ſenſum huius ſecundæ definitionis, & ſeptimæ ſubſequentis, vt ſuis in locis monebitur. Primo igitur ſuppleri debent particulæ* ad conterminas axium abſciſſas, *quæ in textu omnino ſubintelligi debent vt expreſſè declaratur in propoſ.* 11. 12. 15. *&* 16. *huius libri, quibus in locis ſemper in ſectionibus ſimilibus præcipitur vt abſciſſæ tantummodo in axibus ſumantur, aut æquè ſint inclinatæ ad conterminas potentiales. Secundò poſtrema verbà* ſunt in ijſdem rationibus tum abſciſſæ ad abſciſſas *poſſent retineri cũ ſenſum definitionis non omnino intollerabilẽ reddant: & inſuper in textu greco Eutocij repetantur, & eius ſenſus talis eſt. In coniſectionibus B A C, E D F, quarum axes A G, D H ſi ductæ fuerint quotcunq; potentiales, ſeu ad axim applicatæ B C, E F, I L, M O occurrentes axibus in G, H, K, N hac lege, vt potentialis B C ad abſciſſam G A eandem proportionem habeat quàm potentialis E F ad abſcißam H D, & potentialis I L ad abſciſſam K A ſit, vt M O ad N D, & tandem abſciſſa G A ad K A ſit, vt abſciſſa H D ad N D: & hoc verificetur in omnibus alijs potentialibus eadem lege ductis; tunc quidem duæ illæ ſectiones ſimiles appellantur iuxta Eutocij, & Mydorgij ſententiam.*

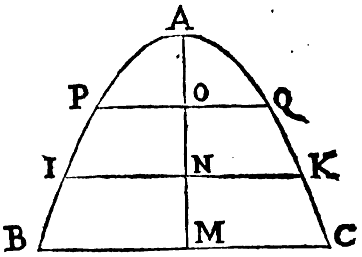


Ego contra puto, hanc expoſitionem neq. Apollonio, neq. veritati conciliari poſſe, vt ad propoſ. 12. *oſtendetur attamen exiſtimo, definitionem hac ratione formari poſſe.*

Similes coniſectiones ſunt, in quibus qualibet axium abſtißæ erectis proportionales etiam ad conterminas potentiales eandẽ rationem habent: quæ omnino conformis eſt præcedenti definitioni, præterquam in poſtrema particula, vbi enim ait. Sunt in ijſdem rationibus tum abſciſſæ ad abſciſſas. *Legendum eſſet:* ſunt in ijſdem rationibus tum abſciſſæ ad erecta. *Sed an hac particula corrigi debeat, vel non, alij videant.*

III. *Si verò fuerit portio ſectionis conicæ B A C, vel circunferentia circuli, atq. recta linea B C eam ſubtendat, & ſecet in duobus punctis B, & C, vocatur B C, Baſis prædicti ſegmenti B A C.*

IV. *Et*

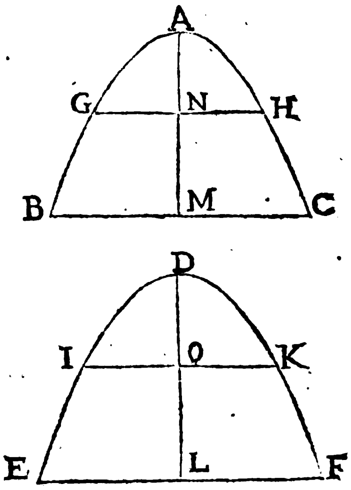


IV. *Et ſi in eodem ſegmento ducantur ordinatæ parallelæ baſi B C, atque recta linea A M ſecet omnes æquidiſtantes ipſi B C bifariam in punctis M, N, & O vocabitur A M: Diameter eiuſdem ſegmenti.*

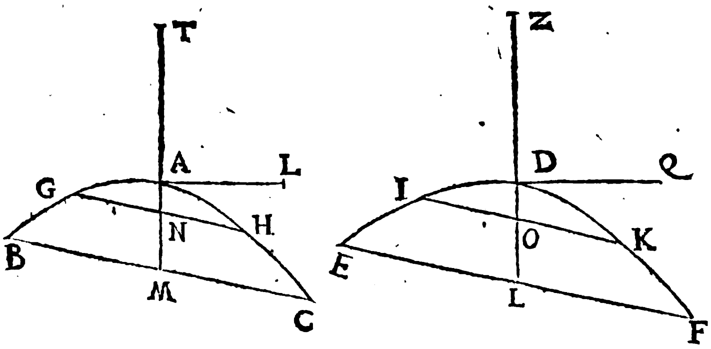
V. *Et terminus eiuſdem diametri A ad ſectionem poſitus, vocatur Vertex ſegmenti.*

Tres prædictæ definitiones ſuperadditæ ab interprete Arabico fuerunt, vt ego puto, quandoquidem omnino neceſſariæ non ſunt.

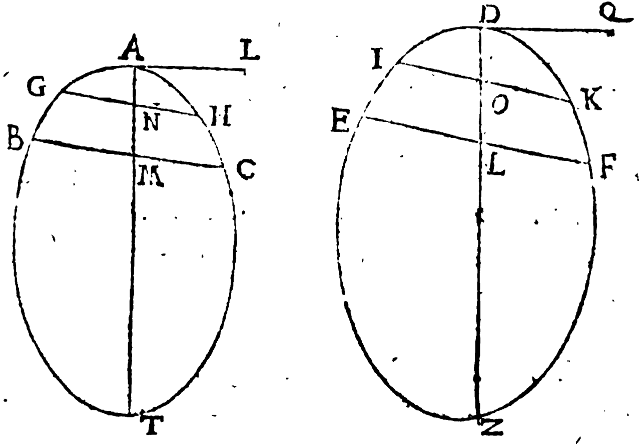
VI. *Sicuti in prima definitione ſectiones ſibi mutuò congruentes æquales vocabantur, ſic pariter, ſi ſegmentum B A C ſuperpoſitum ſegmento E D F ſibi mutuò congruant, ſunt duæ illæ lineæ curuæ æquales inter ſe.*



VII. *Declarat Apollonius in hac definitione ſeptima, quænam ſegmenta conica ſimilia inter ſe cenſeri debeant. Vt ſi fuerint duarum conicarum ſectionum ſegmenta B A C, & E D F, quarum diametri A M, & D L efficiant cum ordinatim applicatis, ſeu cum baſibus B C, & E F angulos æquales in M, & L, & in vnaquaque earum ductæ fuerint pares multitudines applicatarum, quæ ſint baſibus æquidiſtantes, vt G H, & I K, & in eis verificentur hæ conditiones, vt habeat B C ad abſciſſam M A eandem proportionem, quàm E F ad abſciſsam L D, & G H ad abciſſam N A eandem proportionem habeat, quàm I K ad abciſsam O D, & tandem abciſsa M A ad abſciſſam A N eandem proportionem habeat, quàm abſciſsa L D ad abſciſſam D O; tunc quidem vocat Apollonius duo ſegmenta B A C, & E D F ſimilia inter ſe. Et hic primo animaduertendum eſt, difinitionem ſegmentorum ſimilium relatam ab Eutocio Aſcalonita in 3. prop. lib. 2. æquipond. Archimedis, non eſſe integram: in ea enim deſiderantur illa verba,* quarum baſes cum diametris continent angulos æquales, *ſine quibus definitio eſſet erronea, vt optime notat Mydorgius. Hoc autem ita eſſe verba textus Arabici aperte declarant, habent enim.* Et ſimilia ſunt quorum baſes continent cum diametris angulos rectos *legẽdum æquales,*



les, & educantur in quolibet eorum ordinationes ad ſuas baſes numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus. *Idem repetit in propoſ.* 15. *huius lib. rurſus in propoſ.* 16. *litera* a *inquit:* Et quod anguli à potentialibus, & abſciſſis contenti ſint æquales in duobus ſegmentis, erit ſegmentum H A G ſimile ſegmento I C K: &c. *& propoſ.* 17. *litera* c *ait:* & anguli comprehenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; &c. propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia; *Et in eadem propoſ. litera* d *dicit.* Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales. *Et eodem modo ſemper loquitur Apollonius; quare dubitandum non eſt, in Eutocij definitione hæc eadem verba deſiderari.*



Immutaui poſtea verba ſubſequentia; nam ordinationes, ſeu ordinatim applicatæ ducuntur ad diametros, non ad baſes, & debent eſſe baſibus æquidiſtantes. Deinde breuitas affectata poſtremæ partis huius definitionis non Apollonio, ſed Arabico Interpreti tribui debet, nam eadem expreſſe, & extenſe declaratur in textu Eutocij his verbis. In quarum ſingulis ductis lineis baſi parallelis numero æqualibus, ſint ipſæ parallelæ, & baſes ad abſciſſas diametrorum partes ſumptas à verticibus in ijſdem rationibus, tum abſciſſe ipſæ ad abſciſſas. *In textu verò Arabico hæc non habentur expreſsè, ſicut in ſecunda definitione, quàm citat hiſce verbis.* Et educantur ex quolibet eorum ordinationes baſibus parallelæ numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus.

MONITVM.

AMOR veritatis, & muneris ſuſcepti ratio exigere videtur, vt definitiones ſectionum conicarum ſimilium, quæ circunferuntur, accuratius examinentur, ne (vt Mydorgij verbis vtar) à magnis nominibus (Eutocium dico, Commandinum, & Mydorgium) præiudicium diutius fiat veritati; hoc autem ad propoſ. 11. 12. *huius lib. præſtabo. Interim monendus es Lector, in definitione ab Eutocio relata aliqua verba deficere (nimirum quod abſciſſæ in axibus, aut diametris æquè ad ordinatas inclinatis ſumantur) in definitionibus Commandini aliquod deſiderari, & eas me-*

rito reiectas à Mydorgio fuiſſe ; nam licet latera tranſuerſa proportionalia ſint lateribus rectis , non tamen duæ eiuſdem nominis ſectiones ſimiles erunt , niſi diametri æquè inclinatæ ſint ad ordinatim ad eas applicatas : tandem definitionem Mydorgij ſimilium ſectionum pariter imperfectam eſſe ſuſpicor ; nam licet duæ ſectiones , quibus competit tradita definitio , ſeu paſsio eiuſdem definitionis , ſint reuera ſimiles , non tamen è conuerſo ſimilibus ſectionibus conuenit ſolummodo definitio , ſeu eius paſſio , cum aliquando appoſita paſsio in eiſdem reperiatur : quod perinde eſt, ac ſi quis putaret triangulum æquilaterum aliquando latera inæqualia habere poſſe .

VIII. *In hac deſinitione manifeſtè aliquid deſideratur : inquit enim* (Coni ſimiles ſunt quorum axium proportio ad diametros ſuarum baſium eadem eſt.) *Quod quidem verificatur tantummodo in conis rectis : at in ſcalenis debent neceſſario axes conorum efficere æquales inclinationes ſuper baſes : Quod quidem in ſequentibus propoſitionibus manifeſtè ab Apollonio declaratur. Itaque textum hac ratione reſtitui debere puto. Coni ſimiles ſunt, quorum axes æque ad baſes inclinati ad diametros baſium proportionales ſunt.*

IX. *Sectio genita in ſuperſicie coni à plano eum ſecante , non per verticem eius ducto dicitur in dicto cono poſita , & contenta ; & conus ille continere dicitur eandem ſectionem : & licet coniſectio exhibeatur extra conum ; dicetur nihilominus contineri ab illo cono , in quo ſectio illa accomodari poteſt , ſeu in quo ab aliquo plano ſecante effici poteſt in coni ſuperficie eadem illa coniſectio .*

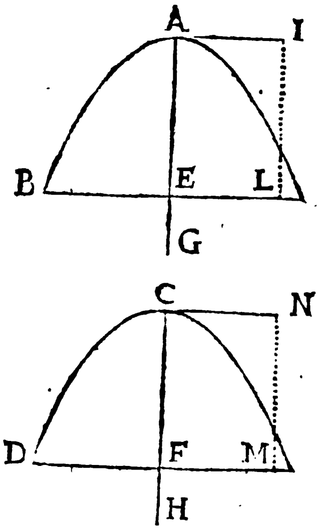
SECTIO PRIMA

Continens Propoſit. I. II. IV. & X.

PROPOSITIO I.

QVælibet duæ ſectiones parabolicæ A B , C D , ſi habue- a
rint axium erectos A I , C N æquales : erunt inter ſe æ-
quales . Si verò duæ illæ ſectiones fuerint æquales,
erunt axium erecta æqualia inter ſe.

Quoniam ſuperpoſita axi C H ſuper axim A G , cadet ſectio C D ſu- b
per ſectionem A B : ſi enim cadere non concedatur ſuper illam , ſigne-
tur (ſi fieri poteſt) punctum eius D , extra ſectionem A B cadens : &
educatur D F perpendicularis ad axim ; & perficiatur planum rectangu-
lum F N , & ab axi A G ſecetur A E æqualis C F , & educatur ex E
perpen-

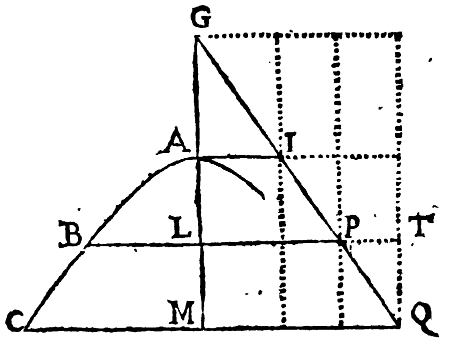


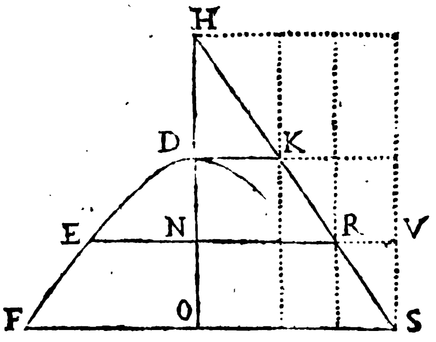
peſpendicularis B E, & perficiatur planũ E I. Et quia A I, A E æquãtur C N, C F, vnaquæque ſuo homologo: igitur planum I E, nempe 11.lib.1. (12. ex 1.) quadratum B E æquale eſt rectangulo F N, nempe quadrato Ibidem. D.F (12. ex 1.) ergo B E æqualis eſt D F; ſi autem ſuperponatur axis axi cadet D ſuper B, quæ tamẽ haud cadere conceſſum fuerat: & hoc eſt abſurdum; ergo fieri non poteſt, vt duæ ſectiones æquales non ſint.

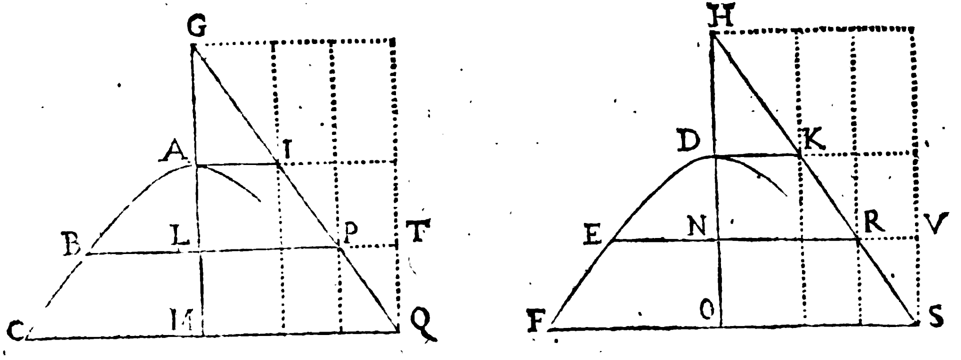
C Præterea ſupponamus duas illas ſectiones æquales eſſe inter ſe, & fiat F C æqualis E A, & educamus ad axes perpendiculares B E, D F, & perficiamus plana rectangula F N, E I. Quia ſectio A B cadit ſuper ſectionem C D, & A E ſuper C F cadet; alioquin eſſent in eadem parabola duo axes: ergo F cadit ſuper E, & D ſuper B, & propterea B E potens planum E I (12. ex 1.) æqualis erit 11.lib.1. D F potenti planum F N (12. ex 1.); ergo duo plana ſunt æqualia; ſed Ibidem. ſunt applicata ad æquales F C, A E; igitur C N, A I erectæ æquales ſunt. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO II.

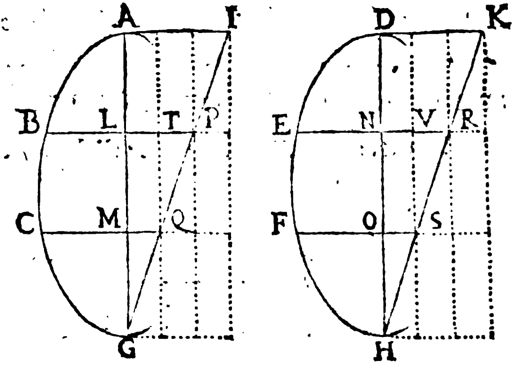
SI duæ ſectiones hyperbolicæ, aut duæ ellipſes A B C, D E F habuerint axium figuras G I, H K ſimiles, & æquales; a duæ illæ ſectiones æquales erunt. Si verò duæ ſectiones æquales fuerint, earũ figuræ axiũ erunt æquales, ſimiles, & ſimiliter poſitæ.







Quoniam facta conuenienti ſuperpoſitione axis A M ſuper axim D O, cadet quoque ſectio A B ſuper ſectionem D E: ſi enim non cadit ſuper illam, ſumatur (ſi fieri poteſt) eius punctum B, extra ſectionem D E cadens; & producatur ad axim perpendicularis B L vſque ad P: & perficiatur planum A P applicatum comparatum; & ſecetur D N æqualis A L, & erigatur per N ad axim perpendicularis N E, & producatur vſque ad R, perficiendo planum D R applicatum comparatum; Et quia A I æqualis eſt D K, & A L æqualis D N: erit planum I L, æquale plano K N; cumque G I, H K ſint duæ figuræ ſimiles, & æquales, pariterque I P, K R; b ergo duo plana A P, D R ſunt æqualia: & propterea E 12. 13. lib. 1. N, B L, quæ illa ſpatia poſſunt (13. 14. ex 1.) ſunt æquales. Si autem ſuperponatur axis axi cadet B L ſuper E N, eoquod duo anguli N, & L ſunt æquales; igitur B cadit ſuper E, quod prius cadere non concedebatur: & hoc eſt abſurdum. Quapropter ſectio ſectioni æqualis eſt.



Deinde ponamus duas ſectiones æquales; vtique congruet ſectio A B ſectioni D E, & axis A L axi D N, quia ſi non cadit ſuper illum, eſſent in hyperbola duo axes, c & in ellipſi tres axes, quod eſt ab- 48. lib. 2. ſurdum (52. 53. ex 2.) Et fiat A L æqualis D N, & reliqua perficiantur, vt prius cadent duo puncta L, B ſuper N, E; d ideoque B L æqualis erit E N; & poterunt æqua- 12. 13. lib. 1. lia rectangula A P, D R applicata ad æquales A L, D N (13. 14. ex 1.) ergo L P æqualis eſt N R. Similiter ponatur A M æqualis D O, & educantur C M Q, F O S duæ ordinationes, oſtendetur, quod M Q æqualis eſt O S, & L M æqualis N O; & propterea duo plana P Q, R S ſunt æqualia, & ſimilia; igitur duo plana G P, H R ſunt æqualia, & ſimilia, & L P oſtenſa eſt æqualis N R: ergo G L æqualis eſt H N, & A L æqualis D N; & propterea G A æqualis eſt D H, & A I æqualis D K.

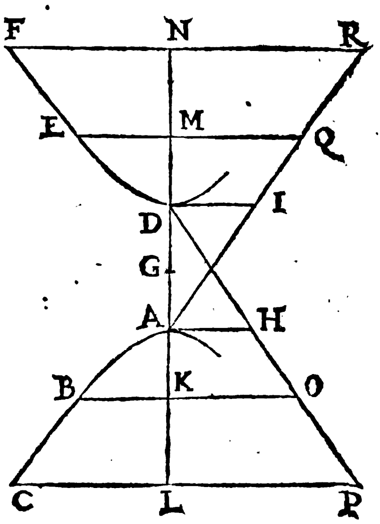
Quapro-

Quapropter duæ figuræ G I, H K ſunt æquales, & ſimiles. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO IV.

a SImili modo demõſtrabitur, quod duæ ſectiones oppoſitæ ſint ſimiles, & æquales.

Eo quod axis inclinatus eſt communis, & erecti ſunt æquales (16. ex 1.) & prot pterea earum figuræ æquales quoque ſuninter ſe. Et hoc erat propoſitum.



14. lib. 4.

PROPOSITIO X.

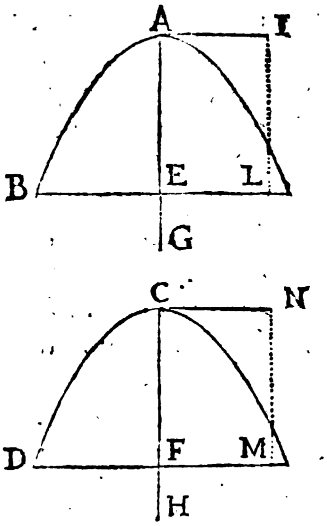
a PAriter conſtat, quod ſi potentiales cum ſuis abſciſſis cõpræhendant angulos æquales obliquos, eadem conſequentur, quæ prius dicta ſunt.

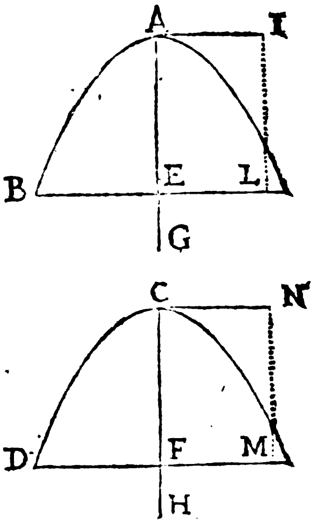
Et hoc erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. I.

a QVælibet duæ ſectiones parabolicæ, vt A B, C D, quarum relationes ſunt duo plana A L, C M, & erecti earum A I, C N æquales. ipſæ quoque ſunt æquales. Si verò duæ illæ ſectiones fuerint æquales, vtique earum applicata, & erecti erunt æquales, &c. *Verba illa propoſitionis* (applicata ſunt duo plana A L, C M, &c.) *caſu in textum irrepſiſſe puto, eo quod rectangula illa A L, C M, nedum æqualia non ſupponuntur, ſed è contra conſtruuntur, atque demonſtrantur æqualia eſſe inter ſe.*

b Quia ſi ponamus ſagittam C H ſuper ſagittã A G, cadet ſectio C D ſuper ſectionem A B: ſi verò non cadit ſuper illam, ſignemus ſuper literam, in quam non cadit punctum D: &c. *Sic legendũ puto. Quoniam,*





niam, ſuperpoſita axi C H ſuper axim A G, &c. vt in textu habetur. Si enim axis C H ſuper axim A G applicatur, ita vt vertices A, C coincidant, neceſſariò ſectio C D cadet ſuper ſectionem A B alias aſſignari poſſet punctum eius D, extra ſectionem A B cadens.

c Præterea ponamus duas ſectiones æquales, & C F æqualis A E, &c. *Textum corruptum ſic reſtituendum cenſeo. Præterea ſupponamus, duas illas ſectiones æquales eſſe inter ſe, & fiat C F æqualis A E, educamus ad axes perpendiculares B E, D F, &c. Sic enim diſtinguitur hypotheſis propoſitionis à conſtructione eius.*

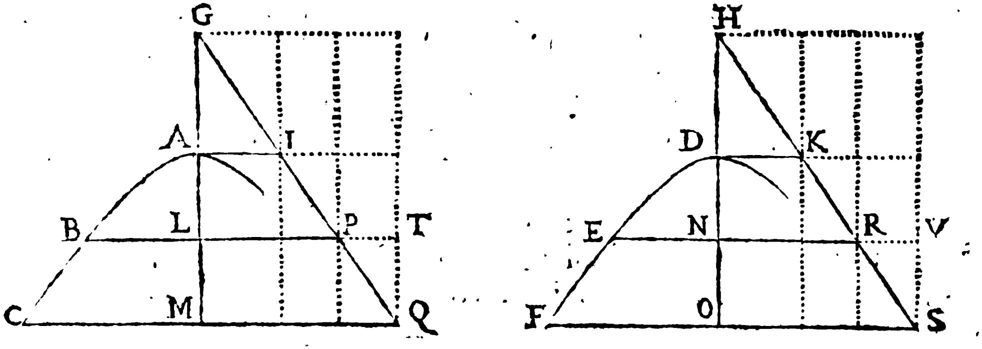
d Ergo ſectio A B cadit ſuper ſectionem C D, & A E ſuper C F: alioqui eſſent ſectioni parabolicæ duo axes; ergo F cadit ſuper E, &c. *Quoniàm (ex hypotheſi) ſectiones A B, & C D æquales ſunt, facta intellectuali conuenienti ſuperpoſitione, ſibi mutuò congruent, & vertex A cadet ſuper verticem C. Dico iam, axim A E cadere ſuper axim C F: alioquin in eadem parabola, ſcilicet in duabus parabolis ſibi congruentibus à communi vertice C, vel A, duo axes A E, & C F ducerentur: quod eſt impoſſibile. Quare axis A E cadit ſuper axim C F.*

Notæ in Propoſit. II.

a SI fuerint figuræ duarum ſectionem hyperbolicarum, aut duarum ellipſium, vt duo plana G I, H K in A B, D E ſimiles, & æquales; vtique duæ ſectiones æquales erunt: ſi vero duæ ſectiones ſint æquales earum figuræ erunt æquales, ſimiles, &c. *In duabus ſectionibus A B, & D E ſumi debent figuræ G I, & H K, non qualeſcunque, ſed illæ, quæ ad axes fiunt, nimirum debent eſſe G A, & H D axes inclinati, ſeu tranſuerſi, & A I, atque D K eorum latera recta; tunc quidem, ſi figuræ axium G I, H K fuerint ſimiles, & æquales, conicæ ſectiones B A, D E æquales quoque oſtenduntur in propoſitione. Quod verò particula illa (*axium*) deſideretur in textu propoſitionis, conſtat ex primis verbis immediatè ſequentis conſtructionis. Inquit enim.* Quoniam ſi ponamus axim A M ſuper axim D O, &c.

b Cumque G I, H K ſint duæ figuræ ſimiles, & æquales; pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R ſunt æqualia, &c. *Quia rectangula I P, G I circa communem diametrum G I P conſiſtunt, erunt inter ſe ſimilia: pariterque K R ſimile erit rectangulo K H: quare duo rectangula I P, & K R ſimilia ſunt duobus rectangulis G I, H K inter ſe ſimilibus; & ideò illa inter ſe quoque ſimilia erunt, & habent latera homologa æqualia, illa nimirum, quæ opponuntur æqualibus abciſsis A L, & D N, igitur rectangula P I, & R K*

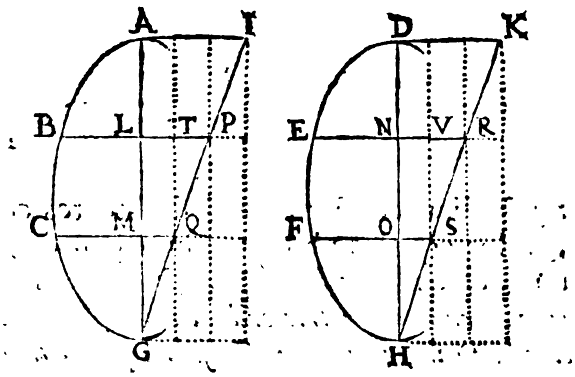
æqualia



æqualia ſunt inter ſe: ſunt verò rectangula N K, & L I æqualia quoque (cum latera circa angulos rectos æqualia habeant, ſingula ſingulis) ergo duo rectangula A P, & D R æqualia ſunt inter ſe.

c Quia, ſi non cadit ſuper illum, eſſent ſectioni hyperbolicæ duo axes, & in ellipſi tres axes, &c. *Quoniam æquales ſectiones B A, E D ſibi mutuò congruunt, & vertices A, & D coincidunt, ſiquidem axis A L non cadit ſuper axim D N (cum ambo tamen axes ſint) haberet vnica ſectio, ſcilicet duæ ſectiones congruentes, duos axes A L, & D N conuenientes in eodem puncto verticis, quod in hyperbola eſt impoſſibile; in ellipſi verò, in qua ſemper duo axes reperiuntur ſe ſe ſecantes in centro ad angulos rectos, reperietur tertius axis, ille nimirum, qui ab eodem vertice A ducitur in eadem ſectione A B, & non coincidit cum axi A L.*

48. lib. 2.



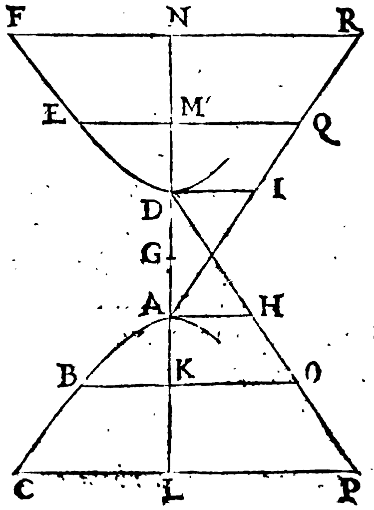
d Ideoque B L æqualis eſt N E, & poterunt A P, D R, applicata ad A L, D N æqualia &c. *Quia quadrata æqualium B L, E N æqualia ſunt rectangulis A P, D R; erunt illa æqualia, & eorum latera A L, D N facta ſunt æqualia; igitur reliqua duo latera L P, N R æqualia quoque ſunt. Simili modo oſtendetur, quod M Q æqualis eſt O S, ſeù L T æqualis eſt N V, & L M, ſeu T Q æqualis eſt N O, ſeu V S; erant autem prius L P, N R æquales; igitur reſiduæ P T, & R V æquales erunt, ſed quia T Q, & G L ſunt parallelæ pariterque V S, & H N; ergo vt T P ad P L ita eſt Q T ad L G, ſimili modo vt V R ad R N ita eſt S V ad N H; habent verò duæ æquales T P, & V R ad duas æquales P L, & R N eandem proportionem, igitur duæ æquales Q T, & S V eandem proportionem habent ad L G, & N H, & propterea hæ erunt æquales, & ablàtis æqualibus A L, D N, erunt reliquæ A G, & D H inter ſe æquales, & habet G A ad A I eandem proportionẽ, quàm Q T ad T P, ſeu quàm S V ad V R; pariterq; H D ad D K eſt vt S V ad V R (propter parallelas & ſimilitudinẽ triangulorũ) igitur vt G A ad A I ita erit H D*

ad

ad D K, & propterea etiam conſequentes A I, & D K æquales ſunt inter ſe, & compræhendunt angulos rectos A, & D; ergo figuræ G A I, & H D K ſimiles ſunt inter ſe, & æquales.

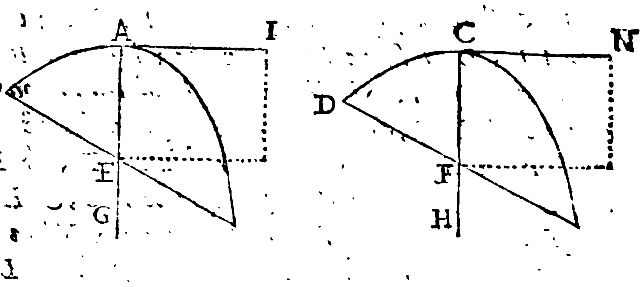
Notæ in Propoſit. IV.

IAm ergo demonſtratum eſt, quod duo vertices tympani ſunt ſimiles, & æquales, & inclinatus communis inter vtrumque verticem (16. ex 1.) ergo figura eſt communis, &c. *Hæc propoſitio eſt veluti Corollarium primæ partis ſecundæ propoſitionis in qua oſtenſum eſt, quod ſi duæ hyperbolæ habuerint axium figuras æquales, & ſimiles, erunt quoque ſectiones ipſæ æquales, & congruentes; habent verò ſectiones oppoſitæ A B, & D E (quæ vocantur Vertices Tympani ab Arabico interprete) figuras D A H, & A D I axis D A æquales, & ſimiles (vt in 14. primi libri demonſtrauit Apollonius); ergo ſectiones oppoſitæ æquales erunt inter ſe, & congruentes.* a



Notæ in Propoſit. X.

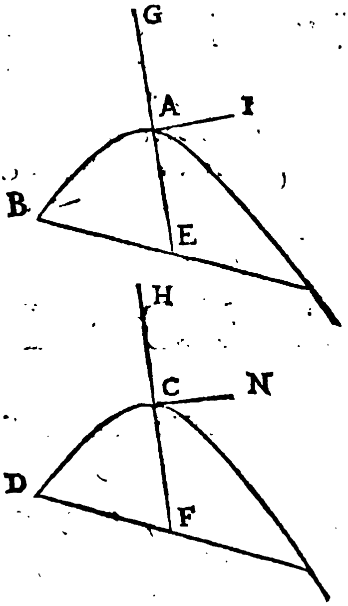
SImiliter conſtat, quod ſi potentes contineant cum ſuis abſciſſis angulos equales obliquos, iudicium eſt, quod memorauimus in ſectionibus, &c. *Senſus huius propoſitionis talis eſt. In duabus ſectionibus conicis, ſi cum earum diametris ordinatim applicatæ contineant angulos æquales, non rectos, & earum latera recta ſint æqualia in parabolis; in reliquis verò ſectionibus latera recta, & tranſuerſa æqualia, itaut figuræ ipſæ æquales ſint; erunt ſectiones ipſæ inter ſe æquales: & è conuerſo, ſi ſectiones æquales fuerint, habebunt latera æqualia earum diametrorum, cum quibus ordinatim applicatæ angulos æquales, non rectos continent.* a



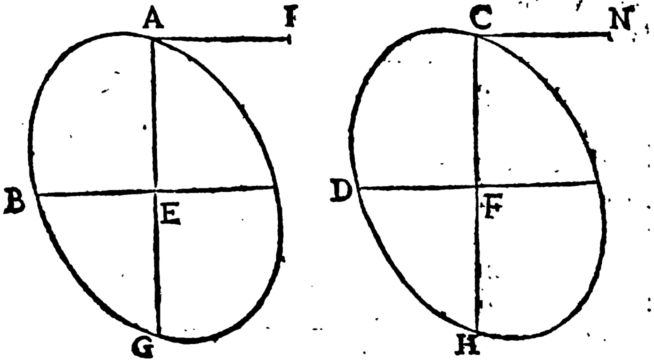
Demonſtrationes non apponuntur ab Apollonio, quia iiſdem verbis omnino in eiſdem figuris abſolui poſſunt. Sint enim primo duæ parabolæ A B, & C D, atque earum diametri A G, & C H efficiant æquales angulos F, & E, cum ordinatim ductis D E, & B E, ſintque latera recta A I, C N æqualia. Dico,

ſectiones

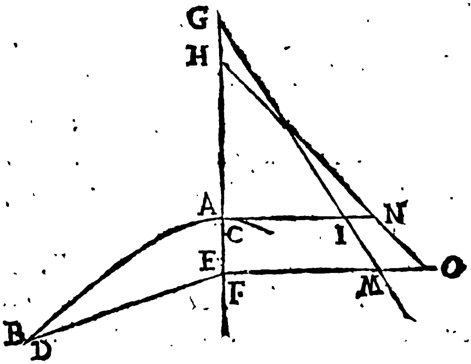
ſectiones æquales eſſe. Sumatur quodlibet punctum B in ſectione B A ducaturque ordinatim applicata B E, ſeceturque C F æqualis A E, & ducatur ordinatim D F. Manifeſtum eſt, rectangula E A I, & F C N æqualia eſſe (cum latera ſint æqualia, ſingula ſingulis); his verò rectangulis æqualia ſunt quadrata ordinatim applicatarum B E, D F; 11.lib. 1. *ergo & quadrata ſunt æqualia, atque eorum latera B E, D F æqualia quoque. Si igitur parabolæ ſuperponantur ita, vt punctum E ſuper F, & diameter A E ſuper C F cadat, neceſſariò punctum A ſuper C cadet (propter æqualitatem abſciſſarum) atque punctum B ſuper punctũ D incidet (propterea quod anguli E, & F æquales ſunt, pariterque rectæ B E, & D F ſunt æquales), & quia quodlibet punctum B parabolæ A B cadit ſemper ſuper ſectionem C D; ergo duæ ſectiones B A, & D C ſibi mutuò congruunt, & ideo æquales ſunt. Non ſecus conuerſum huius propoſitionis demonſtrari poteſt.*



Altera verò pars propoſitionis breuius demonſtrabitur hac ratione. In duabus hyperbolis, aut ellipſibus efficiant ordinatim applicatæ B E, D F cum diametris A E, & C F angulos æquales, & non rectos; ſintque tranſuerſa latera G A, & H C æqualia, pariterque latera recta A I, & C N æqualia. Dico, ſectiones B A, C D æquales eſſe. Sumatur quodlibet punctum B ſectionis B A, ducaturque ad A E diametrum ordinatim applicata B E, ſeceturque C F æqualis abſciſſæ A E, ducaturque F D ad H C F diametrũ ordinatim applicata. Erit 21.lib. 1. *rectangulum G E A ad quadratum B E, vt latus tranſuerſum G A ad rectum A I; pariterque rectangulum H F C ad quadratum F D erit, vt H C ad C N: habent verò duæ æquales G A, & H C eandem proportionem ad duas æquales A I, & C N; igitur rectangulum G E A ad quadratum B E eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H F C ad quadratum D F, ſunt verò rectangula G E A, H F C æqualia inter ſe (quandoquidem eorum latera A E, C F facta ſunt æqualia) quæ addita ipſis A G, & C H æqualibus efficiunt latera E G, & F H æqualia; ergo quadrata duarum B E, & D F æqualia ſunt inter ſe; & ideo ordinatim applicatæ B E, & D F æquales erunt. Quare facta, vt prius, intellectuali ſuperpoſitione; nedum vertex A ſuper C, ſed etiam quodlibet punctum B ſectionis A B ſuper ſectionem C D cadet; ideoque ſectiones ſibi mutuò congruent, & æquales erunt.*



E conuerſo, ſi ſectiones B A, & C D æquales ſupponantur, ſibi mutuò con-



gruent, & ideo à communi vertice A, ducta qualibet diametro A E, vel C F, ad quàm ordinatim applicetur qualibet B E, ſeu D F in angulo non recto; ſintque latera tranſuerſa, & recta G A, A I, atque H C, C N. Dico; huiuſmodi latera, & figuræ ſeu rectãgula G A I, H C N æqualia, & ſimilia eſſe inter ſe, & ſibi mutuò congruentia. Si enim hoc verum non eſt, eorum diametri G I, & H N ſimiliter poſitæ, & ſubtendentes communem angulum A non coincident; & ideo æquidiſtantes erunt aut ſe mutuò ſecabunt in vno puncto: ducatur ergo à termino E alicuius ordinatim applicatæ B E recta linea E M parallela lateribus rectis A I, C N, ita vt ſecet diametros figurarum ſupra aut infra occurſum in duobus punctis M, & O. Igitur in ſectione A B idem quadratum ordinatim applicatæ B E, ſeu D F æquale erit rectangulo A E M, & in ſectione D C æquale erit rectangulo C F O, ſuntque abſciſſæ A E, & C F æquales; ergo M E, & O F æquales inter ſe ſunt: pars, & totum quod eſt abſurdum: Non ergo latera figurarum inæqualia ſunt. Quod erat oſtendendum.

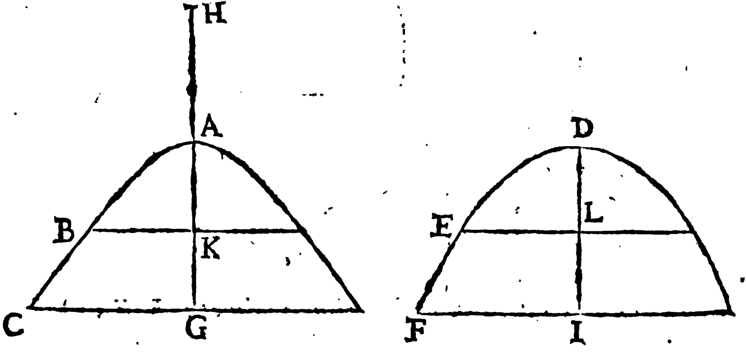
SECTIO SECVNDA

Continens Propoſit. III. VI. VII. & IX.

PROPOSITIO III.

Coniſectio non eſt æqualis ſectioni quæ eiuſdem generis cũ illa non ſit.

Etenim ellipſis non erit æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ; quia illa eſt terminata, hæ verò ſunt indeterminatæ. At parabola D E F, cuius axis D I non erit æqualis hyperbolæ A B C, cuius axis A G, & inclinatus A H. Quia ſi abſcindantur A K, K G æquales D L, L I, & educamus ad axes perpendiculares B K, C G, E L, F I: Dico, quod ſectio D F non eſt æqualis ſectioni a

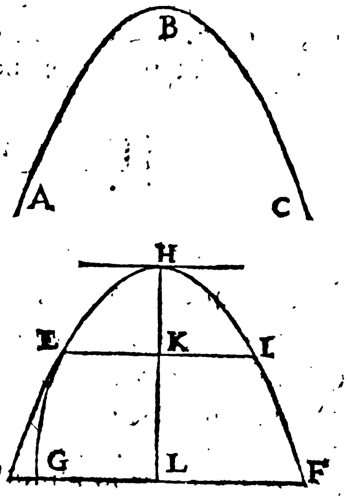


ſectioni A C; quia ſi eſſet æqualis illi, facta ſuperpoſitione, ſibi mutuò congruerent, & caderent puncta E, F, L, I, ſuper B, C, G, K, & eſſet F I æqualis C G, atque E L æqualis B K; ideoque quadratũ F I ad quadratum E L eſſet, vt D I ad D L (19. ex 1.) eſſetque quadratum C G 20.lib. 1. ad quadratum K B, vt A G ad K A, quod eſt abſurdum; quia illius proportio ad iſtam eſt, vt H G in G A ad H K in K A (20. ex 1.) Igitur 21.lib. 1. ſectio parabolica non eſt æqualis ſectioni hyperbolæ, nec ſectio aliqua æqualis eſt ſectioni, quæ non ſit eiuſdem generis; Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO VI.

a QVælibet duæ ſectiones A B C, & D H F, quarum portio vnius ſuperpoſita portioni alterius congruit, ſunt æquales inter ſe.

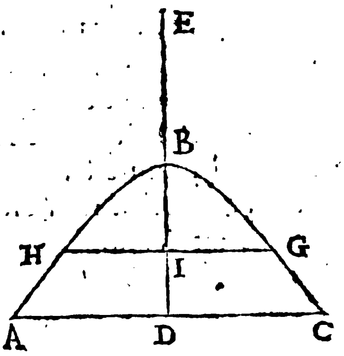
Alioquin congruat portio B C portioni E F, at non cadat portio A B ſuper D E, ſed cadat in ſitu E G, & educamus lineam tangentem duas ſectiones in H, & 34.lib. 1. educamus E I, D G F parallelas tangenti; & ex H ad ſemipartitionem ipſius E I ducatur H K, quæ occurrat D F in L. Et quia H L ſecat bifariam lineam parallelam tangenti ab eius termino ductæ; ergo eſt diameter vniuerſæ ſectionis (5. 7.lib. 2. ex 2.) quare bifariam ſecat vnamquanque ex D F, G F, & fiet D L æqualis G L, quod eſt abſurdum; igitur ſectio A B C tota congruit ſectioni D H F. Quod erat oſtendendum.

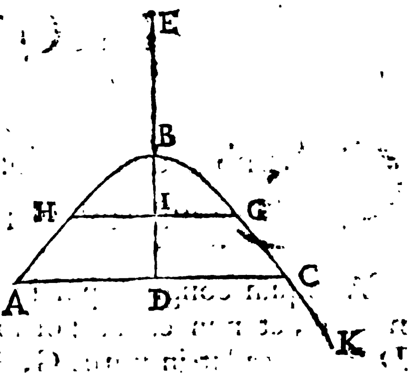


PROPOSITIO VII.

a DVæ ordinationes axis in qualibet coni ſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duas portiones, quarum ſi vna alteri ſuperponatur ſibi mutuò congruent, nec congruunt alicui aliæ portioni ſectionis.

Sit coniſectio A B C, & eius axis B D, & ſumantur in ſectione puncta G, C, ab eis educãtur duæ ordinationes G H, C A occurrentes axi in I, D. Dico, quod B G congruit B H; & G C ipſi H A, & ſuperficies B D C ſuperficiei B D A, & ſegmentum B G C ſegmento B H A. Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C b in I, D, vtique G I ipſi I H congruet, & D C ipſi D A, & duo puncta G, C ſuper duobus punctis H, A cadent, & portio ſectionis conicæ G C ſuper portionem H A, & G B ſuper H B: Et dico, quod portio H A non congruit alicui alteri portioni, quàm G C: ſi enim poſſibile eſt cõgruat portioni C K, & portio H B congruet portioni, quæ continuatur ipſi K C; ergo cadet B ex H B non ſuper B ex C G B; quia portio H B non eſt æqualis portioni C B; & propterea incidet axis B D in alium locum, eſſentque eidem ſectioni plures axes: quod eſt abſurdum; 48.lib. 2. (51. 52. ex 2.) igitur non cadit H A niſi ſuper C G. Vt fuerat propoſitum.





PROPOSITIO IX.

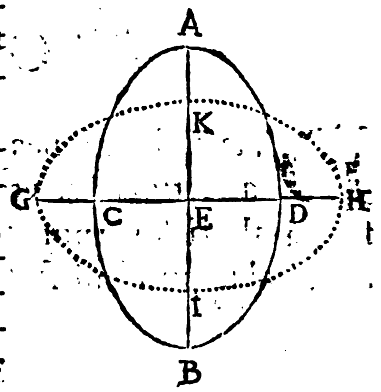
Manifeſtum eſt ex demoſtratis, quod portiones ſectionum a æqualium non congruunt ſibi inuicem, niſi earum diſtantiæ à verticibus ſint æquales.

Oſtenſum enim eſt ſibi non congruere, quarum diſtantiæ à verticibus non ſunt æquales, quia portio H A, ſi caderet ſuper portionem C K, & earum diſtantiæ à B non eſſent æquales, conſequitur, quod in hyperbola 48.lib. 2. ſint duo axes, & in ellipſi tres axes: quod eſt abſurdum (51. 52. 53. ex 2.)

Si autem in ellipſi cadit axis A E tranſuerſus ſuper axim rectum illius, vtique differunt b inter ſe, & non ſibi inuicem congruunt ſectiones.

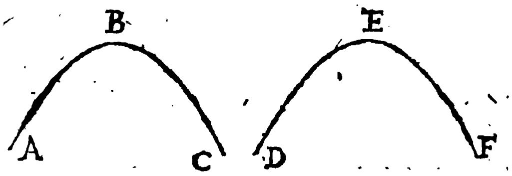
Conſtat etiam, quod in ſectionibus inæqualibus, vt A B C, D E F portio vnius earum non congruit portioni alterius.

Alioqui congruet B A ipſi D E, & congrueret etiam E F ipſi B C (*6.* ex *6.*) eſſetque ſectio C B A æqualis ſectioni F E D: at ſuppoſuimus, non eſſe æquales, quod eſt abſurdum.



Ergo

ergo non congruit portio alicuius ſectionis portioni alterius ſectionis, cui æqualis non eſt. Et hoc erat oſtendendum.

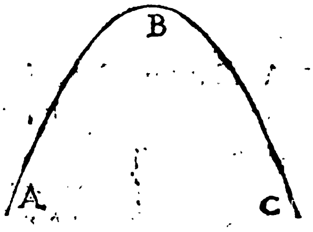


Notæ in Propoſit. III.

a ETenim ellipſis non eſt æqualis alicui hyperbolæ, &c. *Suppleri debet in textu verbum* (parabolæ) *dicendo. Etenim ellipſis non eſt æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ, quia illa eſt determinata; hæ verò ſunt indeterminatæ, ſcilicet ellipſis eſt finita parabole verò; & hyperbole in infinitum extendi poſſunt, & propterea nulla ratione æquales oſtendentur.*

Notæ in Propoſit. VI.

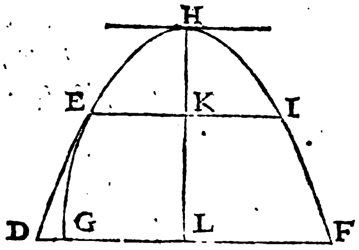
a QVælibet duæ ſectiones A B C, D E F, quarum vnaquæque literarum ſuperpoſita literis alterius congruit; vtique ſunt æquales, &c. *Legendum puto. Quælibet duæ ſectiones A B C, & D E F; quarum portio vnius, alterius portioni ſuperpoſita congruit ſunt æquales inter ſe.*



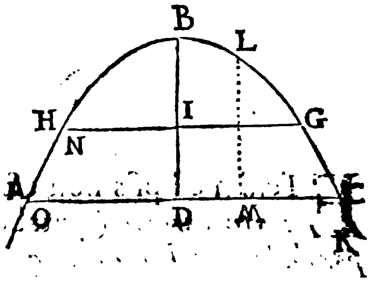
Notæ in Propoſit. VII.

a ORdinationes axis in qualibet hyperbolarum abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duo ſegmenta, quæ, ſi cadit vnum ſuper alterum, ſibi mutuò congruunt, nec excedunt,.nec deficiunt, nec congruunt alicui portioni ſectionis, &c. *Expungi debent verba aliqua huius textus ſuperuacanea, & aliqua adiungi, vt ſenſus continuus talis ſit. Duæ ordinationes axis in qualibet coniſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte, axis duas portiones, quarum vna alteri ſuperpoſita ſibi mutuò congruent, nec cōgruunt alicui aliæ portioni ſectionis*

b Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C, &c. *Ex eo enim quod omnes applicatæ ad axim B D ſecantur bifariam ab illo,*



illo, & ad angulos rectos, ſi intelligatur ſuperficies B I G, ſuperpoſita ſuperficiei B I H, itaut axis ſuper axim cadat, atque vertex B ſit communis neceſſario punctum I commune erit, atque recta I G cadet ſuper I H, cum anguli G I B, & H I B recti ſint, atque punctum G cadet in H, propter æqualitatem duarum ordinatim applicatarum I G, I H: eadem ratione quælibet alia puncta ſectionis G B inter G, & B ſumpta cadent ſuper B H; & ideo portio ſectionis conicæ G B congruet portioni B H, & eidem æqualis erit. Simili modo conſtat, portionem G C æqualem eſſe portioni H A, & ſic ſuperficies ipſa. Quod verò portio H A non congruat alicui alteri ſegmento C K præter G C, conſtat ex eo, quod ſi portiones K C, & A H ſibi mutuò congruunt, vt nimirum punctum C ſuper H, & punctum K ſuper A cadat: & concipiatur punctũ C idem ac N, & K idem ac O, & portio O N L æqualis immo eadem ſectio K C B, & illius axis L M omnino idem ac axis B D: tunc quidem (ex precedenti prop. 6.) ſectiones ipſæ A B, & K B, ſeu O L æquales erunt, & ſibi mutuò congruentes: & propterea H B cadet ſuper portionem maiorem C B ſeu ei æqualem N B L (cum H B æqualis oſtenſa ſit ipſi G B) & ideo vertices B, & L duarum axium B D, & L M in duabus ſectionibus A B, & K B ſeu O N L inæqualibus non conuenient: quapropter in duabus congruentibus, ſeu in eadem ſectione duo axes B D, & L M exiſtent, quod eſt abſurdum, quia eſt contra propoſ. 48. libri 2.



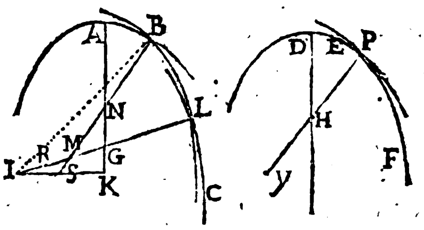
Notæ in Propoſit. IX.

MAnifeſtum eſt ex demonſtratis, quod portiones ſectionum æqualium non congruunt, &c. *Sicuti in propoſ. 7. dictum eſt, quod duæ portiones non æqualiter à vertice axis diſtantes ſibi mutuò congruere nõ poſſunt, ita hic in duabus quibuslibet æqualibus coniſectionibus idem verificari oſtenditur, quod nimirum duæ portiones cuiuslibet ſectionis conicæ, vel duarum æqualium ſectionum inæqualiter à vertice axis diſtantes non ſint congruentes. Hoc autem alia ratione demonſtrare ſuperuacaneum non erit, cum demonſtratio, quæ in textu Arabico corrupto affertur non omnino ſufficiens videatur, ſed prius oſtendendum eſt.* a

LEMMA I.

IN duabus æqualibus coniſectionibus A B C, & D E F, quarum axes A G, D H deſcribere duos circulos æquales contingentes conicas ſectiones, quorum is, qui propinquior eſt vertici extrinſecus, reliquus verò intrinſecus ſectionem tangat.

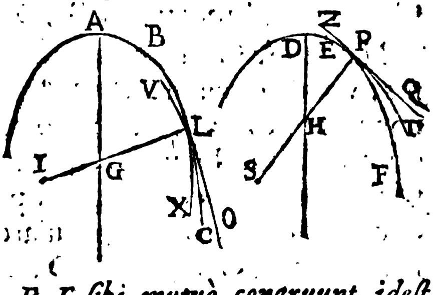
In



In ſectione A BC ducatur ramus breuiſecans ſingularis I L ſecans axem in G, ſitque I punctum concurſus perpendicularis I K, & breuiſecantis; 51. 52. 53. lib. 5, *& à quolibet puncto B inter L, & verticem A ducatur alius ramus breuiſecans B M, qui occurret L I vltra axim in M, & inter puncta G, & I; coniungâturque recta linea B I.* 28. lib. 5. 8. Addit. lib. 5. *Quoniam angulus L G A acutus eſt, erit angulus G M N internus, & oppoſitus in triangulo G M N minor illo, & ideo acutus, & pro-* 13. 14. 15. lib. 5. *pterea qui deinceps eſt angulus B M I erit obtuſus, & ideo in triangulo I B M latus I B ſubtendens maximum angulum obtuſum maius erit latera B M; ſed ramus I L maior eſt, quàm I B, propterea quod remotior eſt à vertice A, igitur* 67. lib. 5. *ramus I L maior erit, quàm B M: Secari ergo poterunt æquales rectæ lineæ L R, B S, quæ ſint minores quidē, quàm I L, ſed maiores, quàm M B; & deſcribantur duo circuli, quorum radij ſint S B, & R L æquales, atque centra ſint S, & R; Manifeſtum eſt circulum, cuius radius B S contingere coniſectionem A C in* Ex 12. Addit. lib. 5. *puncto B; & extrinſecùs incedere, propterea quod radius B S maior eſt maximo breuiſecantium M B à concurſu M educto; è contra circulus radio R L deſcri-* 8. Addit. lib. 5. Ibidem. *ptus intrinſecùs continget eandem coniſectionem in L cum ramus M L minor ſit ſingulari breuiſecante L I. Tandē in ſectione D E F ſecetur axis abſciſſa D H æqualis A N, & in angulo D H P æquali angulo A N B ducatur radius Y H P, qui fiat æqualis S B, & cētro Y radio verò Y P circulus deſcribatur. Et quia in ſectionibus æqualibus abſciſſæ, breuiſecantes, anguli ab eis contenti, & circuli deſcripti ſunt æquales, & congruentes; igitur circulus radio Y P deſcriptus, contingit coniſectionem D E F extrinſecùs; ſicuti circulus radij S B tangebat ſectionem A B C in B extrinſecùs. Vt erat propoſitum.*

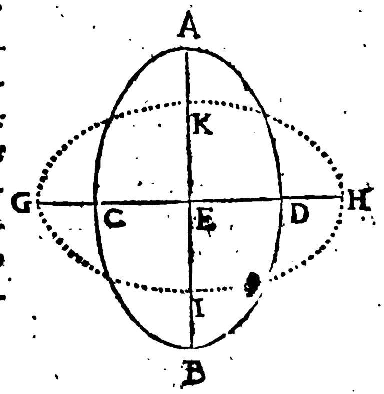
Hoc demonſtrato oſtendetur, quod in duabus coniſectionibus A B C, PROP. 1. Addit. *D E F æqualibus, quarum axes A G, D H duæ portiones B C, & E F non æquè ab axium verticibus remotæ non erunt ſibi congruentes.*

Si enim poſſibile eſt B C, & E F ſibi mutuò congruant, & ſumatur intermedium punctum commune, vel duo puncta coincidentia L, & P, & quia portiones B C, E F inæqualiter diſtant à verticibus, ergo puncta coincidentia L, P non erunt æquè à verticibus remota; ſit ergo P propinquius vertici D, quàm eſt L vertici A, & per L, & P ducantur rectæ lineæ L O, P Q tangentes ſectiones, & ex lē- 33. 34. lib. 1. *mate præcedenti deſcribantur duo circuli æquales Z P T, & V L X radijs I L & S P, quorum Z T extrinſecus tangat ſectionē in P, & V X intrinſecus in L, cumque eorum radij I L, S P ſint breuiſecantes, erunt perpendiculares ad L O, P Q contingentes* 29. 30. lib. 5. *ſectionem in L, & P; atque portiones B C, B F ſibi mutuò congruunt, ideſt conſtituunt vnicam communem peripheriam, ergo rectæ lineæ L O, P Q* 35. 36. lib. 1. *contingentes eandem ſectionem ſibi mutuò congruent, pariterque breuiſecantes æquales L I, P M ad illas perpendiculariter inſiſtentes erunt congruentes quoque; & propterea circuli V X, Z T ab ijs radijs geniti erunt quoque congruentes,*



entes; ideoque ſi vnus eorum, nempe Z T extrinſecùs tangit communem portionem conicam B C, reliquus V X extrinſecùs quoque eam tanget, ſed ex conſtructione intrinſecùs ſectionem tangebat, quod eſt abſurdum: Non ergo duæ portiones B C, & E F non æquè à verticibus axium remotæ ſibi mutuo congruent. Quod erat oſtendendum.

Si autem cadit in ellipſi axis A C tranſuerſus ſuper axim rectum illius; vtique excedit illam, & non ſibi mutuò congruunt ſectiones, & quædam congruunt, &c. *Senſus eſt. Si intelligantur duæ ellipſes, habentes axes tranſuerſos A B, & G H æquales inter ſe, pariterque axes rectos C D, I K æquales: & axis A B tranſuerſus vnius ponatur ſuper I K axim rectum alterius, ita vt centra ſibi mutuò congruant in E: tunc quidem, quia axes in ellipſi inæquales ſunt (alias eſſet circulus) igitur extremitates axis tranſuerſi A B non cadunt ſuper extremitates axis recti K I, neque G, H cadunt ſuper C, D; & ideo circumferentiæ ellipſium ſe ſe mutuò ſecant quatuor in locis, vt in libro 4. oſtenſum eſt.* b

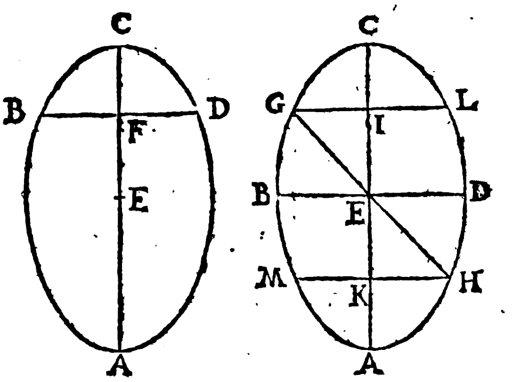


SECTIO TERTIA

Continens Propoſit. V. & VIII.

PROPOSITIO V.

SI per centrum E ellipſis A B, C D tranſeat linea recta A C vſque ad ſectionem; vtique bifariam diuidit ſuperficiem ſectionis, & circumferentiam illius, ſcilicet erit ſuperficies A B C æqualis ſuperficiei A D C.



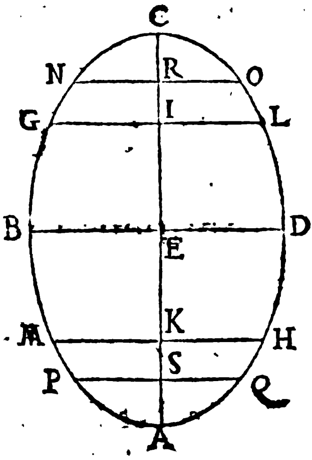
Nam ſi A C fuerit axis ſectionis, vtique circumferentia A B C congruet A D C, nam ſi non cõgruit ſignemus locum B, quod alteri ſectioni nõ coincidat, & producamus ex illo perpendicularem B F ſuper A C vſque ad D. Ergo B D ordinata eſt ad C A, & propterea B F ſuperpoſita cõgruet ipſi D F, & cadet B ſuper D, quia B F æqualis eſt D F (8. ex 1.); ſed non cadebat ſuper illum; quod eſt abſurdum. Igitur circumferentia A B C æqualis eſt circumferentiæ A D C, & ſuperficies illius æqualis ſuperficiei.

Iam linea G H tranſiens per centrum ellipſis non ſit axis. Ducamus ex G, H ſuper axim C A duas perpendiculares G I, H K, quæ pertingant ad L, M. Et quia ſi ponatur A D C ſuper A B C, congruit G I ſuper L I (7. ex 6.) & cadet G ſuper L, quia G I æqualis eſt I L, & cadit circumferentia C G ſuper circumferentiam C L; ergo ſuperficies C I G æqualis eſt ſuperficiei C I L: & quia B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, cadet C I ſuper A K, & L I ſuper K H, & circumferentia C L ſuper circumferentiam A H (quia E I æqualis eſt E K) & ſuperficies C I L congruit ſuperficiei A K H; & propterea ſuperficies A K H æqualis eſt G I C, & triangulum E G I æquale eſt triangulo E K H; igitur ſuperficies A E H æqualis eſt ſuperficiei G E C, & circumferentia A H æqualis eſt circumferentiæ G C, eritque circumferentia C D H, & ſuperficies eius æqualis A B G, & ſuperficiei illius. Quare G H tranſiens per centrum ſectionis A B C D bifariam eam diuidit. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIII.

Similiter conſtat, quod ſi ex quolibet quadrante ellipſis ſecentur circumferentiæ, per quarum extremitates rectæ lineæ coniunctæ ſint ad eundem axim ordinatim applicatæ, & æquè à centro remotæ; vtique ſunt congruentes, & æquales, nec alicui portioni eiuſdem ſectionis vna illarum æqualis eſt.

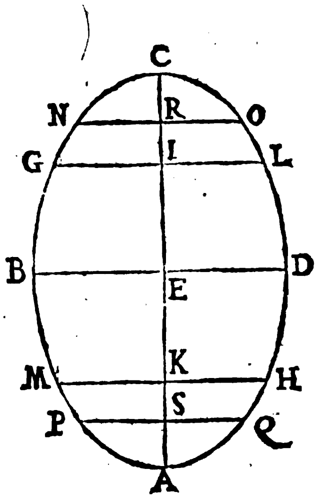
a Nam demonſtrauimus, quod duæ ſuperficies
G I C, L I C ſibi congruunt, nec non congru-
unt, duabus ſuperficiebus H A K, M A K (5.
ex 6.); & ſi eduxerimus duas ordinationes N
O, P Q, quarum diſtantiæ à centro ſint æqua-
les, ſimili modo oſtendetur, quod ſuperficies
N R C, O R C, A S Q, A S P ſint congruen-
tes (5. ex 6.) & quod circumferentiæ N C, C
O, A Q, A P ſint congruentes, remanebunt
quatuor ſegmenta G N, L O, H Q, M P con-
gruentia, & ſuperficies quoque eorum congru-
b entes. Et inſuper dico, quod quodlibet horum
ſegmentorum non congruit alicui alio ſegmen-
to; nam ſequeretur, quod in eadem ellipſi ſint 48. lib. 2.
tres axes, vti dictum eſt. Quare patet propoſitum.



Notæ in Propoſit. V.

ATque B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, &c. *Quoniam in ſecunda figura B D eſt axis ellipſis per centrum E ductus; ergò vt in prima parte huius propoſitionis dictum eſt, ſibi mutuò congruent ſemiellipſes B C D, & B A D.* a

Notæ in Propoſit. VIII.



NAm demonſtrauimus, &c. *Expoſitio huius propoſitionis hæc erit. Sit ellipſis A B C D, cuius axes C A, & B D, & in quolibet eius quadrante ſignentur tales circumferentiæ N G, O L, H Q, M P, vt coniunctæ rectæ lineæ O N, G L, H M, Q P ſint ad axim A C ordinatim applicatæ ſecantes eum in R, I, K, S; ſintque binarum extremarum N O, P Q à centro E diſtantiæ æquales E R, E S, & binarum intermediarum L G, H M æquales à centro diſtantiæ E I, E K oſtendendum eſt ſegmenta G N, L O, H Q, M P æqualia eſſe.* a

Et inſuper dico, quod quodlibet horum ſegmentorum non congruet alicui alio ſegmento, &c. *Si enim in eodem, vel in duabus ellipſis quadrantibus ſumantur ſegmenta G N, & M P non æque ab axis vertice B vel à verticibus A, C eiuſdem axis remota, non erunt congruentia, vt deducitur ex propoſ. 1. additarum huius.* b

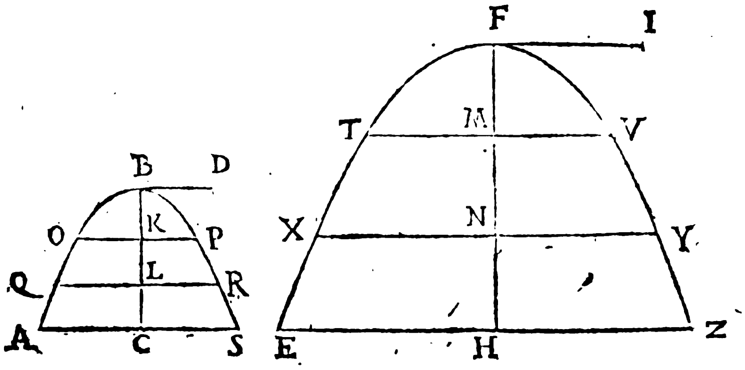
SECTIO QVARTA

Continens Propoſit. XI. XII. XIII. & XIV.

PROPOSITIO XI.

QVælibet ſectio parabolica, vt A B, cuius axis B C, & erectum B D ſimilis eſt cuilibet ſectioni parabolicæ, vt E F, cuius axis F H, & erectum F I.

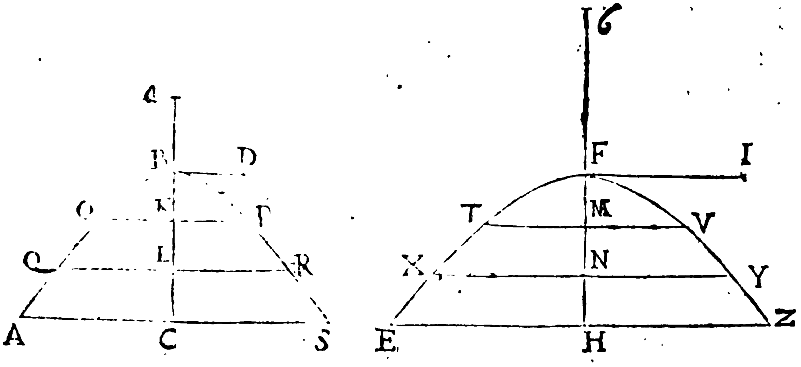
Pona-



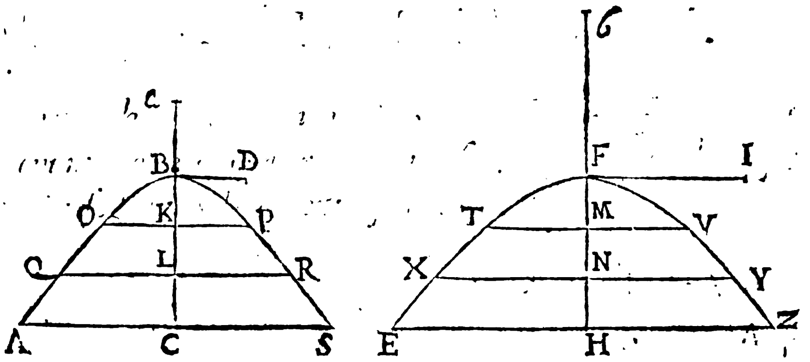
Ponamus itaque C B ad B D, vt H F ad F I, & diuidantur tam B C, quàm F H in punctis K, L, M, N in eiſdem rationibus, & educamus ſuper eas ordinationes O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z. Quia B C ad B D eſt vt H F ad F I, & A C eſt media proportionalis inter C B, B D (12. ex 1.) pariterque E H inter H F, F I (12. ex 1.) igitur A C ad C B eſt, vt E H ad H F, & A S dupla ipſius A C ad C B eſt, vt E Z ad Ex 11. lib. 1.
a H F; cumque B C ad B L poſita ſit, vt H F ad F N, erit B D ad B L, vt I F ad F N; igitur Q R ad L B eſt vt X Y ad N F; atque ſic oſtendetur, quod O P ad K B eſt, vt T V ad M F, quare proportio ordinationum axis vnius ſectionum ad ſua abſciſſa eſt, vt proportio ordinationum alterius ad ſua abſciſſa, & proportiones abſciſſarum vnius ſectionis ad abſciſſa alterius ſectionis eædem ſunt. Quare ſectio A B ſimilis eſt ſectioni E F. Quod erat oſtendendum. Defin. 2. huius.

PROPOSITIO XII.

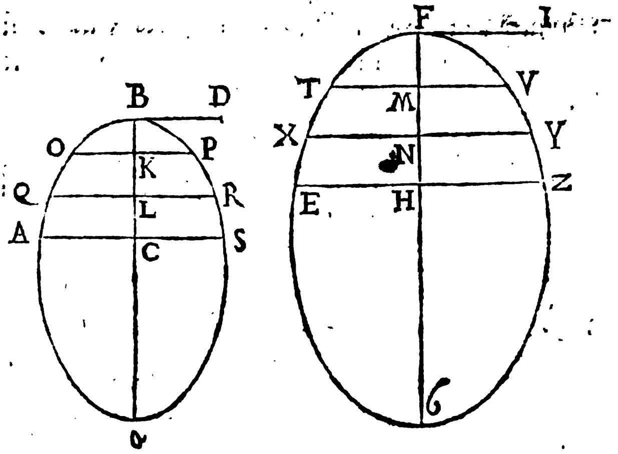
SI duarum hyperbolarum, aut ellipſium duæ axium figuræ fuerint ſimiles, vtique ſectiones ſimiles erunt: Si verò fuerint ſectiones ſimiles, figuræ etiam ſimiles erunt.



Sint ſectiones A B, E F, earum axes inclinati, vel tranſuerſi B *a*, F *b*,
a & erecti earum B D, F I, & maneant ſigna, ordinationes, & proportio-
b nes eædem, quæ in præcedenti propoſitione. Quoniam figura ſectionis



A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F, erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B; & *b* H in H F ad quadratum H F, vt *a* C in C B ad quadratum C B (nam poſuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*), ergo ex æqualitate, quadratũ E H ad quadratũ H F eſt, vt quadratum A C ad quadratum C B: & propterea E Z ad H F eſt vt A S ad C B; Atque ſic oſtendetur, quod X Y ad N F ſit vt Q R ad L B, & T V ad M F ſit vt O P ad K B; ergo proportiones ordinationum axis vnius earum ad ſua abſciſſa ſunt eædem rationibus aliarum ordinationum axis Defin. 2. huius. ad ſua abſciſſa, & alternatiuè. Quare duæ ſectiones ſunt ſimiles.



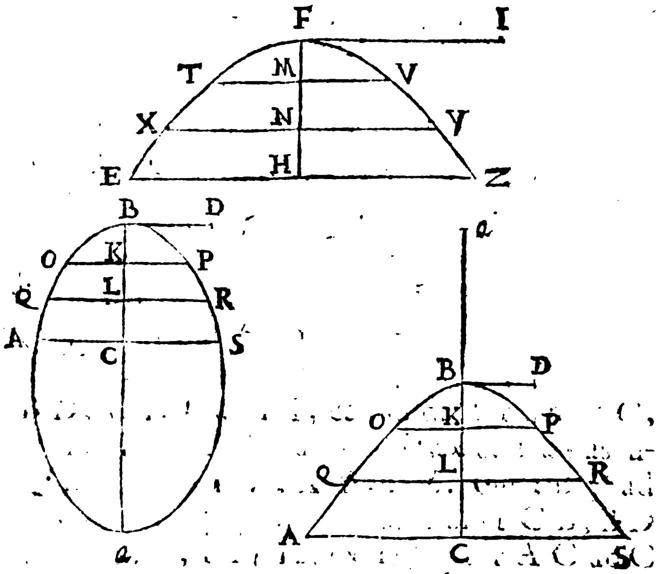
Econtra oſtendetur, quod ſi duæ ſectiones fuerint ſimiles, earũ figuræ ſimiles quoque erunt. Ex def. 2. huius. Quia eſt A C ad C B, vt E H ad H F, & eandem proportionem habent earum quadrata, atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt, vt quadratum C B ad C B in C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit, vt C B ad B *a*); ergo ex æqualitate quadratum E H ad *b* H in H F, nempe I F 21. lib. 1. ad F *b* (20. ex 1.) eſt, vt quadratum A C ad *a* C in C B, nempe vt Ibidem. D B ad B *a* (20. ex 1.); quare figuræ duarum ſectionum ſunt ſimiles, Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIII.

PArabola non eſt ſimilis hyperbolæ, neque ellipſi.

Hyperbolæ, ſeu ellipſis A B ſit axis B C, & inclinatus, ſeu tranſuerſus B *a*, & E F ſit ſectio parabolæ, cuius axis F H. Dico, quod ſectio E F non eſt ſimilis ſectioni A B hyperbolicæ, aut ellipticæ, alioquin ſit ſimi-

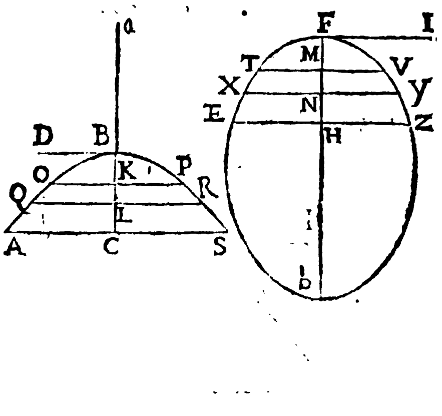
lis ali-



b lis alicui earum (ſi poſſibile eſt) ergo poſſumus educere in ſingulis ſectionibus potentes, quæ habeant ad ſua abſciſſa axium eaſdẽ proportiones, & abſciſſæ inter ſe ſint proportionales; ſintque illæ V M, Y N, P K, R L. Quia Y N ad N F poſita fuit, vt R L ad L B, & N F ad F M, vt L B ad B K, & F M ad M V, vt B K ad K P; ergo Y N ad M V in potentia, nempe N F ad M F (cum ſectio ſit parabola 19. ex 1.) nempe L B ad B K ex contructione erit, vt R L ad K P potentia, 20.lib. 1.
quæ eandem proportionem habent, quàm *a* L in L B ad *a* K in K B; 21.lib. 1.
quia ſectio eſt hyperbolæ, aut ellipſis (20. ex 1.) quare *a* L in L B ad *a* K in K B eſt, vt L B ad B K; quare *a* L eſt æqualis *a* K: quod eſt abſurdum. Igitur parabole non eſt ſimilis vlli reliquarum ſectionum. Et hoc erat probandum.

PROPOSITIO XIV.

ET ſic oſtendetur, quod hyperbolæ non eſt ſimilis ellipſi.



a Alioquin ſequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, nempe *a* L in L B ad *a* K in K B in hyperbola eſt, vt quadratum Y N ad quadratum M V, ſeu vt *b* N in N F ad *b* M in M F in ellipſi. His poſitis: quia L B ad B K poſita fuit, vt N F ad M F; ergo *a* L ad *a* K eandem proportionem habet, quàm *b* N ad *b* M: & hoc eſt abſurdum. Quare ſectio A B non eſt ſimilis E F; vt fuerat propoſitum. 21.lib. 1.

MONI-

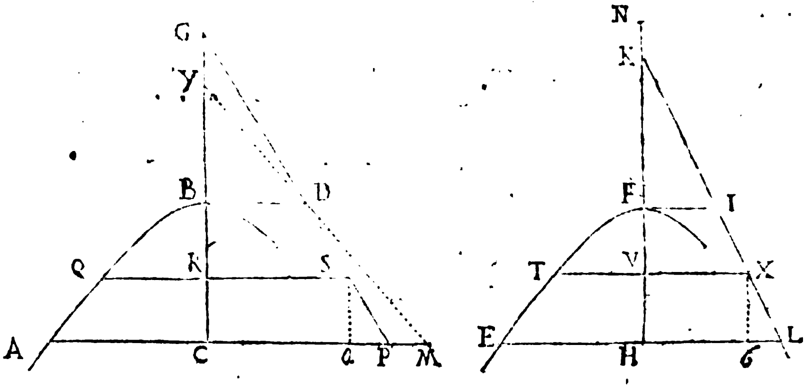
MONITVM.

IN principio huius libri monuimus, definitionem ſimilium conicarum ſectionum, quæ circunfertur, vitioſam eſſe; quod hic oſtendendum ſuſcepimus: ſed prius hæc demonſtranda ſunt.

LEMMA II.

IN duabus coniſectionibus A B, E F eiuſdem nominis ſint axium figuræ G B D, K F I ſimiles inter ſe, ideſt tranſuerſa latera G B, K F proportionalia ſint lateribus rectis B D, F I: duci debent in ſingulis ſectionibus ſeries applicatarum ad axes, ita vt axium abſciſſæ (quæ proportionales ſunt inter ſe) ad conterminas potentiales non ſint in iiſdem rationibus.

Sumantur duæ abſciſſæ B C, F H, quarum C B ad B D habeat maiorem proportionem, quàm habet H F ad F I, & G B, H F ſecentur proportionaliter in R, K, & per ea pũcta ducantur ad axes ordinatim applicata A C, E H, Q R, T V. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportio-



21. lib 5. *nem habet, quàm latus rectum D B ad tranſuerſum G B, pariterq; quadratum E H ad rectangulum K H F eſt vt I F ad F K; atq; D B ad B G ex hypotheſi, eſt vt I F ad F K; ergo quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet quàm quadratum E H ad rectangulum K H F: & quia G B ad B D eſt vt K F ad F I, & D B ad B C minorem proportionẽ habet quàm I F ad F H, ergo ex æquali G B ad B C, minorem proportionem habet quàm K F ad F H, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi G C ad C B ſeu rectangulum G C B ad quadratum B C minorem proportionẽ habebit quàm K H ad H F, ſeu quàm rectangulum K H F ad quadratum F H: erat autem quadratum A C ad rectangulum G C B vt quadratum E H ad rectangulum K H F; igitur ex æquali, quadratum A C, ad quadratum C B minorem proportionem habet quàm quadratum E H ad quadratum H F, & ideo A C ad C B*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm E H ad H F. Poſtea quia C B ad B R erat vt H F ad F V, & prius G B ad B C minorē proportionem habebat, quàm K F ad F H, ergo ex æquali G B ad B R minorem proportionem habet, quàm K F ad F V, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi G R ad R B, ſeu rectangulum G R B ad quadratum B R minorem proportionem habet, quàm K V ad V F, ſeu rectangulum K V F ad quadratum V F; ſed propter ſimilitudinem figurarum, vt prius quadratum Q R ad rectangulum G R B eſt vt quadratū T V ad rectangulum K V F; ergo ex æquali quadratum Q R ad quadratum R B minorem proportionem habet, quàm quadratum T V ad quadratum V F, & Q R ad R B minorem proportionem habebit, quàm T V ad V F. Et ſic reliquæ omnes abſciſſæ: quapropter patet propoſitum.

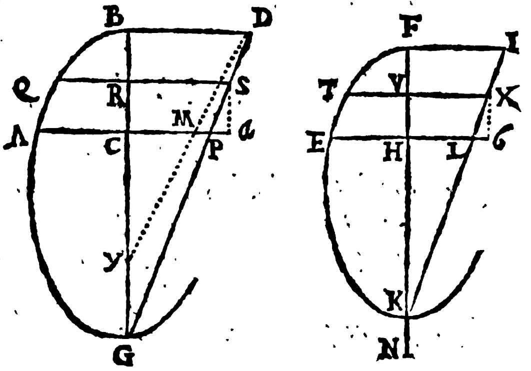
COROLLARIVM.

Hinc conſtat in duabus ſimilibus coniſectionibus duci poſſe duas ſeries applicatarum ad axes, itaut abſciſſæ axium, quæ inter ſe proportionales ſunt, ad ſuas potentiales nonſint in ijſdem rationibus. Quandoquidē ex prima parte propoſitionis 12. quotieſcunque axium figuræ ſimiles ſunt etiam ſectiones ipſæ ſunt ſimiles.

LEMMA III.

IN ijſdem figuris habeat G B ad B D maiorem proportionem, quàm K F ad F I duci debent duæ ordinatim ad axes applicatæ, quæ ad conterminas abſciſſas eandem proportionem habeant.

Ducatur quælibet ordinata E H, producanturq; vt ſecet coniunctam K I in L, & vt D B ad B G ita fiat L H ad H N, atq; fiat G C ad B C, vt N H ad H F, ducaturque ordinata A C; quæ producta ſecet coniunctam G D in P. Dico A C, & E H eſſe quæſitas. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C 21.lib. 1. *B eandem proportionem habet, quàm D B ad B G, ſeu L H ad H N, & rectāgulum G C B ad quadratum B C eſt vt G C ad C B, ſeu vt N H ad H F, ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eſt vt L H ad H F, ſeu vt rectangulum L H F ad quadratum H F; vel potius vt quadratum E H ad quadratum H F; ideoque A C ad C B erit vt E H ad H F. Quod erat propoſitum.*

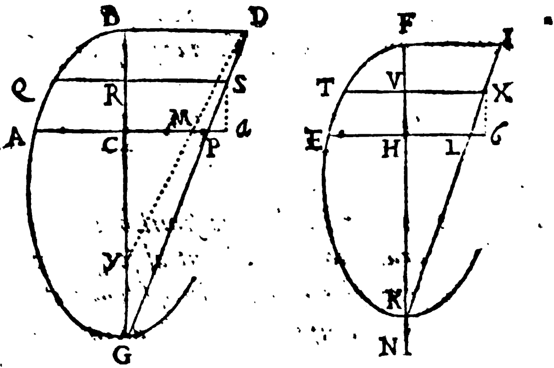


12. 13. lib. 1.

LEMMA IV.

LEMMA IV.

SI G B ad B D maiorem proportionem habuerit, quàm K F ad F I: Dico in ſingulis ſectionibus reperiri non poſſe binas axium abſciſſas inter ſe proportionales, quæ ad conterminas potentiales ſint in eiſdem rationibus.



Si enim fieri poteſt, ſit A C ad C B, vt E H ad H F, & Q R ad R B ſit, vt T V ad V F, atque C B ad B R ſit vt H F ad F V; coniungantur rectæ G D, K I quæ ſecet ordinatas in S, P, X, L; & ſecentur C a *æqualis R S, & H* b *æqualis V X, ſuntq; æquidiſtantes; ergo coniungentes S* a*, R C æquales ſunt, & parallelæ, & ſic etiam coniungentes X* b*, & V H, quare quadratum A C, ſeu rectangulum P C B ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, ſeu rectangulum L H F ad quadratum H F;* 12. 13. lib. 1. *ideoque P C ad C B eandem proportionem habet, quàm L H ad H F; eſt verò C B ad B R, vt H F ad F V, & per conuerſionem rationis C B ad C R eſt vt H F ad H V, ergo ex æquali C P ad C R eſt vt L H ad H V: Eodem modo oſtendetur, quod S R, ſeu* a *C ad R C eſt, vt X V, ſeu* b *H ad V H; erat autem P C ad C R vt L H ad H V; ergo* a *P differentia ipſarum S R, P C ad G R, ſeu ad S* a *eſt vt* b *L differentia ipſarum X V, L H ad H V, ſeu ad X* b*; eſtque D B ad B G vt P* a *ad S* a *(propter parallelas* a *S, C G, & parallelas* a *P, & B D) pariterque I F ad F K eſt vt L* b *ad* b *X, ergo D B ad B G eandem proportionem habet, quàm I F ad F K; quod eſt contra hypotheſim, non ergo binæ axium abſciſſæ inter ſe proportionales reperiri poſſunt in ſectionibus A B, & E F, quæ ad conterminas potentiales ſint in eiſdem rationibus; quod erat oſtendendum.*

COROLLARIVM.

HInc conſtat in duabus ſectionibus eiuſdem nominis ſi axium figuræ G B D, & K F I non fuerint ſimiles, neque ſectiones A B, & E F ſimiles eſſe. Nam eſt impoſſibile, vt omnes, ideſt infinitæ axium abſciſſæ inter ſe proportionales ad conterminas potentiales ſint in eiſdem rationibus, cum neque binæ in ſingulis reperiri poſſint ex hac propoſitione.

LEMMA V.

LEMMA V.

IN eiſdem ſiguris rurſus G B ad B D maiorem proportionem habeat, qnàm K F ad F I: Dico quod minimè reperiri poſſunt axium abſcißæ erectis proportionales, quæ habeant eandem rationem ad conterminas potentiales.

Secentur quælibet abſciſſæ, B C, F H ita vt C B ad B D ſit vt H F ad F I, & ducantur ordinatim ad axes applicatæ A C, E H, quæ productæ ſecent, coniunctas G D, K I in P, L, atque fiat Y B ad B D vt K F ad F I, iungaturque Y D ſecans A P in M. Manifeſtum eſt rectam C M inæqualem eſſe C P, (propterea quod Y B minor eſt, quàm G B, cum ad eandem B D minorem proportionem habeat, quàm G B, ideoque punctum Y, & recta Y D cadent intra triangulum G B D, & punctum M intra ipſum cadet, aut extra G D productam). Quoniam D B ad B Y eſt vt I F ad F K, & erat C B ad B D vt H F ad F I; ergo ex æquali C B ad B Y erit vt H F ad F K, & comparando terminorum ſummas in hyperbola, & differentias in ellipſi ad antecedentes, Y C ad C B erit vt K H ad H F; eſt verò M C ad C Y vt L H ad H K (eo quod triãgula M C Y, & L H K ſimilia ſunt triangulis ſimilibus B D Y, I F K,) ergo ex æquali M C ad C B erit vt L H ad H F, & rectangulum M C B ad quadratum C B eandem proportionem habebit, quàm rectangulum L H F ad quadratũ H F; ſed rectangulũ M C B æquale nõ eſt rectangulo P C B (cum M C oſtenſa ſit inæqualis P C); ergo rectangulum P C B, ſeu quadratum A C ad quadratum C B non eandem proportionem habet, quàm rectangulum L H F, ſeu quadratum E H ad quadratum H F; & propterea A C ad C B non eandem proportionem habebit quàm E H ad H F. Idem oſtendetur in reliquis omnibus abſciſſis ſimiliter poſitis. Quare patet propoſitum.

12. 13. lib. 1.

COROLLARIVM I.

MAnifeſtum eſt in coniſectionibus non ſimilibus duci poſſe duas ſeries applicatarum ad axes, itaut abſciſſæ ſimiles, ſeu proportionales inter ſe ad cõterminas potentiales non ſint in ÿſdem rationibus.

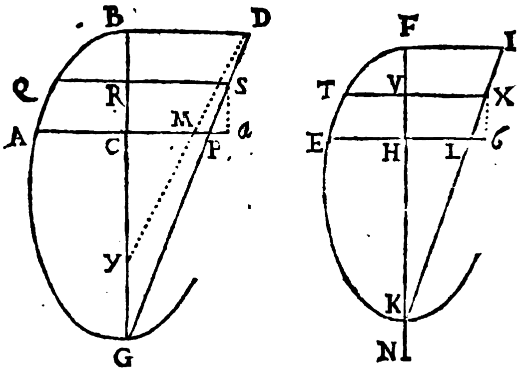
COROLLARIVM II.

COlligitur pariter conuertendo, quod in duabus ſectionibus eiuſdem nominis ſi duæ ſeries abſciſſarum ſimilium in axibus poſitæ fuerint, & in vna ſerie abſciſſæ ad conterminas potentiales maiorem proportionem habeant, quàm in altera ſerie, fieri poteſt vt figuræ axium non ſint inter ſe ſimiles: Quod verificatur ſaltem in caſu præcedentis propoſitionis.

His præmiſſis, quoniam paſſio in definitione poſita eſſentialiter conuenit definito eſt impoſſibile, vt eidem ſubiecto definito competant duæ paſſiones diuerſæ, & inter ſe oppoſitæ, exempli gratia, fieri non poteſt, vt in triangulis ſimilibus ali-

quando anguli vnius inæquales ſint angulis alterius, aut aliquaudo latera circa angulos æquales non ſint proportionalia; ita in definitione Mydorgiana, quia coniſectiones dicuntur ſimiles in quibus omnes axium abſciſſæ, quæ proportionales ſunt inter ſe in ijſdem ſunt rationibus ad conterminas potentiales; igitur eidem ſubiecto definito, ideſt in duabus ſectionibus conicis ſimilibus, eſt impoſſibile, vt reperiatur ſeries aliqua infinitarum ſimilium abſciſſarum in axibus, quæ ad conterminas potentiales non ſint in ijſdem rationibus, & ſiquidem duæ paſſiones oppoſitæ eidem ſubiecto definito conueniant nulla earum erit eius paſſio eſſentialis, & ideo definitio bona non erit: vt exempli gratia quia in duobus ſimilibus circulorum ſegmentis duo triangula inſcripta poſſunt eſſe æquiangula, & etiam non æquiangula; ergo ſimilitudo inſcriptorum triangulorum non eſt paſſio eſſentialis ſegmentorum circularium ſimilium inter ſe, & ideo non erit hæc bona definitio: Similia circulorũ ſegmenta ſunt in quibus deſcribi poſſunt duo triangula ſimilia, *& ratio eſt; quia per definitionem nedum natura rei declaratur, & indicatur, ſed etiam diſtinguitur, & diuerſificatur à qualibet alia; & quoniam in ſectionibus ſimilibus reperiuntur duæ ſeries ſimilium abſciſſarum, quæ ad conterminas potentiales non ſunt in ijſdem rationibus; & è contra ex definitione Mydorgij duæ ſeries ſimilium abſciſſarum, quæ ad conterminas potentiales ſunt in ijſdem rationibus, eſſentialiter conueniunt definito; igitur hæ duæ oppoſitæ paſſiones conueniunt eidem ſubiecto definito, ſcilicet ſectionibus ſimilibus iuxta Mydorgij ſententiam: quapropter tradita definitio ſectionum ſimilium vitioſa erit, & manca.*

Coroll. Lem. 2. huius.



Vt autem hoc clarius pateat exponantur duæ ſectiones A B, E F eiuſdem nominis, quarum axes B C, F H, & propoſitum primò ſit demonſtrare ſectiones illas eſſe ſimiles inter ſe; ergo oſtendendum eſt paſſionem definitionis traditæ conuenire ſectionibus A B, E F; quod nimirum ſimiles axium abſciſſæ in ijſdem rationibus debent eſſe ad cõterminas potentiales, & quia in definitione nulla cautio, vel determinatio adhibetur, igitur ſumi poſſunt quælibet axium abſciſſæ B C, F H, & hæc ſecari proportionaliter in R, V, & à punctis diuiſionum duci poſſunt ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V; & ſupponamus demonſtratum eſſe, quod B C ad C A ſit vt F H ad H E, pariterque vt B R ad R Q ſit vt F V ad V T, tunc quidem ex vi definitionis deducitur, quod ſimiles ſint ſectiones A B, & E F. At quia demonſtrari poteſt in ijſdem ſectionibus (ſumendo abſciſſas B C, F H ad libitum, & proportionaliter diuidendo eas in R, & V) quod B C ad C A habet maiorem proportionem, quàm F H ad H E; pariterque B R ad R Q maiorem proportionẽ habeat, quàm F V ad V T, & ſic ſemper; ergo non poterit deduci ſimilitudo potius quàm non ſimilitudo; ideoque definitio ſimilium ſectionum erit vitioſa, quandoquidem ex ea duæ contradictoria deducuntur.

ex Lem. 2. huius.

Coroll. 2. Lem. 5. huius.

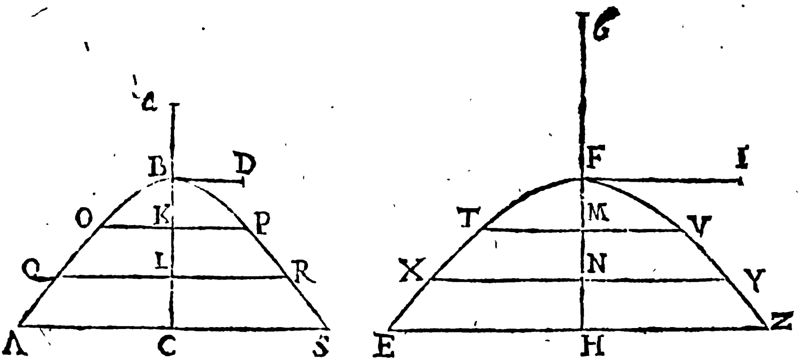
Secundo loco ſupponantur duæ ſectiones A B, & E F ſimiles inter ſe, & propoſitum, ſit demonſtrare quod axium figuræ, ſeu rectangula G B D, & K F I

ſint

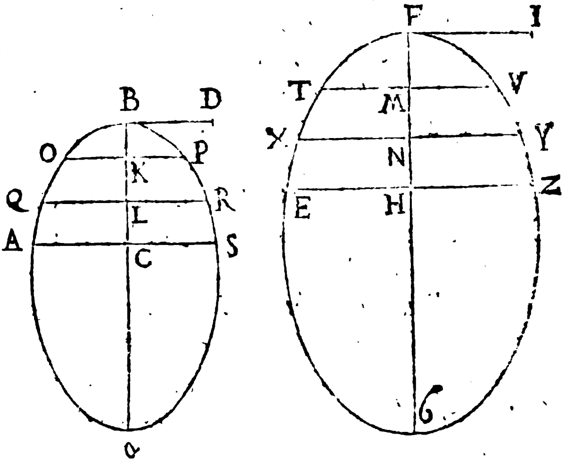
ſint ſimilia, quæ quidem, eſt propoſitio 3. libri 4. Mydorgÿ, eiuſque præparatio, ſeu conſtructio talis eſt (, & appono eius verba immutatis tantummodo literis figurarũ) ſint à ſectione A B ordinatim ad axim B C applicatæ binæ quæquæ A C, Q R, & vt C B ad B R ita ſit, H F ad F V, ordinatimque à ſectione E F applicentur E H, T V *(ſubſequitur poſtea demonſtratio &c.)* Quoniam igitur ſimiles ponuntur ſectiones A B, E F, & ſunt H F, F V portiones portionibus C B, B R ſimiles, *(ideſt proportionales)* vt B C ad C A, ita erit F H ad H E, & vt B R ad R Q, ita erit F V ad V T, &c.

Huiuſmodi verba ſubtiliori trutina expendenda ſunt. In præparatione, ſeu conſtructione aſſumit abſciſſas B C, & F H abſque vlla lege, aut determinatione; ergo ſumi poſſunt cuiuſcunq; longitudinis: quare fieri poteſt vt C B ad latus rectum B D non habeat eandem proportionem quàm habet F H ad F I, & tunc Lem. 2. huius. *ſicet C B, H F diuidantur proportionaliter, & ducantur potentiales, &c. A C ad C B habebit maiorem, aut minorem proportionem quàm E H ad H F, & pariter Q R ad R B non habebit eandem rationem, quàm T V ad V F, & ſit vlterius in tota ſerie; ſed ex hoc ſequitur, quod poſſint eſſe figuræ axium inter ſe* Coroll. 2. *non ſimiles; Mydorgius autem ſimiles eſſe concludit; igitur ex eadem hypotheſi,* Lem. 5. huius. *& ex eadem definitione deducitur, quod ſectiones ſimiles habent figuras axium ſimiles inter ſe, & non ſimiles, quod eſt impoſſibile; non igitur definitio à Mydorgio tradita legitima, & perfecta eſt: quod fuerat oſtendendum.*

Quod vero definitio à me reformata tribui poſſit Apollonio, conÿcitur præcipuè ex demonſtratione ſecundæ partis propor. 12. ibi enim ex hac ſuppoſitione, quod

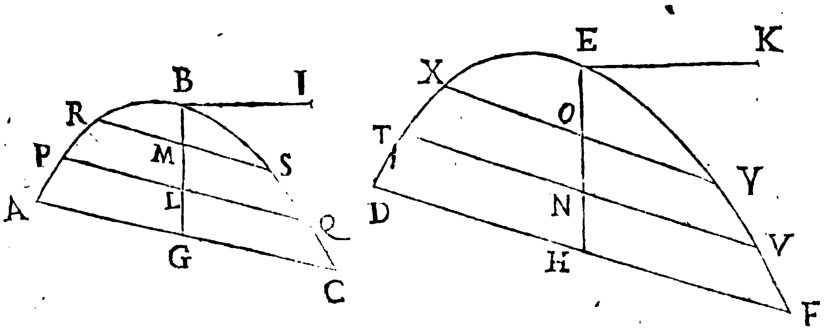


ſcilicet duæ ſectiones A B, & E F ſint ſimiles deducit earum figuras ſimiles eſſe. Ait enim: quia eſt A C ad C B vt E H ad H F, & eandem proportionẽ habent earum quadrata, atque quadratum H F ad rectangulum : F H *b* eandem proportionem habet quàm quadratum C B ad rectangulũ B C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit vt C B ad B *a*) ergo, &c. *Modo ſi accuratè hæc verba perpendantur non poterit hic vſurpari vulgata definitio Eutocÿ, vel Mydorgÿ; nam cum ſectiones A B, E F ſupponantur ſimiles, ea tantummodo quæ in definitione ſimilium ſectionum perhibentur concedi poſſunt, & nihil amplius; igitur ſi in definitione non includitur particula illa [abſciſſæ H F, C B ad erecta, vel tranſuerſa latera F* b, *B* a *ſint proportionalia] delirantis po-*



tis potius, quàm demonſtrantis eſſet dicere. Eo quod H F, ad F *b* poſita fuit vt C B ad B *a*; *vbi nam, aut quando hoc ſuppoſitum eſt, ſi in definitione non continetur? Nec ſuſpicari poteſt caſu hæc verba in textu irrepſiſſe, cum in alijs locis repetantur, & ab eis pendeat tota demonſtratio; igitur in definitione vulgata addenda eſt illa particula*, abſciſſæ ſint in eadem ratione ad erecta;

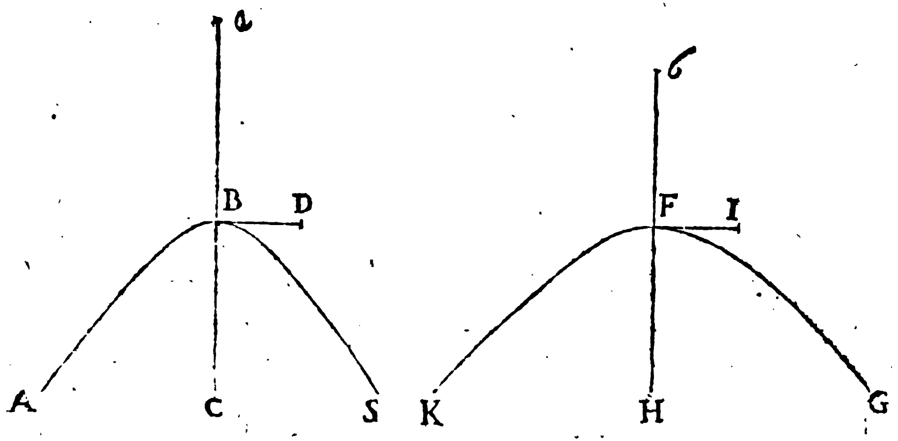
Rurſus in propoſ. 11. *&* 1. *parte* 12. *quando concluſio demonſtrationis eſt quod ſectiones A B, E F ſimiles ſint: tunc quidem quia tenetur oſtendere Apollonius definitionem traditam conuenire ſectionibus A B, E F, non aſſumit incautè abſciſſas homologas C B, H F, ſed ait in* 11. *propoſitione* ponamus C B ad B D vt H F ad F I, *& in* 12. *inquit*, nam poſuimus H F ad F *b* vt C B ad B *a*, &c. *Poſtea in propoſitione* 16. *litera a:* ergo M A ad A P, *ideſt abſciſſa ad erectum* eſt vt O C ad C Q, *ſeu vt homologa abſciſſa ad latus rectum*, & angulus O æqualis eſt M: patet igitur, vt diximus in 11. ex 6. quod ſi, &c. *Ex quibus locis ſatis apertè colligitur (ni fallor) id quod ſupra rationibus non leuibus inſinuaui, quod abſciſſæ proportionales eſſe debent erectis in ſectionibus ſimilibus.*



Sed hic animaduertendum eſt, eandem definitionem non poſſe æquè aptari ſectionibus conicis, atque ſegmentis conicis ſimilibus, vt perperam cenſuit Mydorgius: nam in ſegmentis conicis ſimilibus A B C, & D E F diametrorum æquè ad baſes inclinatarum abſciſſæ homologæ ex ſui natura determinatæ ſunt, quandoquidem non poſſunt eſſe maiores, neque minores quàm G B, & H E, quæ inter baſes A C, & D F ſegmentorum conicorum, & vertices B, E intercipiuntur; at ſi in conicis ſectionibus A B S, & K F G ſint axes tranſuerſis a *B, &* b *F ad ſua latera recta B D, & F I in eadem proportione, tunc quidem ſimiles erunt curuæ lineæ A B S, & K F G, quæ poſſunt habere indeterminatas, & multiplices longitudines, immo poſſunt in infinitum prolongari, ſi fuerint parabolæ*

Propoſ. 12. huius. lib. 1.

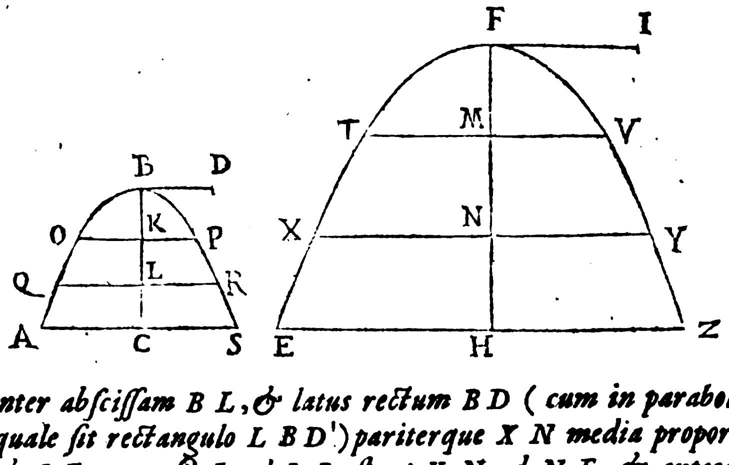
vel



vel hyperbolæ, nec habent baſes, à quibus circumſcribantur, igitur in ſectionibus ſimilibus A B, & G F homolegæ axium abſciſſæ B C, F H non ſupponuntur iam diſſectæ, & determinatæ; quare poſſunt eſſe cuiuſcunque menſuræ, & habere poſſunt eandem, & non eandem proportionem ad conterminas potentiales; & ideo ad vitandam incertitudinem adiungi debet determinatio, quod prædicta homologæ abſciſſæ B C, F H proportionales ſint lateribus rectis B D, F I, at in ſegmentis, ſeu portionibus ſectionum conicarum ſimilium inutilis omnino eſſet illa determinatio. An verò hæc mea ſententia omninò reijci debeat alijs indicandũ relinquo.

Notæ in Propoſit. XI.

a CVmque B C ad B L poſita ſit vt H F ad F N, &c. *Quia inuertendo D B ad B C eandem proportionem habet quàm I F ad F H, & C B ad B L eſt vt H F ad F N; ergo ex æquali ordinata D B ad B L eandem proportionem habebit, quàm I F ad F N; eſtque ordinatim applicata Q L media proportionalis inter abſciſſam B L, & latus rectum B D (cum in parabola quadratum Q L æquale ſit rectangulo L B D') pariterque X N media proportionalis eſt* 11. lib. 1. *inter F N, & I F; ergo Q L ad L B eſt vt X N ad N F, & antecedentium duplæ, ſcilicet Q R ad L B, atque X Y ad N F in eadem ratione erunt. Non ſecus oſtendetur O P ad K B vt T V ad M F.*



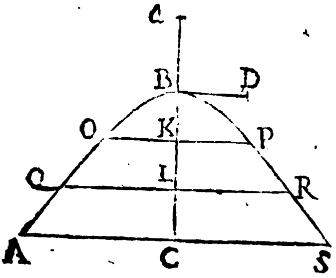
Notæ

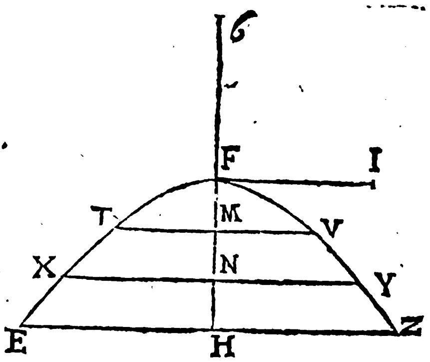
Notæ in Propoſit. XII.

a SVpponamus itaque ſectiones A B, E F, carum inclinati, vel tranſuerſi B *a*, F *b*, & erecti eorum B D, F I ordinationes, & propoſitiones, vti diximus, &c. *Ideſt. Sint axes inclinati, ſiue tranſuerſi B a, F b, & maneant ſigna, ordinationes, & proportiones eadem, quæ in præcedenti propoſitione; ſcilicet fiat C B ad B D, vt H F ad F I, & quia D B ad B a eſt vt I F ad F b (propter ſimilitudinem figurarum D B a, I F b) ergo ex æquali C B ad B a erit vt H F ad F b; & comparando antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad differentias in ellipſi erit B C ad C a vt F H ad H b: poſtea diuidantur tam B C, quàm F H in ijſdem rationibus in punctis K, L, M, N, & educantur ordinatim applicatæ, ſeu æquidiſtantes baſibus O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z.*

b Quoniam figura ſectionis A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B, & *b* H in H F ad quadratum H F, vt C *a* in C B ad quadratnm C B (nam poſuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*, &c.) *Quoniam in figuris, ſeu rectangulis ſimilibus D B a, & I F b habet D B ad B a eandem proportionem, quàm* 21. lib. 1. *I F ad F b, & vt D B ad B a, ita eſt quadratum A C ad rectangulum B C a, pariterque vt I F ad F b ita eſt quadratum E H ad rectangulũ F H b ſed (ſicut in præcedenti nota dictum eſt) C a ad C B, ſeu rectangulum B C a ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm H b ad H F, ſeu quàm rectangulum F H b ad quadratum F H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F.*

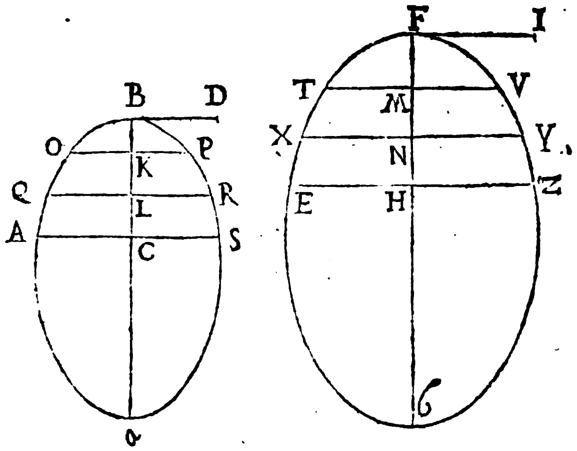
c Atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt vt quadratum C B ad B C in C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit C B ad B *a*), ergo ex æqualitate, &c. *Ideſt ſumãtur axium abſciſſæ C B, H F, quæ ſint proportionales lateribus rectis B D, & F I, ſeu proportionales ſint lateribus tranſuerſis B a, & F b, & ſecẽtur abſciſſæ B C, & F H proportionaliter in punctis K, L, M, N, & per puncta diuiſionum ducantur ordinatim applicatæ A C, Q L, E H, X N, &c. Quia ſectiones A B, E F ſupponuntur ſimiles; ergo ex definitione 2. huius A C ad C B eandem proportionem habebit, quàm E H ad H F, nec non Q L ad L B erit vt X N ad N F; & ideo quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionẽ habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F; & quia ex constructione iuxta leges definitionis 2. vt C B ad B a ita erat H F ad F b, & comparando antecedentes ad terminorũ ſummas in hyperbolis, & ad differentias in ellipſibus, habebit B C ad C a, ſeu quadratum B C ad rectangulum B C a eandẽ proportionem quàm F H habet ad H b, ſeu quàm quadratum F H habet ad rectangulum F H b; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum B C a eãdem proportionem habet, quàm quadratum E H ad rectangulum F H b; eſt verò latus rectum D B ad latus tranſuerſum B a, vt quadratum A C ad rectangulum B C a,*





B C a, *pariterque latus rectum I F ad tranſuerſum F* b *eſt vt quadratum E H ad rectangulum F H* b, *igitur D B ad B* a *eandem proportionem habebit quàm I F ad F* b, *& ideo figuræ axium ſimiles erunt.*

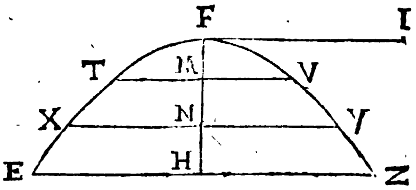
21. lib. 1.

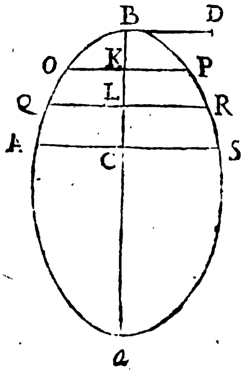


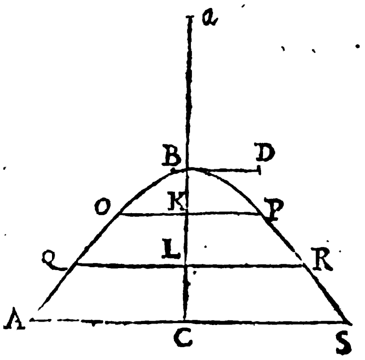
Notæ in Propoſit. XIII.

a Sint axes earum B C, & inclinatus, ſeu tranſuerſus B a, &c. *Addidi verba, quæ in expoſitione propoſitionis deficiunt. Hyperbole, ſeu ellipſis A B ſit axis B C, & inclinatus, ſeu tranſuerſus B* a, *& E F ſit parabole, cuius axis F H, &c.*

b Alioquin ſit (ſi poſſibile eſt) ſimilis vni earum, & minima ſimilis earum figuræ, quæ non ſunt ſimiles ſuis figuris: deinde poſſumus producere in ſingulis ſectionibus potentes, &c. *Non nulla verba ex hoc textu expunxi vt ſuperuacanea eiuſq; ſenſus hic eſt. Si enim parabola E F ſimilis eſt hyperbolæ, aut ellipſi A B (ex definitione ſimilium figurarum) duci poſſunt in vnaquaque duarum ſimilium ſectionum ordina-*







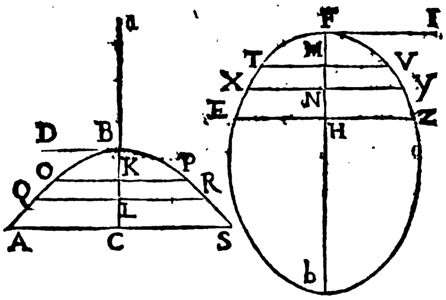
Defin. 2.

natim

natim ad axium applicatæ, numero pares, quæ ad abſciſſas ſint proportionales, tum abſciſſæ inter ſe: Vnde ſequitur poſtrema concluſio, quæ in textu habetur, quod nimirum rectangulum a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habeat, quàm abſciſſa, L B ad abſciſſam K B: ſed quotieſcunque duo rectangula eandem proportionem habent, quàm baſes, illa ſunt æque alta: igitur altitudines* a *L, &* a *K æquales ſunt inter ſe, pars, & totum: quod eſt abſurdum.*

Notæ in Propoſit. XIV.

Alioquin ſequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, &c. *In propoſitione deficit expoſitio, quæ talis eſt. Sit A B qualibet hyperbole, & E F qualibet ellipſis. Dico A B ipſi E F ſimilem non eſſe. Sint eorum axes latera tranſuerſa, & recta eadem, quæ in præcedenti propoſitione poſita ſunt. Et ſiquidem ſectiones A B, & E F ſimiles credantur, neceſſario ex definitione ſecunda, duci potcrunt ad axes ordinatim applicatæ numero pares proportionales abſciſſis, tum abſciſſæ inter ſe proportionales: & vt in præcedenti propoſitione oſtenſum eſt, quadratum R L ad quadratum P K, ſcilicet* a



21. lib. 1. *rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B in hyperbola eandem proportionem*

Ibidem. *habebit, quàm quadratum Y N ad quadratum V M, ſeu quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F in ellipſi, ergo rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habet, quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F: ſed eorundem rectangulorum baſes proportionales ſunt, eo quod L B ad B K erat vt N F ad F M; igitur eorundem altitudines proportionales erunt, ſcilicet* a *L ad* a *K eandem proportionem habebit, quàm* b *N ad* b *M, ſed in hyperqola* a *L maior eſt, quàm* a *K; in ellipſi verò contra* b *N minor eſt, quã* b *M; igitur maior* a *L ad minorem* à *K eandem proportionem habebit, quàm minor* b *N ad maiorem* b *M. Quod erat abſurdum.*

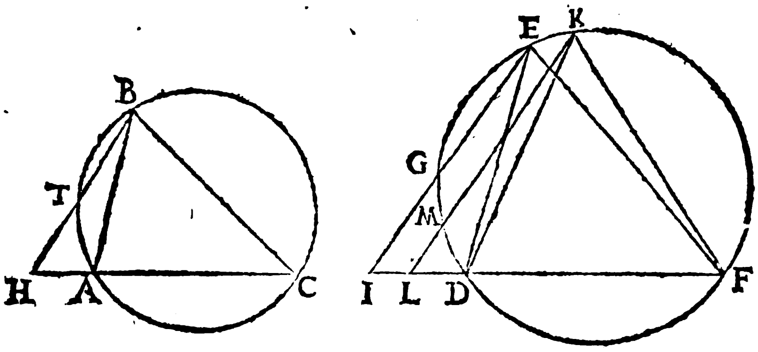
SECTIO QVINTA

Continens ſex Propoſitiones Præmiſſas,

PROPOSITIO I. II. III. IV. & V.

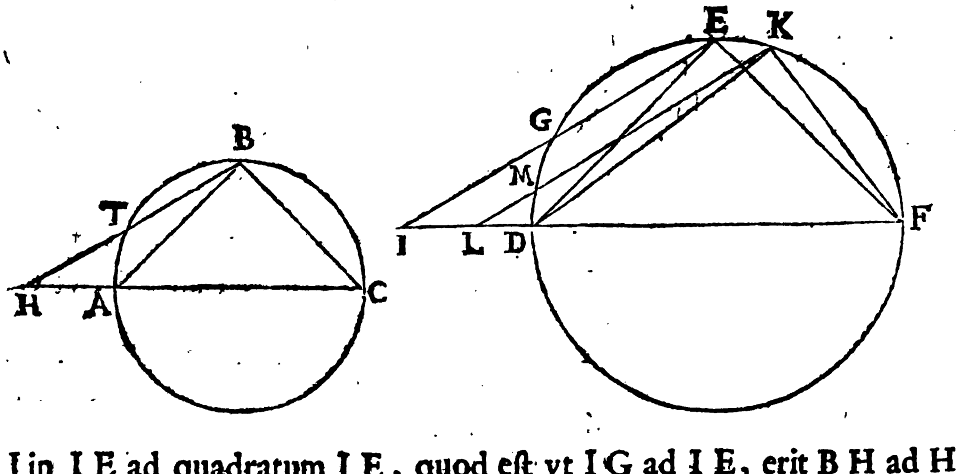
SI in triangulis A B C, D E F in duobus circulorum ſegmentis A T C, D G F deſcriptis, à duobus angulis B, E, educantur duæ rectæ lineæ B T H, E G I efficientes cum baſibus A C, D F duos angulos H, I æquales (incidentes in I

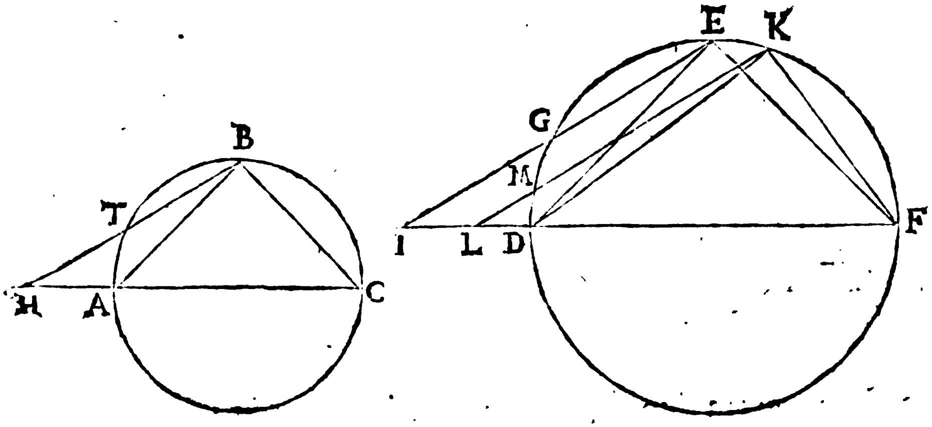
prima



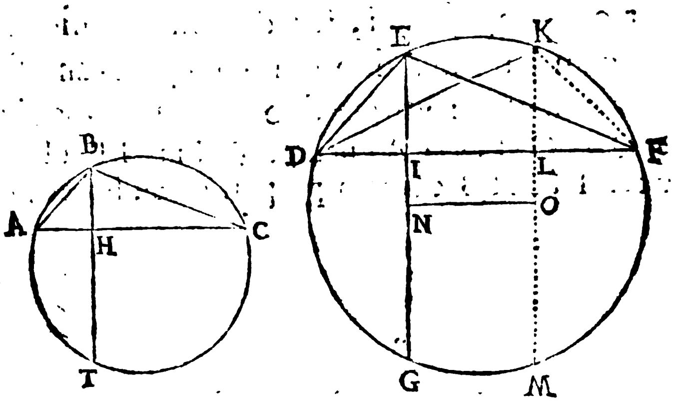
prima figura extra duo ſegmenta , & in ſecunda intra , at in ter-
tia intra duos ſemicirculos) , & fuerit proportio plani rectan-
guli ex portionibus lineæ baſis inter angulum prouenientem , &
2 duos angulos reliquos trianguli , nempe A H in H C ad qua-
dratum interceptæ inter prouenientem angulum , & circuli peri-
pheriam , nempe ad quadratum H B in quolibet caſu eadem
ſit , quàm D I in I F ad quadratum I E , vel H A in H C ad
quadratum H T ſit , vt D I in I F ad quadratum I G ; ſintque
duo priores anguli , inter ſe æquales , & prouenientes extra duo
3 triangula poſiti : vel duo priores recti , & prouenientes intra
duos angulos non ſint recti ; aut duo priores non recti , & pro-
4 uenientes recti intra duo triangula : vel duo priores diuerſæ ,
5 aut eiuſdem ſpeciei , ſed duæ lineæ efficiant duos angulos æqua-
les cum lateribus duorum triangulorum ſubtendentibus angulos
prouenientes : vtique duo priora triangula ſunt ſimilia .

Quia C H in H A ; nempe T H in H B ad quadratum H B , quod eſt , vt H T ad H B eandem proportionem habet , quàm D I in I F , nempe G I in I E ad quadratum I E , quod eſt vt I G ad I E , erit B H ad H T , vt E I ad I G ; ſimiliter , & eorum quadrata ; oſtendetur igitur ex æqua-





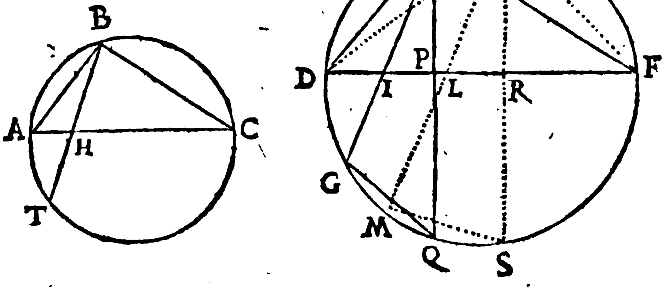
litate, quod ſi fuerit A H in H C ad quadratum H B, vt D I in I F ad quadratum I E, quod A H in H C ad quadratum H T ſit etiam, vt I D in I F ad quadratum I G. Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F. Si enim hoc verum non eſt, non erit angulus A æqualis vni duorum angulorum D, vel F: ſitque angulus D maior, quàm A, & fiat angulus K D F æqualis A, iungaturque F K; quia angulus K, veluti E, eſt æqualis angulo B; ſimilia erunt triangula A B C, D K F, & educamus K L parallelam E I: quare K L F ſimile quoque erit B H C b ideoque H A ad H B eſt vt D L ad L K, & H C ad H B, vt F L ad L K; igitur H A in H C, nempe B H in H T ad quadratum H B, quod eſt, vt H T ad H B, quæ oſtenſa eſt, vt I G ad I E, erit vt D L in L F, nempe K L in L M ad quadratum K L: & propterea M L ad L K erit vt G I ad I E in omnibus figuris; & hoc eſt abſurdũ c in prima figura: in ſecunda d verò ſecentur bifariam E G, K M in N, O, & iungatur N O, quæ parallela erit L I, quia ſunt duæ perpendiculares ſuper K M, E G, quæ ſunt parallelæ; ergo I N eſt æqualis L O, & quia E G ad E I iam oſtenſa eſt vt K M ad K L; ergo E N ad E I eſt, vt O K ad K L: & diuidendo erit N I ad I E, vt O L, quæ eſt æqualis N I ad L K. Et hoc quoque eſt abſurdum.



In figura autem tertia educamus duas perpendiculares E P Q, K R S e ſuper diametrum D F, cui occurrant in P, R: & iungamus G Q, M S, quia erat G E ad E I, vt M K ad L K, & propter ſimilitudinem triangulorum I E P, K L R, E I ad E P eſt, vt L K ad K R, atque E P ad E Q eſt, vt R K ad K S, & angulus G E Q æqualis eſt M K S; ergo E G

Q ſimile

Q ſimile eſt M K S, quare angulus G æqualis eſt angulo M, & propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus inſiſtunt, æquales erunt, quod eſt abſurdū: eſt enim E F Q maior, quàm K F S; ergo duo triãgula A B C, D E F in omnibus figuris ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO
Præmiſſa VI.

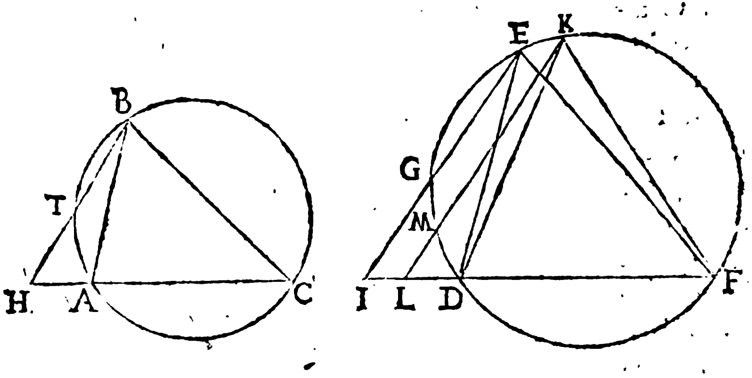
a DEinde ſint duo anguli B, E qualeſcunque; ſed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I, aut F E I: & ſupponantur reliqua omnia iam dicta.

Quia proportio C H in H A ad quadratum H B ſuppoſita eſt, vt F I in I D ad quadratum I E, & H C, vel H A ad H B eſt, vt F I, vel D I ad I E; erit etiam H A ad H B, vt I D ad I E, & duo anguli H, I ſunt æquales; igitur triangulum H B A, aut H B C ſimile eſt triangulo E D I, aut E F I, quare duo triangula A B C, D E F ſimilia ſunt; Et hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. Præmiſſas
I. II. III. IV. & V.

AFferuntur in hac ſectione aliquæ propoſitiones ſimul coacervatæ, quæ lemmaticæ ſunt, & vſum habent in ſequentibus propoſitionibus; ſanè conÿcitur ex hoc titulo PRAEMISSAE rubeis characteribus inſcripto, huiuſmodi lẽmata Textui Apollonÿ ab Arabico Interprete, vel ab aliquo alio ſuperaddita fuiſſe; licet Pappus Alexandrinus libro 7. afferat eadem ferè lemmata, tanquã propria, & conferentia ad Apollonÿ ſexti libri intelligentiam.

Poteſt tamen propoſitio vniuerſalis breuius exponi hac ratione. Si à verticibus duorum triangulorum à duobus circulis comprahenſorum rectæ lineæ ductæ efficiant cum baſibus angulos æquales; atque eorundem ſegmentorum inter baſim, & peripheriam interceptorum quadrata ad rectangula ſub factis ſegmentis ba-



ſium eandem proportionem habeant, fuerintque anguli verticales inter ſe æquales, vel qui à lateribus, & à vertice ductis continentur, ſint æquales: ſemper triangula erunt ſimilia.

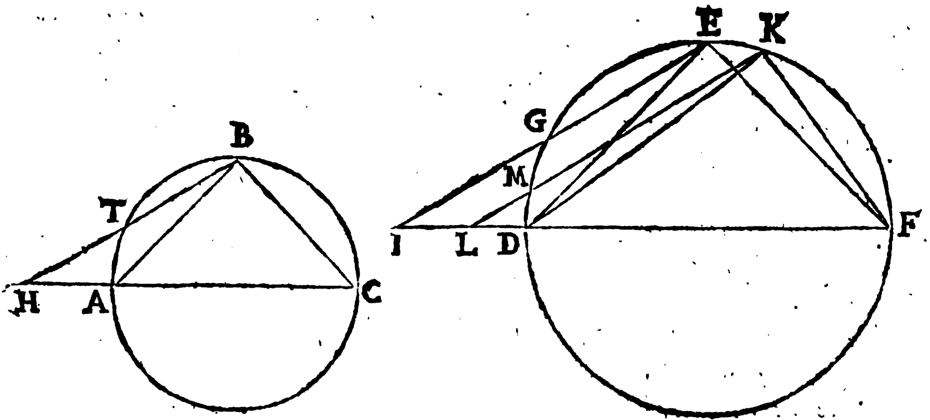
Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F, ſi enim hoc verum non eſt, ſit angulus D maior, quàm angulus A, &c. *Textus alterari debuit, nam duo triangula B A C, & E D F ponuntur non ſimilia, & propterea æquiangula non erunt, ſcilicet non habebunt duos angulos æquales duobus angulis alterius trianguli; ſed ex hypotheſi anguli verticales A B C, & D E F æquales erant; ergo angulus B A C non erit æqualis angulo E D F, neque angulo E F D; alias dicta triangula eſſent æquiangula, & ſimilia, quod non ponitur; igitur neceſſe eſt, vt angulus A non ſit æqualis vni duorum angulorum D, vel F, poſtea rectangulorum A H C, & D I F tam latus A H ipſius H C non ſit maius, quàm D I ipſius I F, & ad punctũ D fiat angulus F D K æqualis angulo A.* a

Quare K L F ſimile quoq; erit B H C, &c. *Quoniã angulus F D K æqualis eſt factus angulo C A B, & angulus F K D ſeu ei æqualis F E D eſt ipſi angulo A B C æqualis (cum in ſimilibus circulorum ſegmentis exiſtant), igitur in triangulis F K D, & C B A tertius angulus K F D æqualis erit tertio angulo C; & propter parallelas K L, E I eſt angulus D L K æqualis angulo D I E; eſt verò angulus A H B ex hypotheſi æqualis eidem angulo D I E; ergò angulus D L K æqualis eſt angulo A H B, & F L K æqualis angulo C H B: at oſtenſus fuit angulus K F L æqualis angulo B C H; ergò angulo C B H æqualis eſt angulus F K L; ideoque triangula C B H, & F K L ſimilia erunt. Pariterq; duo triangula B A H, & K D L ſimilia erunt, cum angulus L æqualis ſit angulo H, & angulus K D L æqualis ſit interno B A H.* b

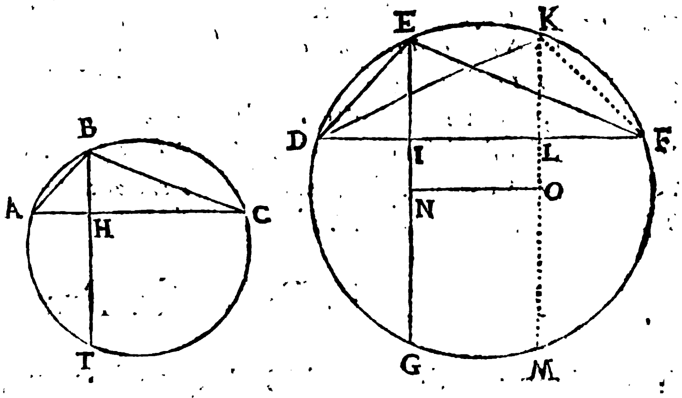
Et hoc eſt abſurdum in prima figura, &c. *Quoniam ſunt rectæ lineæ in circulo applicatæ K M, E G parallelæ inter ſe; ergo coniunctæ rectæ lineæ E K, G M parallelæ erunt inter ſe, aut conuenient extra circulum cum diametro bifariam, & ad angulos rectos diuidente applicatas E G, K M; ſed eadem recta linea G M ſecat trianguli baſim F A I intra circulũ, aut extra ipſum inter puncta I, A, & F; (propterea quod angulus E I F conſtituitur à duabus in circulo applicatis extra ipſum concurrentibus); ergo tres coniunctæ rectæ lineæ K E, M G, & I L, nec ſunt omnes inter ſe parallelæ, nec in vno puncto conueniunt; & propterea E I, & K L* c

ſecta

ſecta non erunt proportionaliter in punctis G, [& M, ſed prius oſtenſa fuit E I ad I G vt K L ad L M; quod eſt abſurdum.



d In ſecunda verò ſecentur bifariam E G, K M in N O, &c. *Sunt enim in tertio caſu K M, & E G perpendiculares ad baſim D F; igitur ſi ſecentur bifariam in O, & N coniuncta recta linea N O diameter circuli erit, quandoquidem diuidit bifariam duas equidiſtantes in circulo applicatas; & ideo eas ſecat ad angulos rectos, ſicuti D F eaſdem perpendiculariter ſecabat; & propterea I N O L parallelogrammum erit, cuius latera oppoſita N I, & O L æqualia erunt. Poſtea quia oſtenſa fuit I G ad I E, vt L M ad L K; ergo ſummæ terminorum ad conſequentes proportionales erunt; ſcilicet G E ad E I erit vt M K ad K L, & antecedentiũ ſemiſſes N E ad E I, vt O K ad K L: & diuidendo, duæ æquales N I, O L eandem proportionem habebunt ad I E, & L K; ideoq; I E æqualis eſt L K. Et quoniã triangulum A B H ſimile eſt triangulo D K L; ergo A H ad H B eandem proportionem habet, quàm D L ad L K; eſtque triangulum B H C ſimile triangulo K L F; ergo B H ad H C eſt vt K L ad L F, & ex æqualitate vt A H ad H C ita eſt D L ad L F; erat autem ſegmentum A H non maius ſegmento H C; ergo D L maius non erit ſegmento L F; ſed erat ſegmentum D I non maius ſegmento I F, igitur duo ſegmenta D I, & D L non ſunt maiora, ideſt non ſunt maiora medietate totius D F, ſed diameter parallela ipſis K M, & E G ſecat D F bifariam; ergo K M, E G ad eaſdem partes diametri cadunt verſus D, & ſunt inter ſe parallelæ; ergo inæqualiter à centro diſtant; ideoque inæquales erunt inter ſe, & earum meditates N E, O K inæquales erunt; & ablatis æqualibus N*

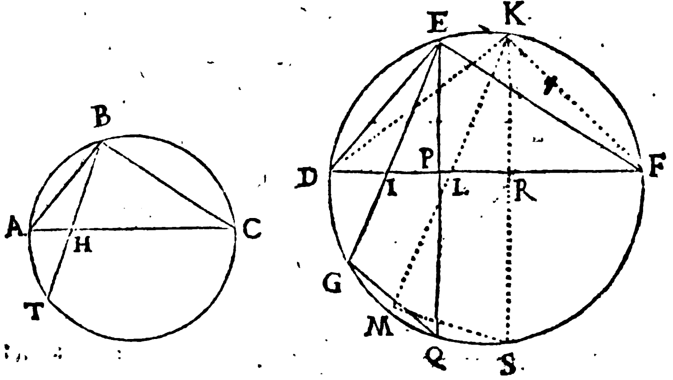


Lem. 1.

I,

F, O L remanebunt I E, L K inæquales. Quod eſt abſurdum: oſtenſæ enim fuerunt prius æquales inter ſe.

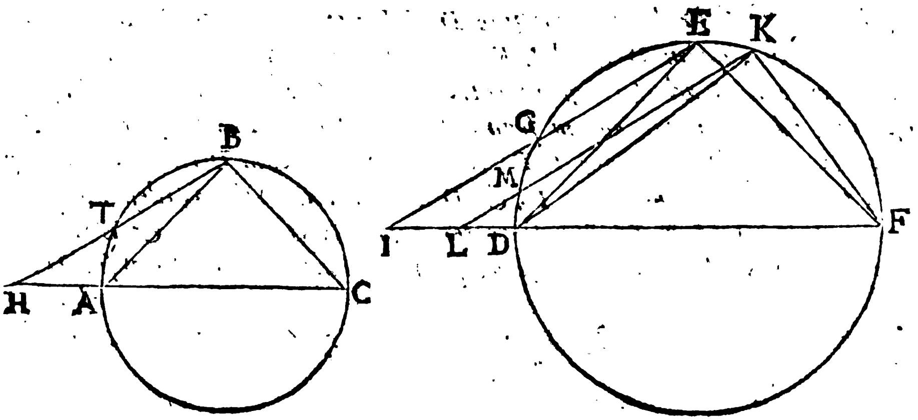
In figura autem tertia ducamus duas perpendiculares, &c. *In quarto caſu ſupponuntur baſes A C, & D F per centra circulorum tranſire, eo quod anguli A B C, & D E F recti ſupponuntur, atque rectæ lineæ B H, E I non ſunt perpendiculares ſuper eaſdem baſes, licet intra circulos efficiant angulos B H C, & E I F inter ſe æquales: perfecta igitur conſtructione, vt prius ad diametrũ D F, ducãtur ex punctis E, & K perpendiculares E Q, K S, quæ diuidẽtur bifariã, & ad angulos rectos in P, & R. Et quoniam (vt in præcedenti caſu oſtẽſum eſt) G E ad E I eandem proportionem habet, quàm M K ad K L, cumque latera I E, L K ſint parallela, pariterque P E, & K R æquidiſtent, atque baſes I P, L R in directum poſitæ ſint, erunt triangula I E P, & L K R æquiangula, & ſimilia: & propterea I E ad E P erit, vt L K ad K R; eſt verò P E ad eius duplam E Q, vt R K ad eius duplam K S (cum diameter ſecet eas bifariam, quas perpendiculariter prius ſecabat) ergo, ex æquali ordinata, erit G E ad E Q, vt M K ad K S; ſuntq; anguli verticales G E Q, & M K S æquales, propterea quod continẽtur à rectis lineis quæ bina binis ſunt æquidiſtantes; ergo triangula G E Q, & M K S ſimilia ſunt inter ſe: & propterea angulus E G Q æqualis erit angulo K M S.* e



Et propterea ſegmentum E F Q maius ſimile erit ſegmento K F S minori: quod eſt abſurdum, &c. *Legendum puto. Et propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus inſiſtunt æquales erunt: quod eſt abſurdum. Eſt enim E F Q maior, quàm K F S.* f

Notæ in Propoſit. Præmiſſ. VI.

DEinde ſint duo anguli B, E qualeſcumque; ſed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I vel F E I, & conditiones, vti dixi- a



mus, &c. *Expoſitio, atque demonſtratio huius propoſitionis obſcura eſt propter nimiam eius breuitatem: itaque duo eius caſus diſtingui debent hac ratione. In duobus triangulis A B C, D E F ſupponantur anguli H, & I æquales, pariterque anguli H B A, I E D æquales inter ſe; ideoque duo triangula A B H, & D E I ſimilia erunt, & propterea A H ad H B eandem proportionem habebit, quàm D I ad I E; ſed ex vniuerſali hypotheſi rectangulum C A H ad quadratum H B eandem proportionem habet, quàm rectangulum F I D ad quadratum I E, & componuntur proportiones rectangulorum ad quadrata iam dicta ex rationibus laterum circa angulos æquales H, & I, ſuntque oſtenſæ proportiones A H ad H B, atque D I ad I E eædem inter ſe; igitur reliquæ componentes proportiones, ſcilicet C H ad H B, atque F I ad I E eædem quoque erunt inter ſe, & comprehendunt angulos æquales H, & I; igitur triangula C H B, & F I E ſimilia ſunt inter ſe: & propterea angulus B C A æqualis erit angulo E F D, ſed anguli B A C, & E D F æquales ſunt inter ſe, quia eorum conſequentes æquales erant in triangulis æquiangulis B A H, & E D I, igitur duo triangula B A C, & E D F æquiangula, & ſimilia inter ſe erunt.*

Simili modo ſi ſupponantur anguli C B H, & F E I æquales, cum anguli H, & I æquales ſint, erunt triangula B C H, & E F I ſimilia inter ſe, & vt prius, oſtendentur quoque triangula ablata B A H, E D I æquiangula, & ſimilia inter ſe (propterea quod circa angulos æquales H, & I habent latera proportionalia); & ideo reſidua triangula C A B, & F D E erunt quoque ſimilia, vt propoſitum fuerat.

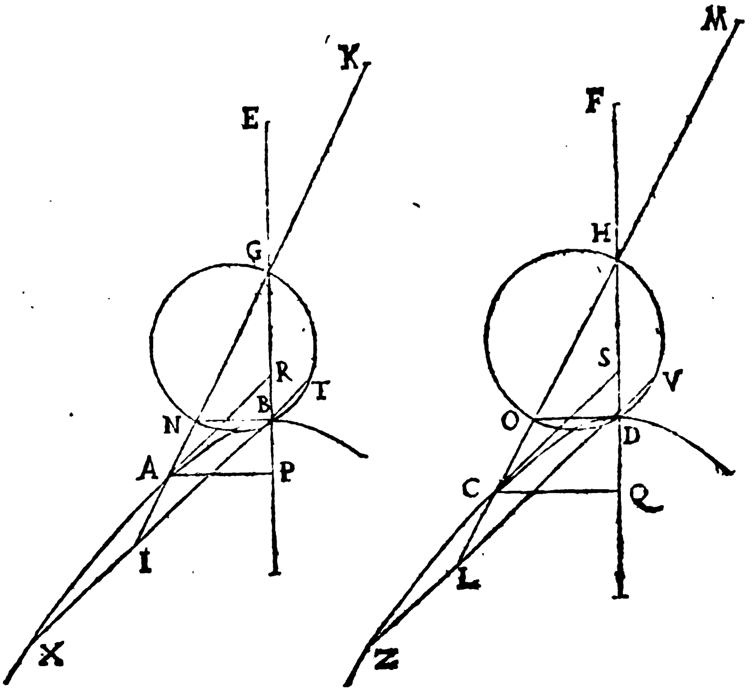
SECTIO SEXTA

Continens Propoſit. XV. XVI. & XVII.

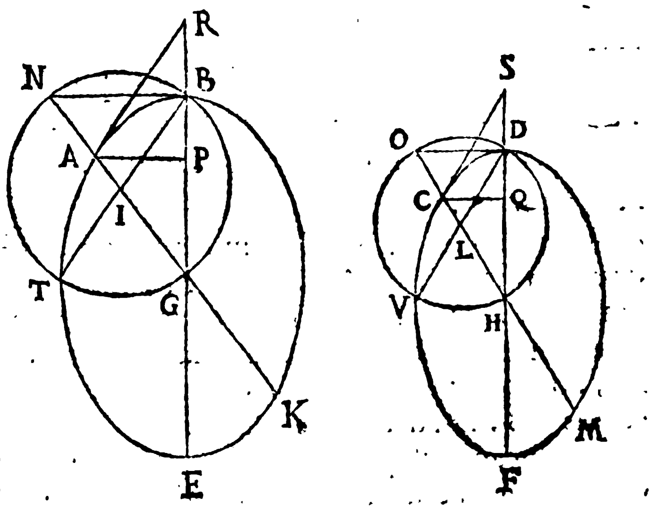
PROPOSITIO XV.

DVarum hyperbolarum, aut ellipſium, ſi figuræ diametrorum, quæ axes non ſint, fuerint ſimiles; atque potentes contineant cum diametris angulos æquales: vtique ſectiones ſunt ſimiles.

Sint ſectiones A B, C D hyperbolicæ, vel ellipticæ earum diametri, quæ non ſint axes I A K, L C M, & earum centra G, H, & duo axes ſint E B, F D: & educamus duas tangentes A R, C S ad duos axes, quæ continebunt cum duabus diametris A K, C M duos angulos æquales, eo quod parallelæ ſunt potentialibus ad diametros eductis; & educamus à B, D ad duabus diametros A K, C M tangentes B N, D O, & circumducamus ſuper triangula B N G, H D O duos circulos, & ex A, C educamus ad axes duas potentiales A P, C Q, & per B, D ducamus I B T, L D V parallelas ipſis A R, C S, quæ ſecent duos circulos in B,
b T, D, V: eritque G I in I N, ſcilicet ei æquale T I in I B ad quadratum



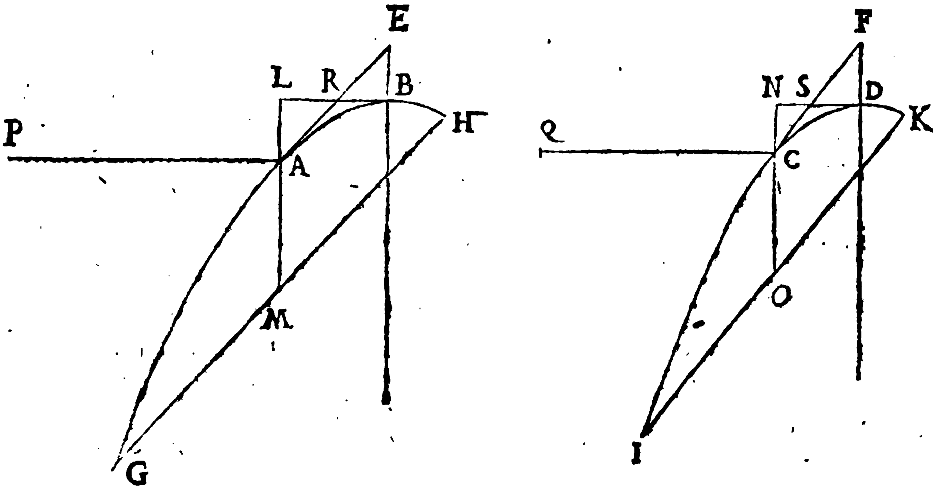
tum potentialis I B, vt H L in L O, ſeu L V in L D ad quadratum L
D, eò quod quælibet ex dictis proportionibus eadem eſt proportioni fi-
37.lib. 1. guræ K A, & M C (39. ex 1.), ergo T I ad I B eſt, vt V L ad L D, &
angulus I, qui æqualis eſt ipſi R A G æqualis eſt angulo L, qui æqualis
Propoſ. 2. præmiſſ. eſt S C H; igitur angulus G æqualis etiam eſt angulo H; & propterea
G A R ſimile eſt H C S, & pariter G A P, H C Q ſunt ſimilia, quia P, Q
ſunt recti, vnde A P R, C Q S ſunt etiã ſimilia, & proportio vniuſcuiuſq;
eorum, nempe G P, P R ad P A, eſt, vt proportio H Q, S Q ad C Q; C
igitur G P in PR ad quadratum P A, nempe B E ad erectum illius (39.
ex 1.) eſt vt H Q in Q S ad quadratum C Q, nempe D F ad erectum
37. lib. 1. illius (39. ex 1.); igitur
figuræ duorum axiũ ſunt
ſimiles, & duæ ſectiones
ſimiles ſunt (12. ex 6. (
ſed oportet in ellipſi, vt
duæ diametri, ideoque
duo axes ſint ſimul aut
tranſuerſi, aut ſimul re-
cti. Et hoc erat propoſi-
tum.



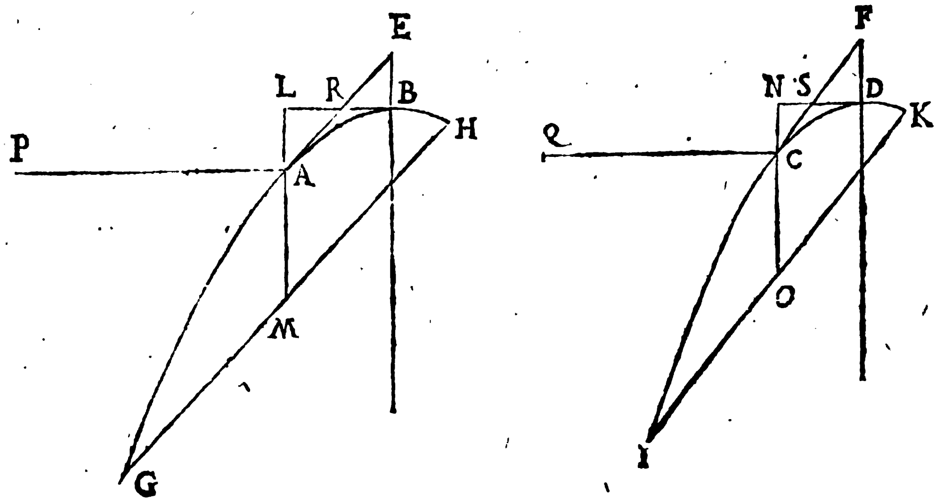
PROPO-

PROPOSITIO XVI.

SI ſectiones A B, C D ſimiles inter ſe, quæ ſint prius parabolæ, tangant lineæ A E, C F terminatæ ad earum axes E B, F D, & contineant cum illis angulos æquales E, F, & in qualibet earum educantur ordinationes G H, I K ad diametros L A M, N C O tranſeuntes per puncta contactus axibus æquidiſtantes, & fuerit proportio ſuarum abſciſſarum A M, C O ad lineas tangentes A E, C F eadem; vtique ordinationes abſcindent ex ſectionibus ſimilia ſegmenta, & ſimiliter poſita, vt G A H, I C K. Si verò ordinationes ſecuerint ſimilia ſegmenta; vtique ſectiones ſimiles erunt, & abſciſſarum ad lineas tangentes proportio erit eadem, atque lineæ tangentes continebunt cum axibus angulos æquales.



Educamus enim duas B L, D N ſuper duos axes B E, F D perpendiculares,
quæ tangent ſectiones in B, D: & ponamus A P ad duplam A 32. lib. 1.
E, vt R A aſſumpta ad A L ei ſimilem, nec non C Q ad duplam C F,
vt aſſumpta S C ad C N; igitur P A, Q C ſunt erecti duarum diametrorum
L M, N O (52. ex 1.) ergo G M poteſt P A in A M, (12. ex 1.) 49 lib. 1.
& ſimiliter I O poteſt O C in C Q, (12. ex 1.) & propter æquidiſtantiam 11.lib. 1.
E B, L A, atque F D, C N ſunt ſimilia E R B, R L A, atque D Ibidem.
S F, S N C; & duo anguli E, F ſuppoſiti ſunt æquales; igitur angulus R
A L æqualis eſt S C N, & N, L ſunt recti; quare R A ad A L, nempe
P A ad duplam A E eſt, vt S C ad N C, nempe vt Q C ad duplam
C F, & M A ad A E ſuppoſita eſt, vt O C ad C F: ergo M A ad A P
a eſt, vt O C ad C Q, & angulus O æqualis eſt M. Oſtendetur igitur (vt



diximus in 11. ex 6.) quod ſi ad abſciſſas A M, C O egrediantur quælibet potentes, ad ſua abſciſſa eandẽ proportionẽ habebunt ſi abſciſſæ ad abſciſſas ſint in eadem proportione, & quod anguli à potentialibus, & abſciſſis contenti, erunt æquales in duabus ſectionibus: quare erit ſegmentum H A G ſimile ſegmento I C K atque ſimiliter poſitum. Defin. 7. huius.

Deinde ijſdem ſignis in eiſdem figuris manẽtibus, vt prius deſignatis ſupponatur, ſegmentum H A G ſimile ipſi K C I. Dico, quod angulus E æqualis erit F, & M A ad A E erit, vt O C ad C F.

Quoniam duo ſegmenta ſunt ſimilia erit angulus O æqualis M, & duo anguli E A L, F C N illis æquales, ſunt quoque inter ſe æquales; ergo duo anguli F, E, qui illis æquales ſunt, erunt inter ſe æquales, eoquod A E, C F parallelæ ſunt G H, I K, & anguli N, L ſunt recti; ergo duo triangula proportionis ſunt ſimilia, ideoque R A ad A L, nempe P A ad duplam A E eſt, vt C S ad C N, nempe Q C ad duplam C F: & quia G M poteſt P A in A M (12. ex 1.) & ſimiliter I O poteſt Q C in C O; ergo P A ad G M eſt, vt Q C ad O I, & G M ad M A eſt, vt I O ad O C; quia duo ſegmenta ſunt ſimilia, & E A ad A M eſt, vt C F ad C O: & iam oſtenſum eſt, quod duo anguli E, F ſunt æquales. Et hoc erat oſtendendum.

Defin. 7.

49. lib. 1.

11. lib. 1.

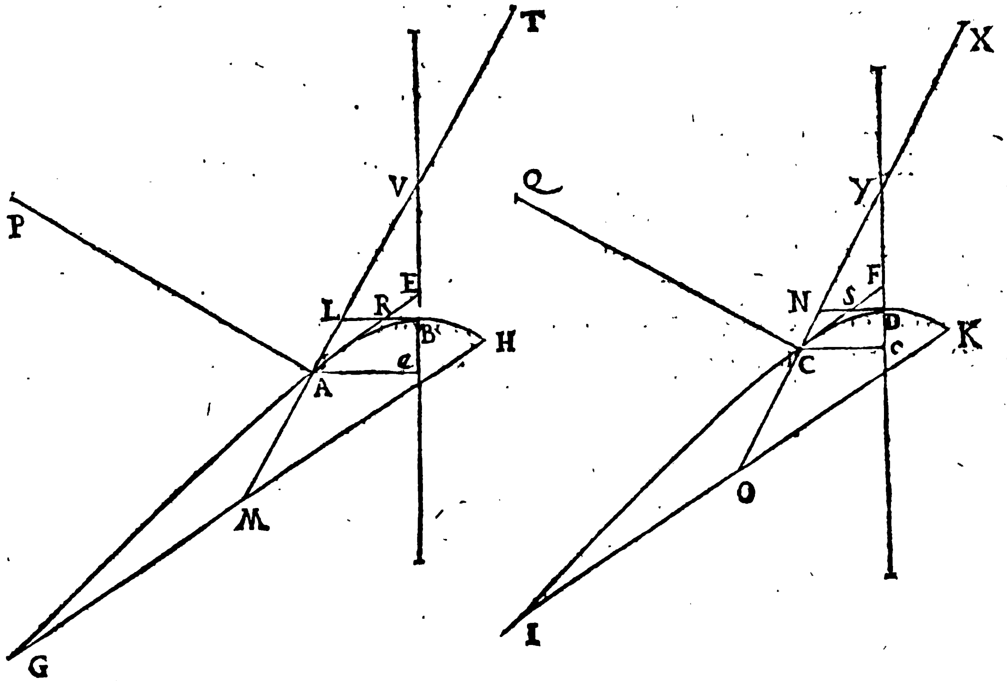
b

PROPOSITIO XVII.

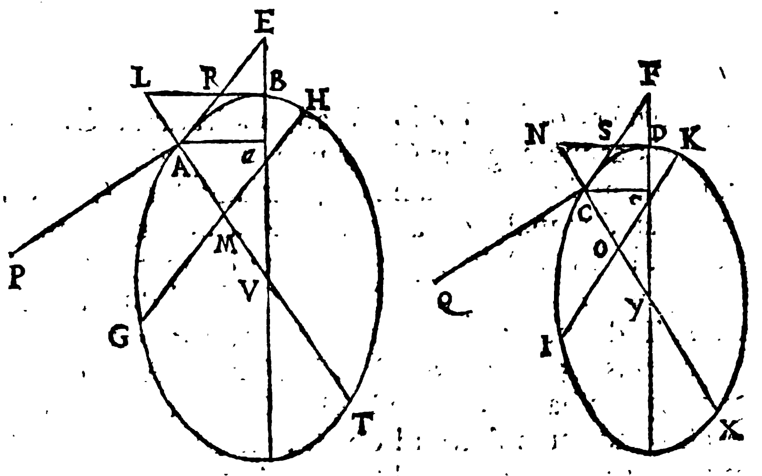
DEinde ſectiones ſint hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua ſupponantur, vt prius. a

Educamus C *c* perpendicularẽ ſuper axim D F, & A *a* perpendicularem ſuper axim B E; atque V, Y ſint duo centra. Ergo (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) erit V *a* in *a* E ad quadratum A *a* potentis,

vt Y *c*



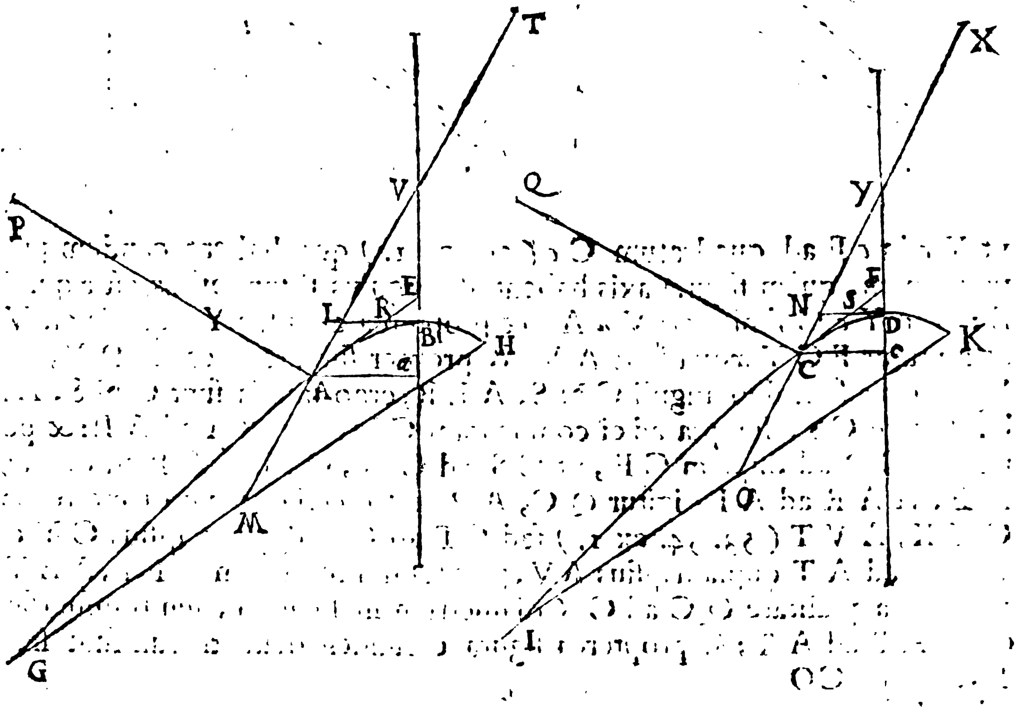
vt Y *c* in *c* F ad quadratum C *c* (39. ex 1.) quæ habent eandem proportionem, 37.lib. 1.
quàm figuræ axis habent, & angulus F ſuppoſitus eſt æqualis 12. huius.
b E : ergò Y *c* C ſimile eſt V *a* A : & propterea angulus Y æqualis eſt V, 6. præmiſ. huius.
& angulus F C Y æqualis E A V : & propter ſimilitudinem N D Y, L B
V æquales ſunt duo anguli C N S, A L R; ergo ſimilia ſunt C N S, A L
R. Quare C S aſſumpta ad ei coniugatam C N eſt vt R A ad A L: & ponamus
C Q ad duplam C F, vt C S ad C N, nec non A P ad duplam
A E, vt A R ad A L; igitur Q C, A P ſunt erecti duarum diametrorum
C Y X, A V T (53. 54. ex 1.) ſed C F ad C X duplam ipſius C Y eſt 50.lib. 1.
vt A E ad A T duplam ipſius A V, propter ſimilitudinem C F Y, A E V:
ergo ex æqualitate Q C ad C X diametrum inclinatam, ſeu tranſuerſam
c eſt vt A P ad A T; & propterea figuræ earundem diametrorum ſunt similes,
& quia C O ad C F ſuppoſita eſt, vt A M ad A E: ergo ex æqualitate Q C ad C O eſt, vt P A ad A M: Quare potentes ad duo eius abſciſſa C O, A M, à quibus diuidũtur biſariam, eãdem proportionem habent: & proportio abſciſ



ſarum in vna ſectionum ad homologa abſciſſa alterius eſt eadem (12. ex 6.), & anguli compræhenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; quia æquales ſunt duobus angulis R A L, S C N æqualibus, & propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia. Defin. 7. huius.

Poſtea oſtendetur, quod ſi duo ſegmenta fuerint ſimilia, erit angulus F æqualis E, & A M ad A E, vt O C ad C F.

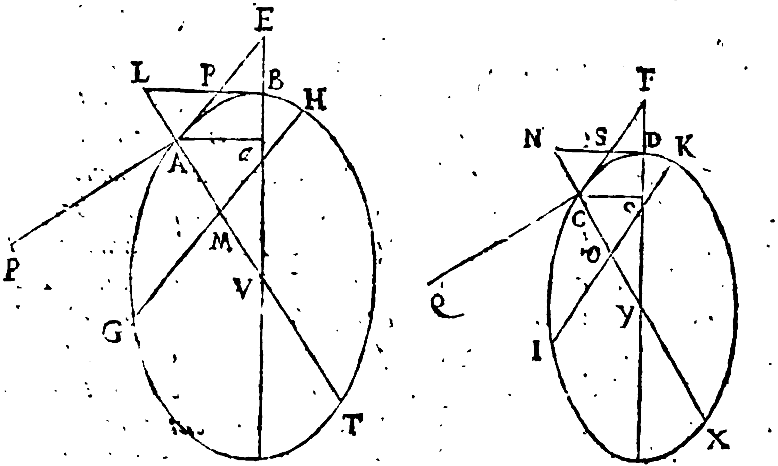
Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales, & erit proportio potentium ad abſciſſas eadem, & proportio abſciſſarum, in vna earum ad ſua homologa in altera, erit eadem. Et quia V *a* in *a* E ad quadratũ *a* A eandem propor- Defin. 7. huius. d



tionem habet, quàm Y *e* in *e* F ad quadratum *e* C, & duo anguli *a*, & *e* ſunt recti; atque angulus C, nempe O æqualis eſt A, nempe M, propter ſimilitudinem ſegmentorum: ergo triangulum A E V ſimile eſt C F Y, & angulus V æqualis eſt angulo Y; pariterque angulus E æqualis eſt F, & A V ad A E eandem proportionem habet, quàm Y C ad C F. Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F; ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius eſt, vt C X diameter ad C Q erectum eius (53. 54. ex 1.) & T M in M A ad quadratum M G eãdẽ proportionem habet, quàm X O in O C ad quadratum O I; at ſuppoſitum eſt quadratum A M ad quadratum M G, vt quadratum C O ad quadratum O I; ergo ex æqualitate T M in M A ad quadratũm A M, nempe T M ad M A, eandem proportionem habet, quàm X O in O C ad 21. lib. 1.

qua-

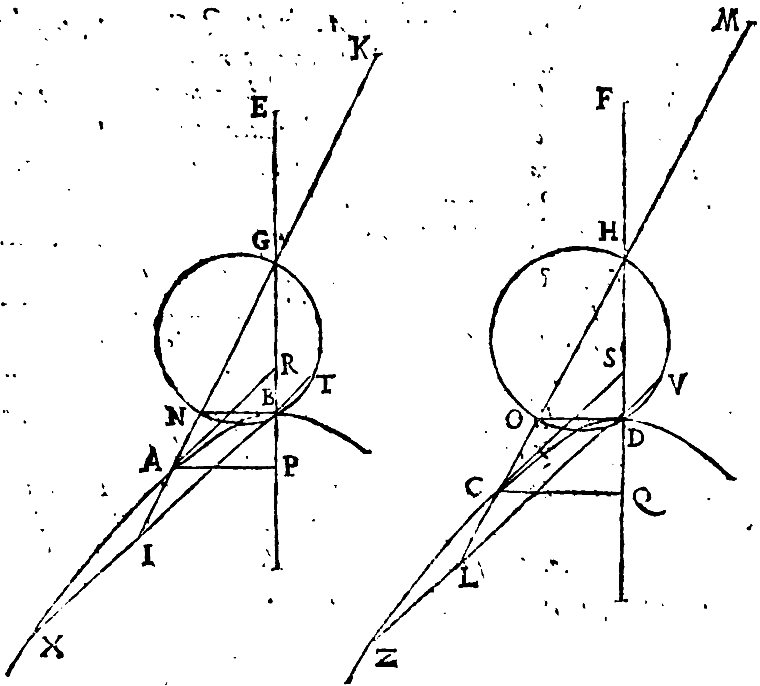
quadratũ O C, nempe X O ad O C; quare diuidendo, vel cõponendo, & ex æqualitate A M ad A E eſt vt C O ad C F: & iã oſtenſũ eſt, quod duo anguli F, & E ſunt æquales. Quare patet propoſitum.



Notæ in Propoſit. XV.

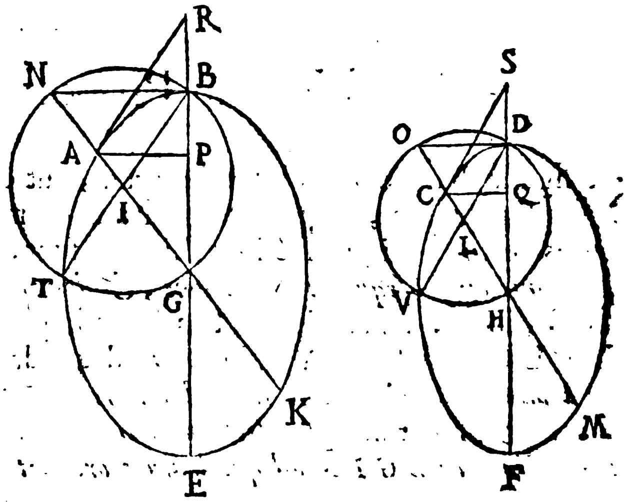
a SI figuræ diametrorum hyperbolarum, aut ellipſium fuerint ſimiles diſſimilium axium, & potentes illarum diametrorum contineant ſimul angulos rectos, vtique ſectiones ſimiles ſunt, &c. *Textus mendoſus huius propoſitionis ex ſubſequenti expoſitione, & demonſtratione corrigi debuit.*

b Et G I in I N æquale ipſi T I in I B ad quadratum I B potentis eſt, vt H L in L O æquale ipſi V L in L D ad quadratum L D; quia, &c. *Quoniam à puncto B ſectionis A B ad diametrum K A I ducuntur ordinatim applicatæ B I, & B N contingens ſectionem in B ſecantes diametrum in I, & N; igitur rectangulum G I N ad quadratum ordinatim applicatæ I B eandem pro-* 37. lib. 1.



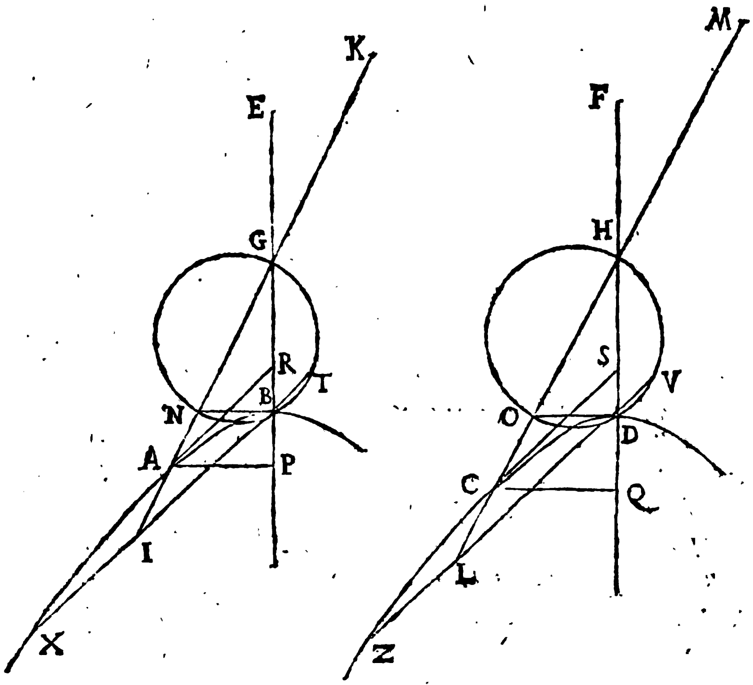
por-

portionem habebit, quàm latus tranſuerſum K A ad eius latus rectum: eadem ratione in ſectione C D erit rectangulum H L O ad quadratum ordinatim applicatæ D L, vt latus tranſuerſum M C ad eius latus rectum; propterea quod à puncto D ducitur D O ſectionem contingens, & D L ordinatim applicata ad diametrum M C, ei occurrentes in L, & O. Et quoniam ex hypotheſi latus tranſuerſum K A ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum M C ad eius latus rectum, cum figuræ harum diametrorum ſuppoſitæ ſint ſimiles; ergo rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D: deinde quia in duobus triangulis G B N, & H O D ſunt duo anguli G B N, & H D O æquales,
Conuerſ. 32. lib. 1. *nẽpe recti (cum B N, & D O ſectiones contingentes in terminis axium E B, & F D efficiant cum ipſis angulos rectos) atq; à verticalibus angulis B, & D ducuntur ad baſes rectæ lineæ B I, D L efficientes angulos I, & L æquales, eo quod æquales ſunt angulis æqualibus R A G, & S C H propter æquidiſtantiam linearum B I, A R, atque linearum D L, S C, & inſuper rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D;*
Propoſ. 2. pręmiſſ. *igitur triangula G B N, & H D O ſimilia ſunt inter ſe; & propterea angulus G æqualis erit angulo H.*



Et proportio vniuſcuiuſque eorum, nempe G P, P R ad P A eſt, vt proportio H Q, Q S ad C O; &c. *In triangulis enim ſimilibus G P A, & H Q C circa angulos rectos P, & Q erit G P ad P A, vt H Q ad Q C: pariter in duobus triangulis ſimilibus R P A, & S Q C habebit R P ad P A eandem porportionem quàm, S Q ad Q C; proportio verò rectanguli G P R ad quadratum P A componitur ex ijſdem rationibus laterum circa angulum rectum P: pariterque proportio rectanguli H Q S ad quadratum Q C ex rationibus laterum circa angulum rectum Q componitur, ſuntque oſtenſæ prædictæ componentes proportiones eædem inter ſe; igitur rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H Q S ad quadratum Q C; ſed habet rectangulum G*
37. lib. 1. *P R ad quadratum P A eandem proportionem, quàm axis tranſuerſus E B ad eius latus rectum (propterea quod ab eodem puncto A ſectionis ducitur contin-*
Ibidem. *gens A R, & ordinatim applicata ad axim A P) atque eodem modo rectangulum H Q S ad quadratum Q C eandem proportionem habet, quàm axis tranſuerſus F D ad eius latus rectum; igitur axis tranſuerſus E B ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum F D ad eius latus rectum; & propterea figuræ axium duarum ſectionum A B, & C D ſimiles in-*
12. huius. *ter ſe erunt; & ideo conicæ ſectiones ſimiles erunt.*

Sed



Sed oportet in ellipſi, vt duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut recti ſimul, &c. *Addidi verba, quæ videntur in textu deficere. Sed oportet in ellipſi, vt duæ diametri, ideòque duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut ſimul recti. Licet enim multoties diametri coniugatæ ellipſium æquales eſſe poſſint, nihilominus eæ ſumi debent, quæ ad eaſdem partes reſpiciunt axes tranſuerſos, alias conſtructio, atque demonſtratio non ſequeretur, vt manifeſtum eſt.*

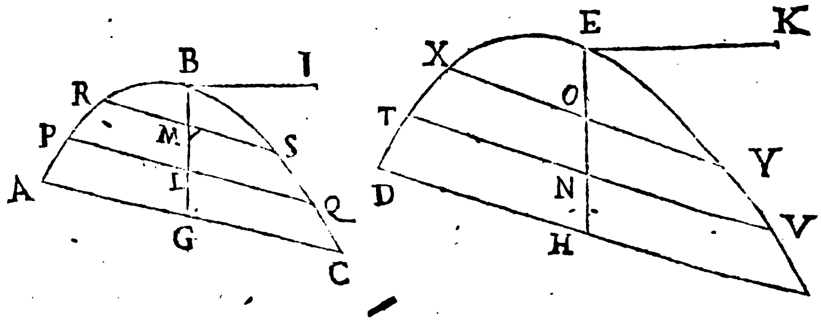
MONITVM.

PRo intelligentia propoſ. 16. & 17. præmitti debent tria hæc lemmata.

LEMMA VI.

SI in duobus parabolicis ſegmentis A B C, & D E F baſes A C, & D F cum diametris G B, & H E æquales angulos G, & H non rectos contineant, atque efficiant abſciſſas G B, & H E diametrorum ad latera recta B I, & E K proportionalia; erunt ſegmenta ſimilia inter ſe.

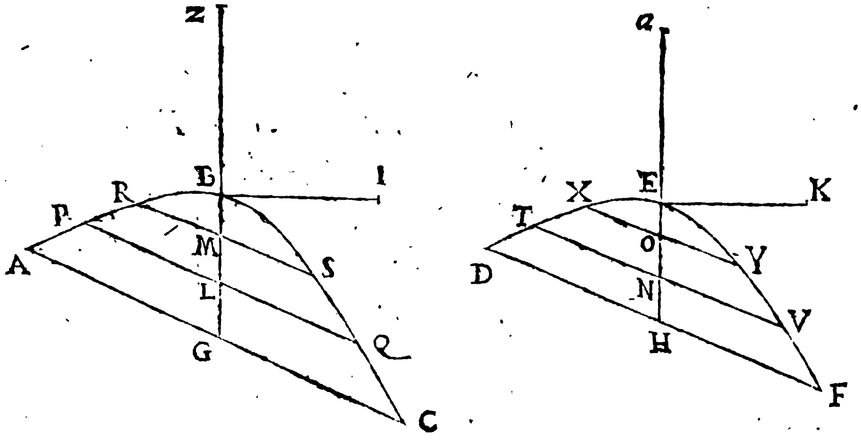
Secentur



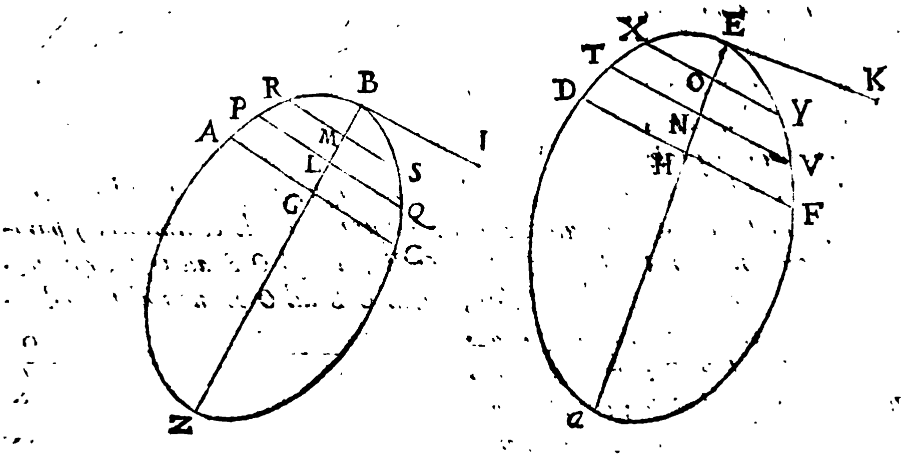
Secentur diametrorum abſciſſa G B, & H E in ijſdem rationibus in L, M, N, O, & ab ijſdem punctis educantur baſibus aquiſtantes, ſeu ad diametros ordinatim applicata P Q, R S, T V, X Y. Quoniam ex hypotheſi G B ad B I 11.lib. 1. *eſt, vt H E ad E K; eſtque A G media proportionalis inter G B, & B I; paríterque D H media proportionalis eſt inter H E, & E K; igitur A G ad G B eſt, vt D H ad H E; Et quoniam inuertendo L B ad B G eſt, vt N E ad E H, atque B G ad B I poſita fuit, vt H E ad E K; ergo ex aquali ordinata L B ad B I erit, vt N E ad E K, quare vt L B ad P L, mediā proportionalē inter L B, & I B, ita erit N E ad N T mediam proportionalem inter N E, & E K. Eodem modo oſtendetur, quod R M ad M B eandem proportionem habet, quàm X O ad O E: & hoc ſemper continget in quibuslibet alijs diuiſionibus proportionalibus abſciſſarum, ſuntque anguli G, & H aquales; igitur ſegmenta A B C, &* Defin.7. huius. *D E F ſimilia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.*

LEMMA VII.

SI in duobus ſegmentis A B C, & D E F hyperbolicis, aut ellipticis, baſes A C, & D F cum diametris G B, & H E, aquales angulos G, & H obliquos continentes, efficiant abſciſſas G B, & H E proportionales lateribus rectis B I, & E K, atque tranſuerſis B Z, & E a, erunt ſegmenta ſimilia inter ſe.



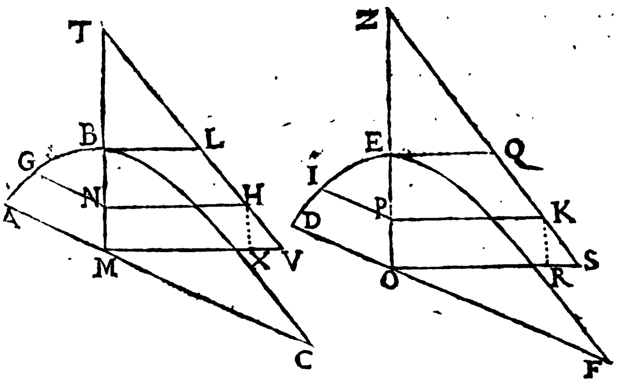
Secentur abſciſſæ G B, & H E in ijſdem rationibus, ducanturque ordinatim applicatæ vt in precedenti factum eſt. Quoniam G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & inuertendo Z B ad B G eſt, vt a E ad E H, ergo ex æquali ordinata Z B latus tranſuerſum ad B I latus rectum erit, vt a E latus tranſuerſum alterius ſectionis ad E K eius latus rectum: eſt verò rectangulum Z G B ad quadratum ordinatim applicatæ G A, vt latus tranſuerſum Z B ad rectum B I; pariterque rectangulum a H E ad quadratum ordinatim applicatæ D H, vt tranſuerſum a E ad latus rectum E K, ſuntque prædicta latera figuratum oſtēſa proportionalia; igitur rectangulum Z G B ad quadratum A G eandem proportionem habet, quàm rectangulum a H E ad quadratum D H; ſed quadratum B G ad rectangulum Z G B eandem proportionem habet, quàm G B ad G Z (propterea quod G B eſt illorum altitudo communis) pariterque quadratum E H ad rectangulum a H E eſt, vt H E ad H a, ſeu vt G B ad G Z; igitur quadratum G B ad rectangulum Z G B eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad rectangulum a H E; quare ex æquali quadratum G B ad quadratum G A eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratū H D; ideoque innertendo A G ad G B erit vt D H ad H E. Rurſus, quia inuertendo L B ad B G eſt vt N E ad E H; ſed G B, atque H E ad latera trāſuerſa proportionalia ſunt; igitur L B ad B Z erit vt N E ad E a; & propterea, vt prius quadratum L B ad rectangulum Z L B erit, vt quadratum E N ad rectangulum a N E; eſtque rectangulum Z L B ad quadratum ordinatim applicatæ P L, vt rectangulum a N E ad quadratum T N, (ſcilicet vt latera tranſuerſa ad recta, quæ proportionalia oſtenſa ſunt); igitur ex æquali ordinata quadratū B L ad quadratum P L eandem proportionē habebit, quàm quadratū E N ad quadratum T N; quare vt prius dictum eſt, P L ad L B eandem proportionem habebit, quàm T N ad N E; & hoc ſemper contingit in reliquis omnibus diuiſionibus abſciſſarum in eiſdem rationibus ſectis; ſuntque anguli G, & H æquales inter ſe, licet non recti; igitur (ex definitione 7.) ſegmenta A B C, & D E F ſimilia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

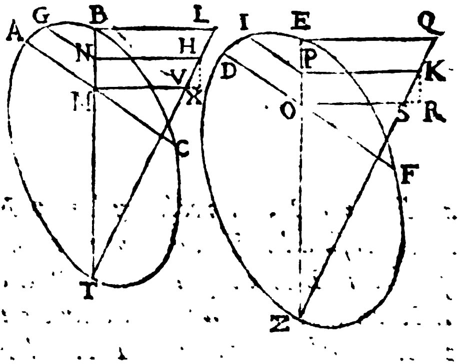


LEMMA VIII.

SI duo hyperbolica, aut elliptica ſegmenta A B C, D E F fuerint ſimilia, quorum baſes A C, D F efficiant cum diametrorum abſciſsis B M, E O angulos æquales M, & O; ſintque eorum tranſuerſa latera T B, Z E, recta vero B L, E Q. Dico figuras eorum; ſiue rectangula T B L, & Z E Q ſimilia eſſe.

Secentur ſegmentorum abſciſſa M B, O E proportionaliter in N, P, & per
ea puncta ducantur ordinatim ad diametros applicatæ G N, I P æquidiſtantes
baſibus, efficientes abſciſſas B N, E P, coniunganturq; duæ rectæ lineæ T L, Z
Q ſecantes rectas lineas N H, M V, P K, O S æquidiſtantes lateribus rectis B
L; E Q in punctis H, V,
K, S, atque à punctis H, &
K ducantur rectæ lineæ H X,
K R parallelæ diametris occur-
rentes ipſis M V, O S in X,
Defin. 7. huius. *& R. Quoniam ſegmenta ſup-*
ponuntur ſimilia erit A M ad
M B, vt D O ad O E, & G
N ad N B erit vt I P ad P
E, atque quadratum A M, ſeu
12. 13. lib. 1. *ei æquale rectangulum B M V,*
ad quadratum M B eandem
proportionem habebit, quàm
Ibidem. *quadratum D O, ſeu ei æquale*
rectangulum E O S ad quadratum O E; ſed vt rectangulum B M V ad quadra-
tum M B ita eſt M V ad M B (cum M B ſit eorum altitudo communis) pari-
terque vt rectangulum E O S ad quadratnm O E, ita eſt O S ad O E; quare
M V ad M B eandem proportionem habebit, quàm O S ad O E; non aliter oſten-
detur N H ad N B eandem proportionem
habere, quàm P K ad P E: erat autem
Lem. 1. lib. 5. *M B ad B N vt O E ad E P; ergo compa-*
rando antecedentes, & poſtea conſequentes
ad differentias terminorum erit B M ad M
N vt E O ad O P; atque B N ad N M eã-
dem proportionem habebit, quàm E P ad P
O. Quare ex æquali V M ad M N erit vt
S O ad O P, atque H N ad N M erit vt K
P ad P O; & differentia ipſarum V M &
H N ideſt X V ad M N, ſeu ad X H ean-
dem proportionem habebit, quàm differentia ipſarum S O, & K P, ideſt S R
ad O P, ſeu ad R K; quapropter V X ad X H erit vt S R ad R K; ſed quia
X V, L B inter ſe, nec non X H, & B T ſunt parallelæ, atq; etiam S R, Q E
inter ſe, nec nõ R K, & E Z ſunt æquidiſtantes; erunt triangula V X H, & L B
T ſimi-

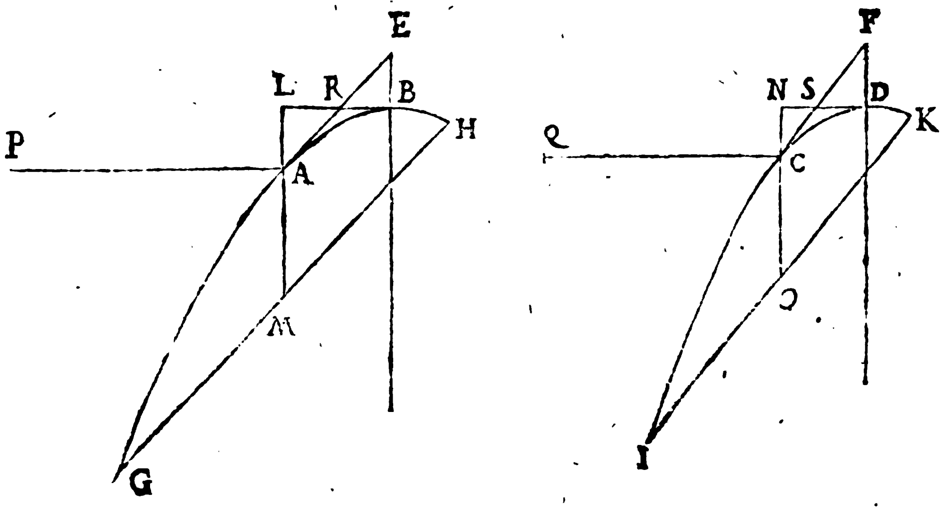




T ſimilia, pariterque triangula S R K, & Q E Z inter ſe ſimilia; ideoque erit L B ad B T vt V X ad X H, pariterque Q E ad E Z erit vt S R ad R K; erat autem prius V X ad X H, vt S R ad R K; igitur L B ad B T eandem proportionem habebit, quàm Q E ad E Z; & propterea circa rectos angulos B, E, figuræ ſectionum ſimiles erunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. XVI.

a ERgo M A ad A P eſt vt O C ad C Q, & angulus O æqualis eſt M, oſtendetur (vt diximus in 11. ex 6.) quod, &c. *Sequitur enim ex æqualitate ordinata, quod M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q, cumque ſint duo ſegmenta parabolica H A G, & K C I, quorũ diametri A M, & C O efficiunt cum baſibus G H, & K I angulos M, & O æquales inter ſe (cum ſint æquales angulis R A L, & S C N æqualibus à contingentibus verticalibus parallelis baſibus, & à diametris contentis) atque abſciſſa M A ad latus rectum A P eandem proportionem habet, quàm altera abſciſſa O C ad C Q latus rectum alterius ſectionis; igitur duo ſegmenta H A G, & K C I ſimilia ſunt inter ſe.* Lem. 6. huius.

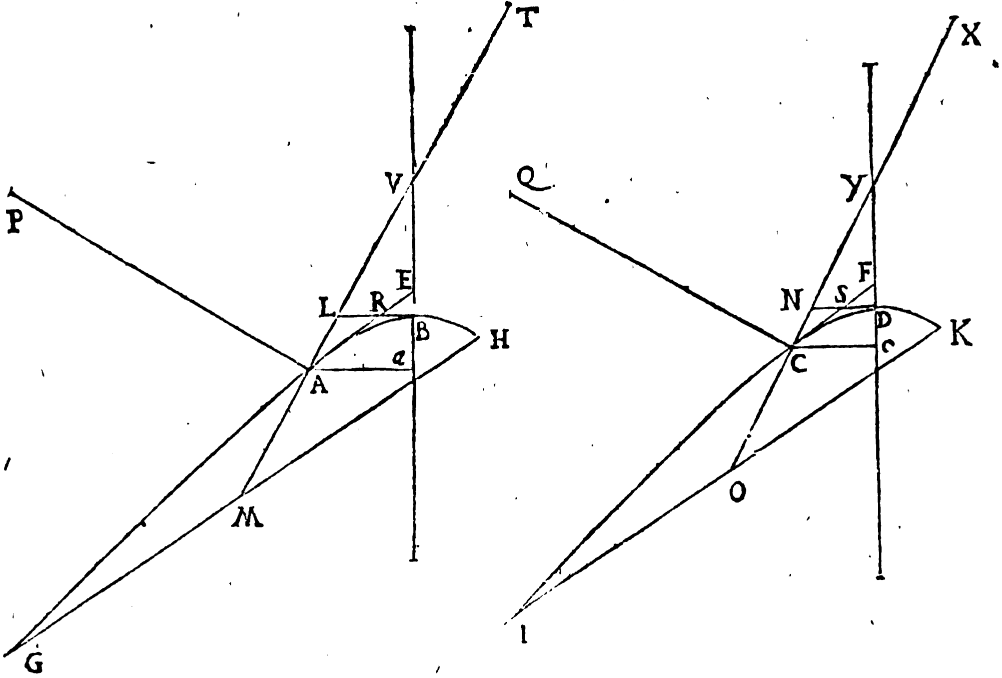


b Et quia G M poteſt A P in A M, & ſimiliter I O poteſt C Q in C O; ergo P A ad G M eſt, vt C Q ad I O, & G M ad M A eſt, vt I O ad O C; quia duo ſegmenta ſunt ſimilia, & E A ad A M, eſt vt F C ad C O; &c. *Senſus huius textus confuſi, talis eſt. Quia ſegmenta H A G, & K C I ſimilia ſupponuntur erit A M ad M G, vt C O ad O I, & quadratum A M ad quadratum M G erit vt quadratum C O ad quadratum O I; eſt verò rectangulum P A M æquale quadrato G M; pariterque rectangulum Q C O eſt æquale quadrato I O; igitur quadratum A M ad rectangulum P A M eandem proportionem habet, quàm quadratum C O ad rectangulum Q C O; & propterea M A ad A P eandem proportionem habebit, quàm C O ad C Q; ſed prius oſtenſa fuit P A ad A E, vt Q C ad C F; igitur ex æquali ordinata erit M A* Defin. 7. huius. 11. lib. 1.

ad A E, vt O C ad C F, ſuntque anguli E, & F æquales, vt dictum eſt. Et hoc erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVII.

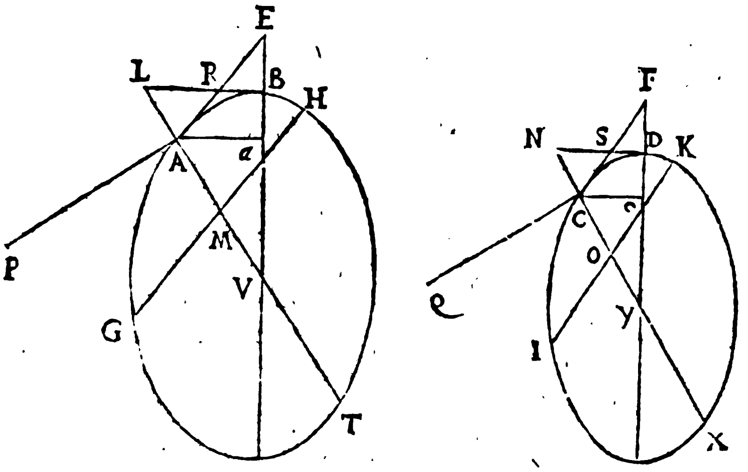
DEinde ſint ſectiones hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua in ſuo ſtatu, &c. *Ideſt. Supponantur ſectiones hyperbolicæ, vel ellipticæ A B, & C D ſimiles inter ſe, ſcilicet figuræ axium V B, & Y D ſint ſimiles inter ſe, atque à verticibus A, & C duarum diametrorum A M, & C O ductæ ſint re-* a



ctæ lineæ contingentes A E, & C F, efficientes cum axibus angulos A E B, & C F D æquales, ſintque H G, & K I ordinatim ad diametros applicatæ, ſcilicet æquidiſtantes contingentibus verticalibus; & habeat abſciſſa M A ad portionem contingentis A E eandem proportionem, quàm abſciſſa O C habet ad portionem contingentis C F; Dico ſegmenta H A G, & K C I ſimlia eſſe inter ſe.

Ergo Y *c* C ſimile eſt V *a* A, &c. *Quoniam duæ ordinatim ad axes ap-* b *plicatæ A* a, *& C* c *perpendiculares ſunt ad axes, erunt in triangulis A* a *E, & C* c *F duo anguli* a, *&* c *recti: atque ex hypotheſi duo reliqui anguli E, & F æquales quoque ſunt; igitur tertius angulus* a *A E æqualis eſt tertio angulo* c *C F, cumque in duobus triangulis V A E, atque Y C F ab eorum verticibus A, & C ducuntur ad baſes V E, & Y F duæ rectæ lineæ A* a, *& C* c *continentes cum baſibus angulos æquales, nempe rectos, & rectangulum V* a *E ad quadratum* a *A eandem proportionem habet, quàm rectangulum Y* c *F ad quadratum* c *C, vt in textu oſtenſum eſt: atq; duo anguli* a *A E, &* c *C F æquales oſtenſi ſunt inter ſe; igitur erunt triangula V A E, & Y C F ſimilia inter ſe; ergo angulus V æqualis eſt angulo Y, atque angulus E A V æqualis erit angulo F C Y:*

ex 37. lib. 1. Propoſ. 6. præmiſſ.



Conuerſ. 32. lib. 1.

Y: poſtea, quia B L, & D N contingunt ſectiones in verticibus axium efficient angulos V B L, & Y D N rectos, cũque duo anguli V, & Y oſtenſi ſint æquales, in triangulis V B L, Y D N, anguli V L B, & Y N D æquales erunt inter ſe, & qui deinceps A L R, & C N S ſunt æquales inter ſe; & ideo triangula A R L, & C S N ſimilia ſunt inter ſe.

C Et propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, &c. *Quia ex hypotheſi M A ad A E erat, vt O C ad C F; atque (propter ſimilitudinem triangulorum A E V, & C F Y) vt E A ad duplam ipſius A V, ſeu ad latus tranſuerſum A T, ita eſt F C ad duplam ipſius C Y, ſeu ad latus tranſuerſum C X alterius ſectionis; ergo ex æquali ordinata erit M A ad A T, vt O C ad C X; oſtenſum autem fuit latus tranſuerſum T A ad A P latus rectum eius habere eandem proportionem, quàm alterius ſectionis latus tranſuerſum X C ad eius latus rectum C Q: ergo ex æquali ordinata M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q; quare duæ abſciſſæ A M, & O C eandem proportionem habent ad latera recta, atque ad tranſuerſa earundem diametrorum, atque efficiunt baſes H G, & K I cum diametris angulos M, & O æquales inter ſe: propterea quod æquales ſunt angulis E A V, & F C Y æqualibus (propter æquidiſtantiam rectarum H G, & A E; nec non K I, & C F) igitur erunt duo ſegmenta H A G, & K C I ſimilia inter ſe.*

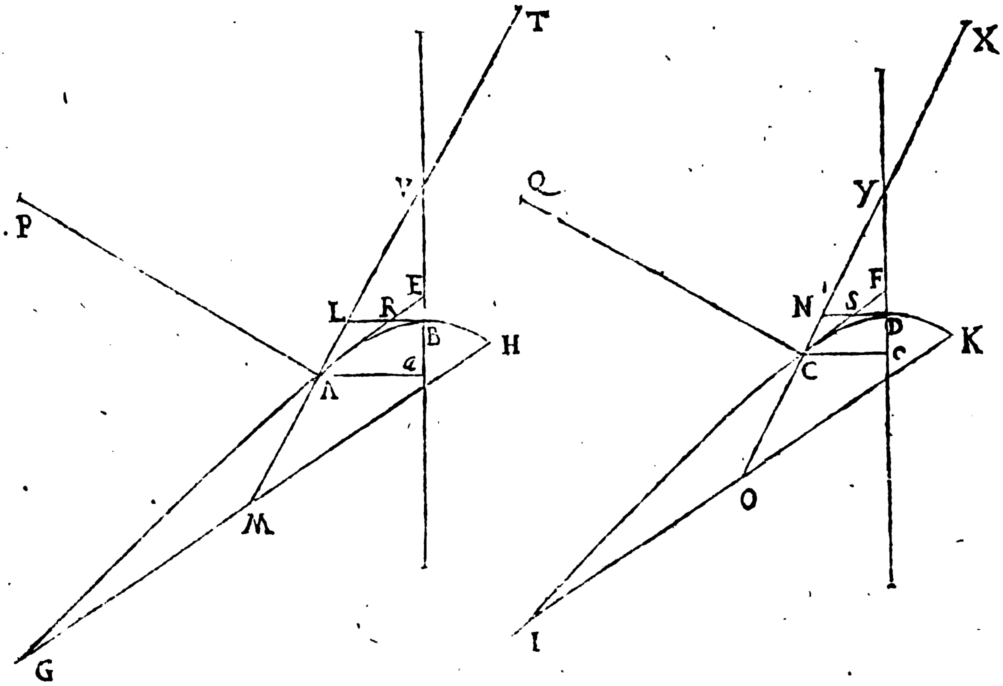
Defin. 7. huius.

d Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales: & erit proportio potẽtium ad abſciſſa eadem, & proportio abſciſſarum in vna earum ad alia ſimilia eadẽ, quia V *a* in *a* E ad quadratum A *a*, eſt vt Y *c* in *c* F ad quadratum C *c*, & duo anguli *a*, & *c* ſunt æquales; ergo angulus Y æqualis eſt angulo V, & angulus C, nempe O æqualis A, nempe M propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum; igitur A E V ſimile eſt Y F C, & angulus E; &c. *In hoc textu nonnulla verba deficiunt, aliqua verò tranſpoſita ſunt, vt nullus ſenſus colligi poſſit: tamen eum reſtitui poſſe cenſeo vt ibidem videre eſt. Quoniam duo ſegmenta H A G, & K C I ſupponuntur ſimilia efficient diametri A M, & C O cum baſibus G H, & K I angulos M, & O æquales, licet non rectos; eruntque figuræ earumdem diametrorum ſimiles inter ſe: & propterea habebit T A ad eius erectum eandem proportionem, quàm X C ad eius latus rectum; igitur ſectiones A B, & C D ſimiles ſunt, ideſt ductis axibus V B, & Y D erunt figuræ axium ſimiles inter ſe: ducuntur verò à punctis A, & C ad axes ordinatim applicati A a, & C c, atque contingentes A E, & C F; igitur rectangu-*

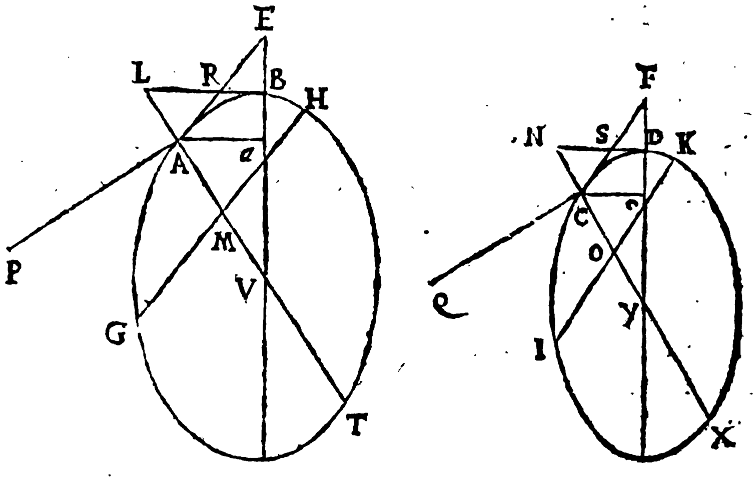
Lem. 8. huius.
15. huius.
47. lib. 2.
12. huius.
37. lib. 1.

ctangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habebit, quàm axis tranſuerſus ad eius erectum, ſeu quàm axis tranſuerſus alterius ſectionis C D ad eius erectum; ſed in eadem proportione eſt rectangulum Y c F ad quadratũ 37. lib. 1. *c C; igitur in duobus triangulis A V E, & C Y F rectæ A a, & C c cũ baſibus angulos æquales a, & c, nempe rectos efficiunt, cum ordinatim applicatæ ſint ad axes; atque duo anguli verticales V A E, & Y C F æquales ſint inter ſe, cum propter parallelas æquales ſint angulis O, & M æqualibus in ſegmentis ſimilibus;* Propoſ. 7. præmiſſ. *igitur duo triangula A E V, & C F Y æquiangula, & ſimilia ſunt inter ſe: & propterea V A ad A E erit, vt Y C ad C F, &c.*

Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F: ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius, &c. *In hoc textu nonnulla videntur deficere, eiuſq; ſenſus talis erit. Quia veluti ſupra dictum eſt, triãgula R A L, & S C N ſimilia ſunt inter ſe, habebit R A ad A L eandem proportionem, quàm S C ad C N: Ponamus iam P A ad duplam A E, vt R A ad A L, & Q C ad duplam C F, vt S C ad C N, erunt A P, & C Q latera recta diametrorum A M, & O C;* 50 lib. 1. *ſed earundem diametrorum figuræ oſtenſæ ſunt ſimiles;* Lem. 8. *igitur latus tranſuerſum A T ad A P erectum eius eſt, vt latus tranſuerſum X C ad C Q erectum eius. Et quia vt latus tranſuerſum ad rectum*



21. lib. 1. *ita eſt rectangulum T M A ad quadratum M G, & ſimiliter rectangulum X O C ad quadratum O I eandem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum, ſcilicet eandem, quàm habent latera figurarũ earundẽ diametrorũ; igitur rectangulum T M A ad quadratum M G eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum X O C ad quadratum O I; habet verò M G ad M A eandem proportionem, quàm I O ad O C propter ſimilitudinem ſegmentorum; ergo quadratum G M ad quadratum M A erit vt quadratum I O ad quadratum O C: & propterea ex æquali ordinata rectangulum T M A ad quadratum M A, ſeu T M ad A M*

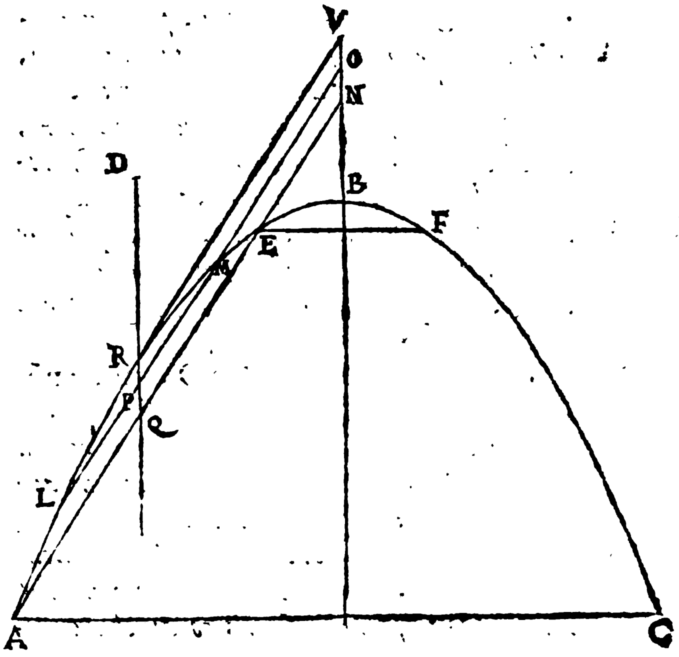


ad A M eandem proportionem habebit, quàm X O C ad quadratum O C, ſeu eandẽ, quàm habet X O ad C O, & comparando conſequẽtes ad differẽtias terminorum M A ad A T eandem proportionem habebit, quàm O C ad C X: erat autẽ prius T A ad A E, vt X C ad C F; igitur ex æquali M A ad A E erit, vt O C ad C F, & fuerunt oſtenſi anguli E, & F æquales. Quod erat oſtendendum.

SECTIO SEPTIMA

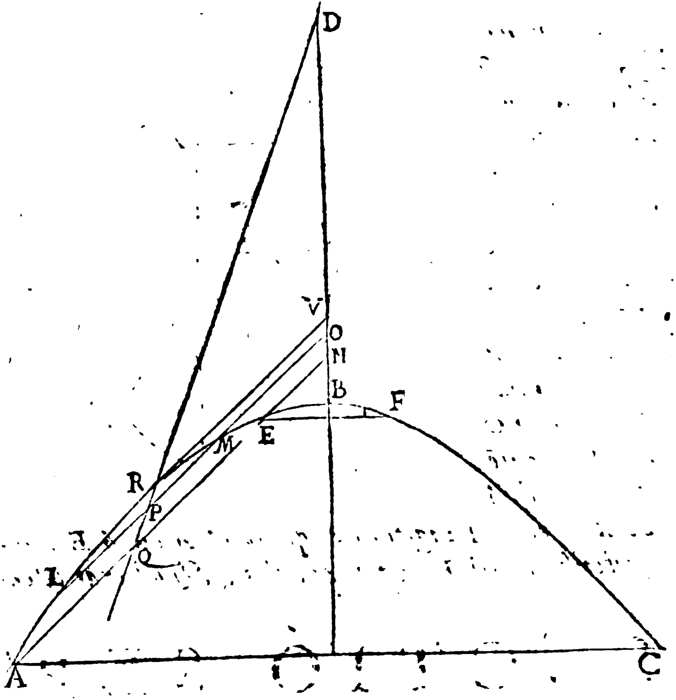
Continens Propoſit. XVIII. & XIX.

CViuslibet ſectionis A B C duo ſegmenta C F, A E cadentia inter duas ordinationes A C, E F ad vtraſque partes axis B V ſunt inter ſe ſimilia, & ſimiliter poſita, nec ſunt ſimilia alteri ſegmento (niſi in ellipſi, in qua quatuor ſegmenta memorata in propoſitione 8. ſunt æqualia, ſimilia, & ſimiliter poſita, quæ alteri ſegmẽto ſimilia nõ ſunt.



a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non cõgruunt duo ſegmenta GI, K H in ellipſi (7. 8. ex 6.) at non ſunt ſimilia alteri ſegmento: ſi enim hoc fieri poteſt, ſit ſegmentum L M ſimile ſegmento F C. Et quia F C congruit A E. Ergo duo ſegmenta L M, A E ſunt ſimilia, producamus A E, L M
b quouſque occurrant axi in N, O, erit angulus N æqualis O (vti demonſtrauimus in 16. & 17.

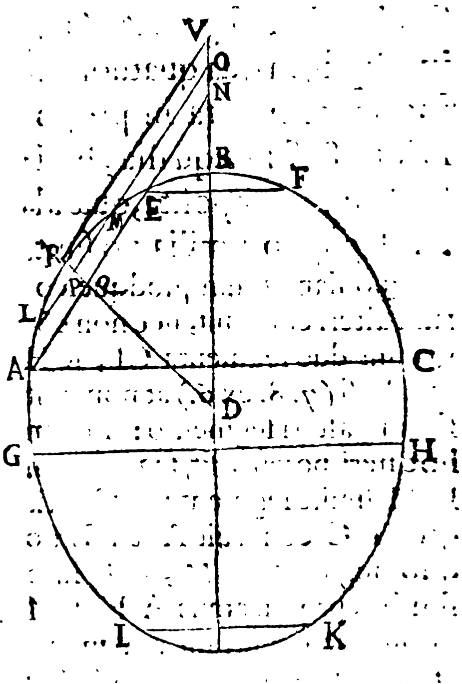
huius) atque A N parallela erit L O. Educatur iam R Q bifariã diuidens A E, L M in P, Q: quare erit diame- 28.lib. 2. ter ſectionis (32. ex 2.) & educatur R V parallela A N, quæ ſectionẽ 17. lib. 1. continget (18. ex 1.). Et quia duo ſegmenta L M, A E ſunt ſi- 16. 17. huius. milia habebit maior Q R ad eandem R V eandem proportionẽ, quàm habet minor R P; quod eſt abſurdum. Quare non ſunt ſimilia duo ſegmenta A E, C F alteri ſegmento. Quod erat oſtendendum.



Notæ in Propoſit. XVIII. & XIX.

QVoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non congruunt duo ſegmenta G I, K H in ellipſi (7. 8. ex 6.) at non ſunt ſimilia alteri ſegmento, &c. *Ideſt. Sit prius ſectio A B C parabole, vel* 7. huius *hyperbole; Quoniam duæ A C, & E F ordinatim ad axim B D applicatæ abſcindunt ex vtraque parte axis duo ſegmenta A E, & C F congruentia, propterea ſimilia erunt, atque ſimiliter poſita. Secundo, in ellipſi ductæ ſint ad axim quatuor ordinatim applicatæ, quarum bina extremæ E F, & I K æqualiter à centro D diſtent; pariterque bina intermedia A C, & G H æqua-* 8. huius. *liter diſtent ab eodem centro: quare quatuor ſegmenta G I, H K, C F, & A E æqualia erunt, & ſibi mutuo congruent, & propterea ſimilia quoque inter ſe erunt.* a

Erit angulus N æqualis O, vti demõſtrauimus, &c. *Quoniam duo ſegmenta L M, & A E, ponuntur ſimilia, atque eorum baſes L M, & A E productæ occurrunt axi* Prop 16. 17. huius. *in O, & N: igitur vt demonſtratum eſt, anguli à contingentibus verticalibus ſegmentorum ſimilium L M, & A E cum axi communi B D eiuſdem ſectionis continebunt an-* b



gulos

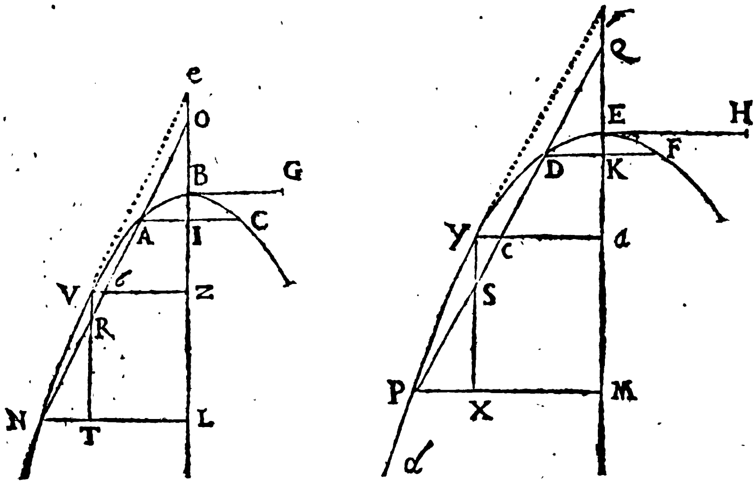
gulos æquales; ij verò anguli æquales ſunt angulis O, & N, cum baſes L M, & A E parallelæ ſint contingentibus verticalibus eorundem ſegmentorum; igitur anguli L O B, & A N B æquales ſunt inter ſe; & propterea duorum ſegmentorũ baſes L M, & A E parallelæ ſunt inter ſe.

SECTIO OCTAVA

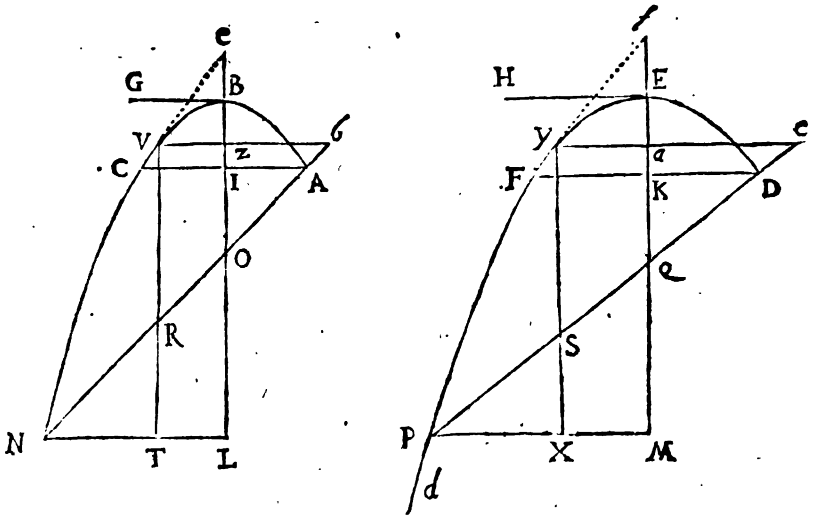
Continens Propoſit. XX. & XXI. Apollonij.

PROPOSITIO XX.

a SI in quibuslibet ſimilibus coniſectionibus A B C, & D E F ductæ fuerint ad axes B O, E Q ordinatim applicatæ A C, D F, N L, P M, quarum illæ, quæ ad eaſdem partes verticum B, & E ducuntur efficiant abſciſſas erectis proportionales, ſcilicet I B ad B G ſit, vt K E ad E H, nec non L B ad B G, vt M E ad E H: Dico ſegmenta facta ab ordinatis ſimiliter poſitis eſſe inter ſe ſimilia, ac ſimiliter poſita, ſcilicet N A ipſi P D, atque A B ipſi D E, nec non N B ipſi P E.



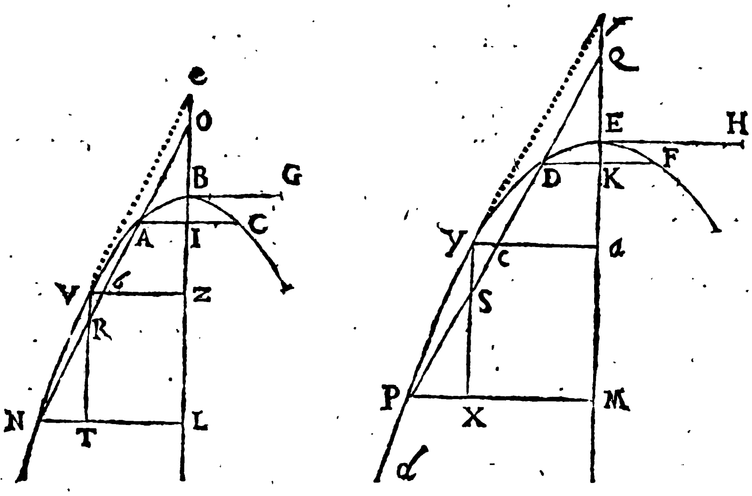
b Sintque primò ſectiones parabolæ; & educamus N A ad B L in O, & P D ad M E in Q. Et quia G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo L B ad B I, nempe L N ad I A potentiâ (19. ex 1.) nempe L N ad O I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K; 20.lib. 1.



ad E K, nempe P M ad D K potentia, nempe M Q ad Q K, & per conuerſionem
rationis O L ad L I erit, vt Q M ad M K: eſtque I L ad L B,
vt K M ad M E; ergo O L ad L B eſt, vt Q M ad M E, & L B ad L N
Defin. 2. eſt, vt E M ad M P (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) ergo ex c
æqualitate O L ad L N erit, vt Q M ad M P; ſuntque M, & L duo anguli
recti; ergo N L O ſimile eſt P M Q; & per R, S ſemipartitiones ipſarum
N A, D P ducamus ipſas T V, X Y parallelas duobus axibus, &
ex duobus punctis V, Y, educamus perpendiculares V Z, Y *a* ſuper duos
axes. Et quia N O ad O A eſt, vt P Q ad Q D comparando antecedẽtes d
ad ſemiſſes differentiarum terminorum vel ad ſemiſummas eorũ fiet N
O ad R O, nempe N L ad L T, quæ eſt æqualis ipſi V Z, nempe L B
ad B Z longitudine (19. ex 1.) vt P Q ad Q S, nempe P M ad X M æqualem
20. lib. 1. ipſi Y *a*, nempe longitudine, vt M E ad E *a* (19. ex 1) igitur
comparando differentias terminorum ad antecedentes, erit Z L ad L B,
vt *a* M ad M E, & L B ad L O eſt, vt M E ad M Q; ergo ex æqualitate
Ibidem. L Z ad L O, nempe N *b* ad N O eſt, vt M *a* ad M Q, nempe P *c* ad P Q
erat autem prius N R ad N O, vt S P ad P Q, & comparando ſemiſũmas, e
vel ſemidifferentias terminorum ad eorundem differentias O R ad
R *b* erit, vt Q S ad S *c*, & R *b* ad R V eſt, vt S *c* ad S Y; quia
duo triangula V R *b*, Y S *c* ſunt ſimilia; ergo R O ad R V eandem proportionem
habet, quàm Q S ad S Y; ſed tangens in V perueniens ad L O f
æqualis eſt O R, cui parallela eſt; quia cadit inter duas lineas parallelas;
& ſimiliter tangens in Y parallela eſt S Q, & ei æqualis; ergo V R abſciſſa
ad tangentem eſt, vt abſciſſa S Y ad eius tangentem, & angulus Q
æqualis eſt angulo O; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſunt ſimilia
(16. ex 6.) & pariter duo ſegmenta A B C, D E F, atque duo ſegmenta g
N B, P E ſunt ſimilia inter ſe, & ſimiliter poſita.

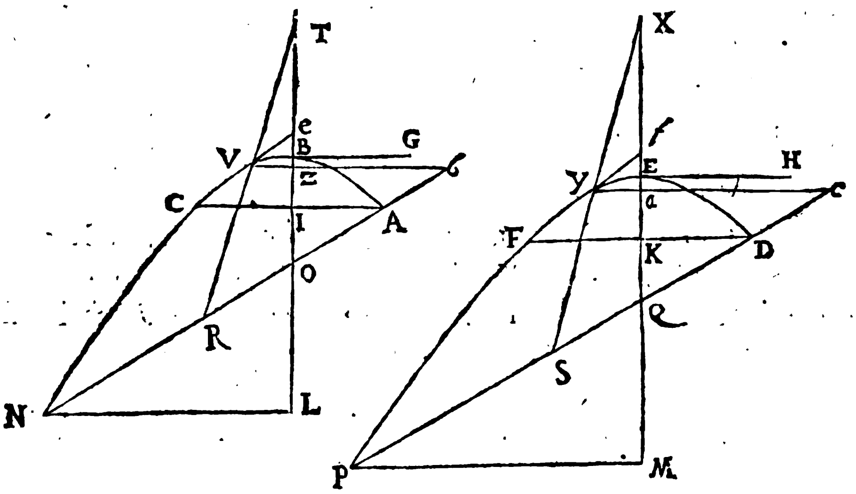
Deinde ponamus aliud ſegmentum P *d*. Dico non eſſe ſimile alicui h
prædictorum ſegmentorum, quia non abſcinduntur à duabus ordinationibus
vnius axis (18. ex 6.). Et hoc erat oſtendendum.

PROP.



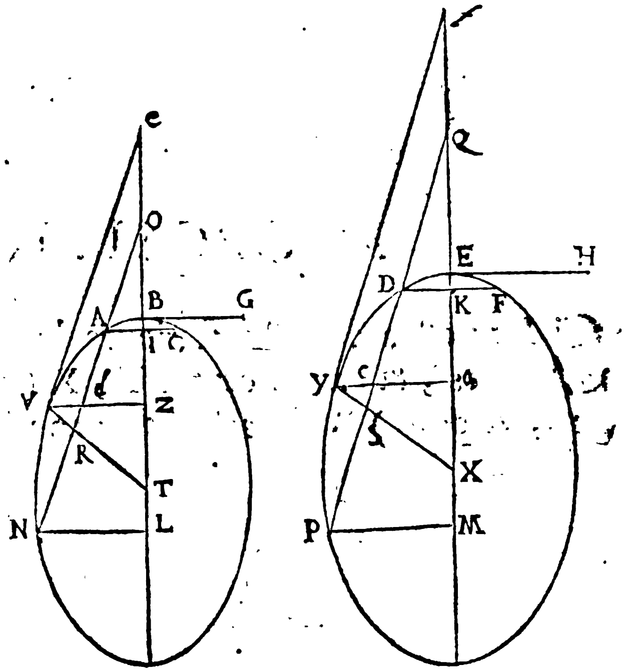
PROPOSITIO XXI.

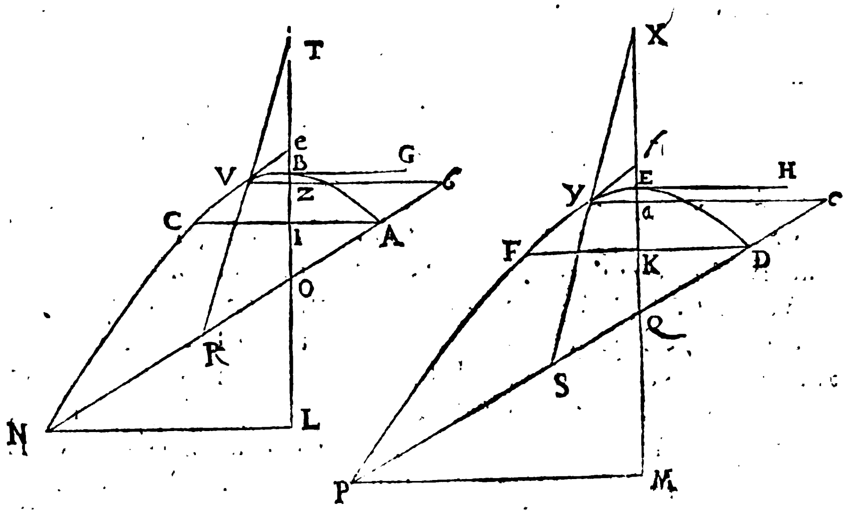
Sint poſtea duæ illæ ſectiones hyperbolicæ, & ellipticæ ſimiles, & earum centra T, X (remanentibus lineis, & ſignis, vt prius) & ducantur duæ contingentes V *e*, & Y *f*.



a Quoniam B G ad B I ſuppoſita eſt, vt H E ad E K, & pariter G B ad
B L, vt H E ad E M; ergo ex æqualitate, & per conuerſionem rationis
b B L ad L I eſt vt E M ad M K; & propter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I nempe L O ad O I eſt, vt M P ad D K, nempe M Q
ad Q K, & antecedentes ad ſummas vel differentias terminorum, ſcilicet Lem. 1. lib. 5.
c O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K, & ex
æqualitate O L ad L B erit, vt Q M ad M E, ſed B L ad L N eſt, vt E
M ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles; ergo O L ad L N
eſt, vt Q M ad M P; ſuntque L, M duo anguli recti: ergo anguli O, Q

nempe *e*, *f* ſunt æquales: deinde ducantur V Z, Y *a* ad axes ordinatæ ; d
ergo (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) T Z in Z *e* ad quadratum
Z V eandem proportionem habebit, quàm X *a* in *a f* ad quadratum
Propoſ. 6. præmiſſ. *a* Y, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur V *e* T ſimile eſt Y *f* X, &
pariter O T R, Q X S ; & propterea O *e* ad R V eandem proportionem
habebit, quàm Q *f* ad Y S, & propter ſimilitudinem duarum ſectionum;
B I ad I A eſt, vt E K ad K D, & A I ad I O, vt D K ad K Q propter
Lem. 1. lib. 5. ſimilitudinem duorum triangulorum; ergo (ex æqualitate, & comparando
antecedentes ad ſummas vel differentias terminorum) erit B I ad BO, e
vt E K ad E Q, ſed B T ad B I erat, vt X E ad E K (propter ſimilitudinem
duarum ſectionum)
ergo ex æqualitate, & rurſus
comparando antecedẽtes ad
Ibidem. ſummas vel differentias terminorum
B T ad T O erit,
vt X E ad X Q, cumque T
37. lib. 1. Z in Z *e* ad quadratum V Z
ſit vt X *a* in *a f* ad quadratum f
a Y (39. ex 1.) & quadratum
V Z ad quadratum
Z *e* eſt, vt quadratũ *a* Y ad
quadratũ *a f* erit T Z in Z *e*,
ad quadratũ Z *e*, nempe T Z
ad Z *e* vt X *a* in *a f* ad quadratum
a f nempe G *a* ad *a f*, &
comparãdo antecedentes ad
differnntias terminorũ in hyperbola,
& ad eorum ſummas
in ellipſi, fiet Z T ad T *e*, nẽpe
quadratum B T (quod eſt
37. lib. 1. æquale ipſi Z T in T *e* (39 ex 1.) ad quadratnm T *e* eſt, vt X *a* ad X *f*,
nempe *a* X in X *f*, quod eſt æquale quadrato E X (39. ex 1.) ad quadratum
Ibidem. X *f*; ergo B T ad T *e* potentia eſt, vt E X ad X *f*; & propterea

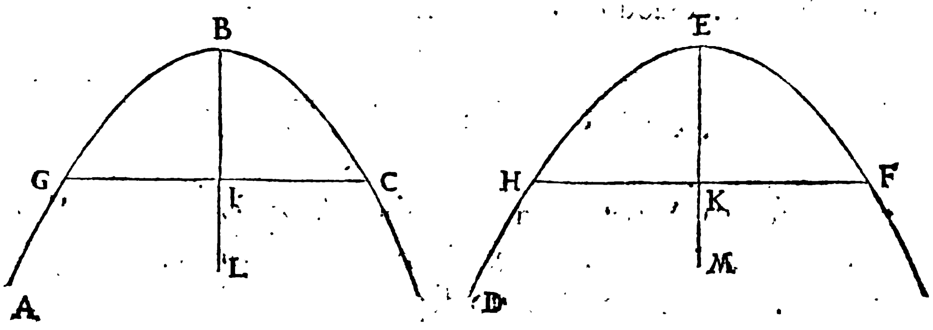




T B ad T *e* erit, vt E X ad X *f*; & iam oſtendimus, quod B T ad T O eſt, vt E X ad X Q; igitur ex æqualitate, & comparando terminorum differentias ad conſequentes erit O *e* ad *e* T, vt Q *f* ad *f* X; ſed T *e* ad *e* V eandem proportionem habet quàm X *f* ad *f* Y, eo quod oſtenſa ſunt ſimilia triangula V T *e*, Y X *f*; quare O *e* ad *e* V eſt vt Q *f* ad *f* Y; & iam oſtendimus, quod O *e* ad R V eandem proportionem habet, quàm Q *f* ad S Y; ergo R V ad V *e* eſt, vt S Y ad Y *f*, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſimilia ſunt inter ſe (17. ex 6.) & ſimiliter poſita. Inſuper dico, non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento; quia non abſcinduntur ab vna ordinatione, aut duabus, & earum diſtantia in ellipſi à centro non eſt æqualis (18. ex 6.), & hoc erat oſtendendum. Lem. 1. lib. 5.

PROPOSITIO XXII.

Sectionum non ſimilium A B C, D E F vnum ſegmentum vnius non eſt ſimile alicui ſegmento alterius.



Si enim hoc verum non eſt, ſit ſegmentum G C ſectionis A B C (ſi fieri poteſt) ſimile ipſi H F alterius ſectionis D E F, & iungamus G C, H F, eaſdeq; bifariam ſecemus in I, K; iungamuſque L I, M K; quæ ſint duæ diametri, & ſecent ſegmenta in B, E: ſi itaque fuerint duo axes, cū duo ſegmenta ſint ſimilia, vtique egrederentur in eorum ſingulis ordinationes ad duos axes, numero æquales, continentes cum axibus angulos rectos, & proportiones ordinationum ad ſua abſciſſa in qualibet earum eſſent æedem, ac abſciſſæ ad abſciſſas proportionales quoque eſſent. Et propterea duæ ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, ſed iam ſuppoſitæ fuerunt non ſimiles; quod eſt abſurdum. Si verò I L, M K non fuerint axes, educamus ex B, E ad duos axes L P, M Q duas perpendiculares B P, E Q, & duas tangentes B N, & E O: itaque (propter ſimilitudinē duorum ſegmentorum) ſimilia erunt B N L, E O M; & pariter L B P, M E Q; atque quadratum B P ad L B in P N, nempe in eadem proportione

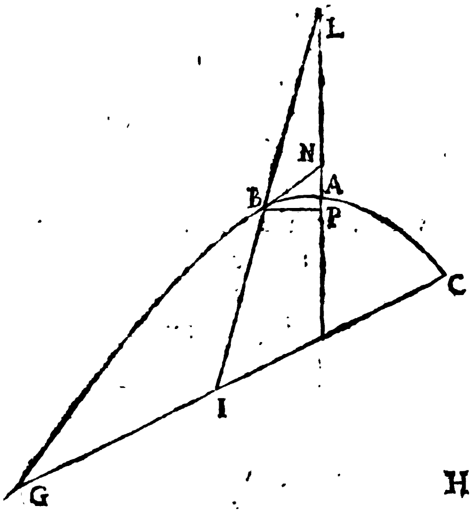
44. lib. 2.

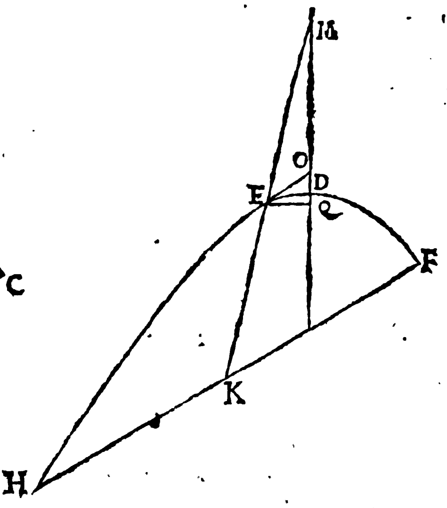
Defin. 7. huius.

a

Defin. 2. huius.

b





37. lib. 1. tione figuræ diametri A L (40. ex 1.) erit vt quadratum E Q ad M Q in O Q, nempe in eadem proportione figuræ diametri D M (40. ex 1.) Ibidem. quapropter duæ proportiones figurarum earundem ſectionum ſunt eædem inter ſe; & propterea duæ ſectiones ſunt ſimiles (12. ex 6.) at ſuppoſitæ fuerunt non ſimiles. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XXIII.

SI autem ſectio A B C fuerit parabola, & ſectio D E F hyperbola, aut ellipſis: manifeſtum eſt, ſectiones non eſſe inter ſe ſimiles. Et dico quod duo ſegmenta G C, H F non ſunt ſimilia. 13. huius.

Si enim ſimilia eſſent haberent conditiones ſimilitudinis, quod eſt impoſſibile, quemadmodum oſtenſum eſt in omnibus ſectionibus ad propoſitionem 13. ſi vero vna earum fuerit hyperbole, altera verò ellipſis, idipſum oſtenſum eſt ad propoſitionem 14. Et hoc erat propoſitum. a

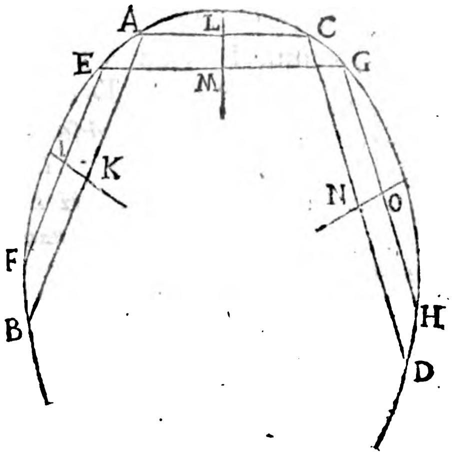
PROPOSITIO XXIV.

CVjuslibet coniſectionis A C D portio B A C D non erit arcus circuli.

Si enim hoc verum non eſt educamus in illa chordas A B, C D, A C, quarum nulla alteri ſit parallela: & educamus E F parallelam A B, & E G parallelam A C, atque G H parallelam C D, & per ſingularum duarum æquidiſtantium ſemipartitiones iungamus K I, L M, N O, quæ quidem

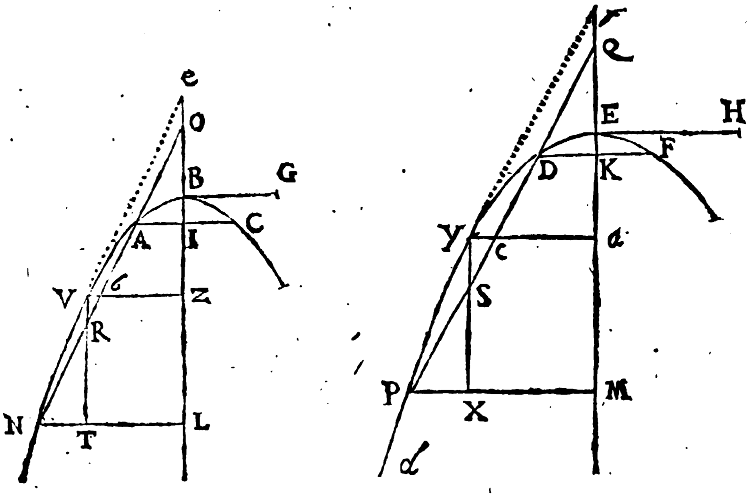
dem lineæ perpendiculares ſunt ad prædictas chordas, ſuntque etiam diametri ſectionis, ergo I K, L M, N O ſunt axes, nec ſibi in directum coincidunt; quia chordæ primò eductæ inter ſe parallelæ non erant: hoc autem eſt abſurdum, quia in qualibet ſectione reperiri non poſſunt plures, quàm duo axes (52. ex 2.); ergo fieri non poteſt, vt ſectionis conicæ portio ſit arcus circuli. Quod erat oſtendendum.

48.lib. 2.



Notæ in Propoſit. XX.

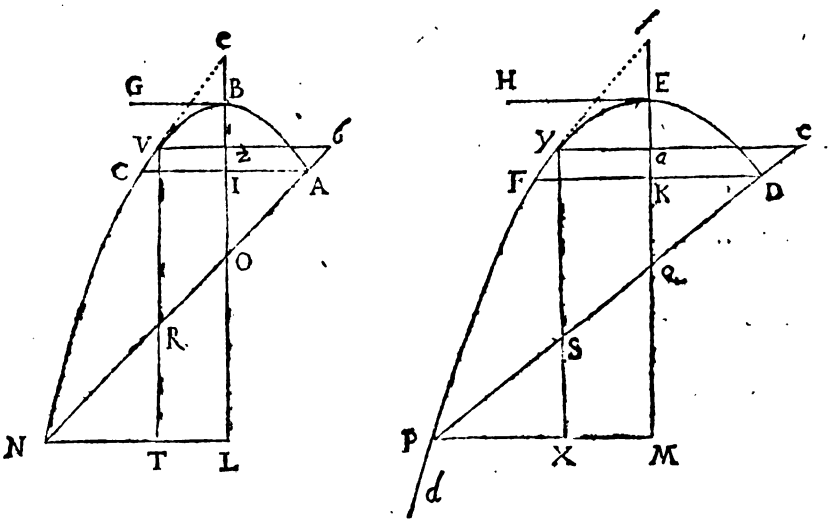
a QVodlibet duorum ſegmentorum, vt A B C, D E F in duobus ſegmentis ſimilibus, vt N A C, P D F abſciſſa ſint ab ordinatis duorum axium ſectionum, vt A C, D F, N L, P M, A M, A S, K M ad latus ſuarum verticum vt B, E; ſitque proportio earum abſciſſarum ad erecta duorum ſegmentorum eadem, nempe I B ad B G, vt K E ad E H, & L B ad B G, vt M E ad E H: vtique duo ſegmenta A B C, D E F, N B, P E ſimilia ſunt, & ſimilia poſitione: &c. *Textus hic adeo corruptus eſt, vt ne Apollonius quidem, ſi reuiuiſceret, ſenſum ex verbis tam inconcinnis, & non coherentibus elicere poſſet. Itaque diuinando eam eſſe veram lectionem cenſeo; quàm in textu appoſui.*



Educa-

Educamus itaque N A ad O ex B L, & P D ad Q ex M E, quia B G ad B I eſt, vt H E ad E K, & B G ad B L eſt vt H E ad E M; ergo L B ad B I, nempe L N ad A I (19. ex 1. (nempe L O ad O I eſt vt M E ad E K, nempe P M ad D K, nempe M Q ad Q K; & contra O L ad L I, vt V M ad M K, &c. *Addenda non nulla verba, quæ deficiunt, & reliqua reſtituenda cenſui, vt in textu leguntur. Quoniam B G ad B I eſt vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo, ex æqualitate, L B ad B I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K, ſed quadratum N L ad quadratum A I eſt in parabola, vt abſciſſa L B ad B I; pariterque quadratum P M ad quadratum D K eſt, vt M E ad E K: & propterea quadratum N L ad quadratum A I eandem proportionem habebit quàm quadratum P M ad quadratum D K; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K; ſed vt N L ad A I ita eſt L O ad O I (propter parallelas A I, N L, & ſimilitudinem triangulorū A I O, & O N L) pariterq; vt P M ad D K ita eſt M Q ad Q K (propter ſimilitudinem triangulorum Q M P, & Q K D) igitur L O ad O I eandem proportionem habebit, quàm M Q ad Q K; & comparando antecedentes ad differentias, vel ſummas terminorum O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K.* b

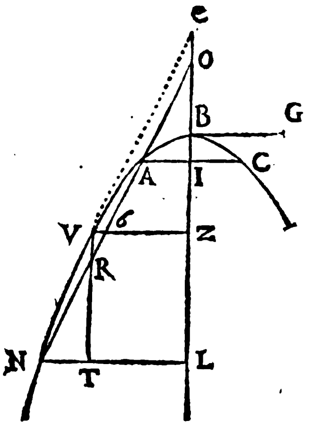
20. lib. 1.

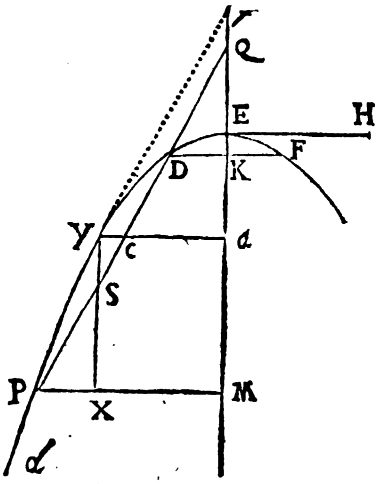


Et B L ad L N eſt vt E M ad M P (propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum) ergo ex æqualitate O L ad L N, &c. *Sequitur quidem hoc non propter ſimilitudinem ſegmentorum, quandoquidem ſegmenta ſimilia non ſupponuntur ſed quia ſemper parabolæ ſunt ſimiles, & in eis poſitæ ſunt axium abſciſſæ L B, & M E proportionales lateribus rectis B G, & E H, propterea (vt in prop. 11. huius oſtenſum eſt) B L ad L N eandem proportionem habebit quàm E M ad M P; ſed prius L B ad B I erat vt M E ad E K, ergo comparādo differentias terminorum ad antecedentes erit I L ad L B vt K M ad M E, eſtq; oſtenſa O L ad L I vt Q M ad M K, ergo ex æquali ordinata O L ad L I erit vt Q M ad M E.* C

11. huius.

d Et quia N O ad O A eſt vt P Q ad Q D inuertamus proportionem, deinde bifariam ſecemus duas tertias partes, & inuertamus eas quoque fiet N O ad O R, nempe N L ad L T in eadem ratione ipſi V Z, nempe L B ad B Z, vt D Q ad Q T, nempe P M ad P X æqualem ipſi Y *a*, nempe M E ad E *a*, &c. *Quoniam L O ad O I oſtenſa fuit vt M Q ad Q K, & propter parallelas I A, L N, nec non D K, M P eſt N O ad O A, vt L O ad O I; pariterq; P Q ad Q D eſt vt M Q ad Q K; igitur N O ad O A eandē proportionē habet, quàm P Q ad Q D, & comparando antecedentes ad ſemidifferentias, vel ſemiſūmas terminorū erit N O ad R A, vt P Q ad S D: & propterea N O ad O R ſummā, vel differentiā conſequentium eandem proportionem habebit, quàm P Q ad Q S; ſed propter parallelas R T, & O L eſt L N ad T L, vt N O ad O R: pariterque (propter parallelas S X, & Q M) eſt P M ad X M, vt P Q ad Q S; igitur N L ad L T eandem proportionem habet, quàm P M ad M X: ſuntque in parallelogrammis V L, & Y M latera oppoſita æqualia V Z ipſi T L, atque a Y ipſi X M; igitur N L ad V Z eandem proportionem habet, quàm P M ad Y a, & ita erunt earum quadrata; ſed vt quadratū* 20 lib.1. *N L ad quadratum V Z ita eſt abſciſſa L B ad abſciſſam B Z, pariterque vt quadratum P M ad quadratum Y a, ita eſt abſciſſa M E ad abſciſſam E a; ergo L B ad B Z eandem proportionem habet, quàm M E ad E a.*

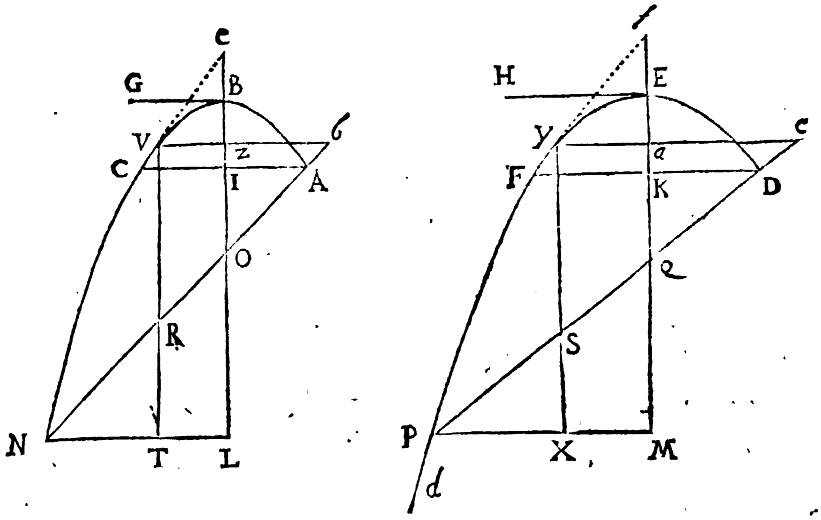




e Et occurrere faciamus par pari remanet O R ad R *b*, vt Q S ad S *c*, &c. *Quoniam oſtenſa fuit O N ad O R, vt Q P ad Q S, per conuerſionem rationis O N ad N R erit vt Q P ad P S, pariterque oſtenſa fuit b N ad N O, vt c P ad P Q; ergo ex æquali b N ad N R eſt vt c P ad S P, & diuidendo b R ad R N erit vt c S ad S P; ſed erat inuertendo R N ad N O, vt S P ad P Q; quare comparando antecedentes ad differentias terminorum erit N R ad R O vt P S ad S Q; ideoq; rurſus ex æqualitate b R ad R O erit vt c S ad S Q; eſtq; V R ad R b vt Y S ad S c (eo quod triangula V R b, & Y S c ſunt ſimilia triangulis ſimilibus O N L, & Q M P propter æquidiſtantes) ergo ex æquali ordinata V R ad R O eandem proportionem habet, quàm Y S ad S Q.*

f Sed tangens in V perueniens ad L O, &c. *Si enim ex punctis Y, V ducantur V* e, *& Y* f *tangentes parabolas, & producantur quouſque ſecent axes in* e, *&* f *efficientur duo parallelogramma V* e *O R, & Y* f *Q S, in quibus tãgentes V* e, *& Y* f *efficientur æquales ipſis O R, & Q S: & propterea inuertendo R V abſciſſa ad contingentem V* e *æqualem ipſi R O eandem proportionem habebit, quàm abſciſa S Y ad contingentem Y* f *æqualem ipſi S Q, atque efficiunt prædictæ contingentes cum axibus angulos* e, f *æquales ipſis O, & Q æqualibus propter parallelas; igitur ſegmenta N V A, & P Y D ſimilia ſunt inter ſe.*

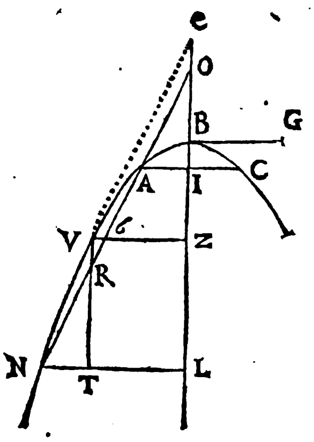
Prop. 16. huius.

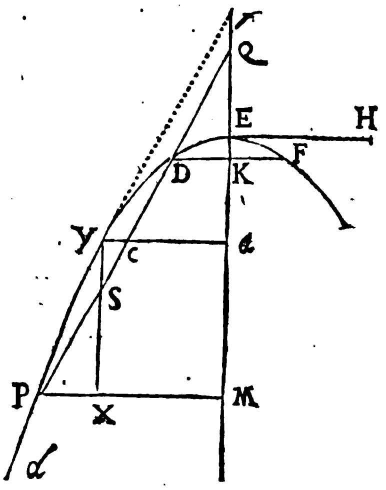


g Et pariter duo ſegmenta A B C, D E F, atque duo ſegmenta N B, P E ſunt ſimilia inter ſe, & ſimiliter poſita, &c. *Hoc manifeſtum eſt, ſi enim coniungantur rectæ lineæ N C, & P F, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, &c, vti fecimus in ſectione N A, oſtendetur ſimiliter (ex eadem 16. propoſitione) ſegmenta N C, P F ſimilia eſſe inter ſe. Non ſecus ſi coniungantur rectæ lineæ N B, & P E, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, & reliqua perficiantur, vt prius, oſtendentur eodem modo, ſegmẽta N B, & P E ſimilia inter ſe.*

h Deinde ponamus ſegmentũ P *d;* quia non abſcindunt illa duæ ordinationes vnius axis (18. ex 6.), & hoc erat, &c. *Sed legendum puto vt in textu apparet. & horum verborũ ſenſus erit; fieri non poteſt, vt ſegmentũ P* d *ſit ſimile ipſi N A, vel N B, propterea quod in ſectione P F ſegmenta P* d *vni tantummodo portioni ſimile eſt (præter quàm in ellipſi), & ambo intercipi debent à duabus ordinatim applicatis ad axim E Q: & propterea ſegmenta P D, vel P E non erunt ſimilia ipſi P* d, *& quia N A oſtenſum eſt ſimile P D, pariterque N B oſtenſum eſt ſimile P E; igitur ſegmentum P* d *ſimile non eſt, neque N A, neque ſegmento N B; quod erat oſtendundum.*

NOTE





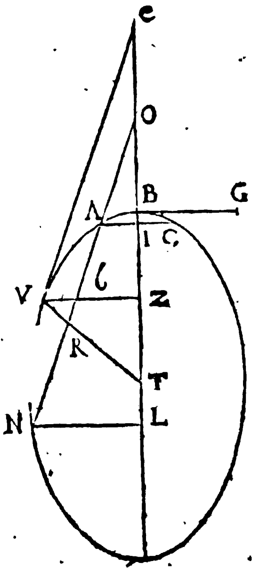
Notæ in Propoſit. XXI.

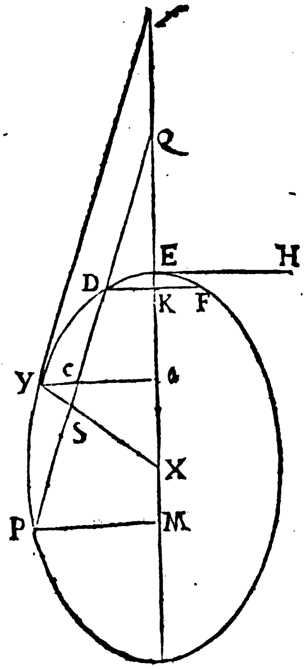
a QVoniam G B ad B I, ſuppoſita eſt vt H E ad E K, &c. *Quia L B ad B G ex hypotheſi erat, vt M E ad E H, & inuertendo G B ad B I erat vt H E ad E K; ergo ex æqualitate L B ad B I erit vt M E ad E K; & per conuerſionem rationis B L ad L I erit vt E M ad M K.*

b Et propter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I, nempe L O ad O I eſt, vt P M ad F K, nempe M Q ad Q K, &c. *Quoniam duæ ſectiones N B, & P E ſimiles ſuppoſitæ ſunt, & axiũ abſciſſæ L B, M E; nec non I B, K E ad latera recta B G, & H E proportionales ſunt; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K: & quia triangula N L O, & A I O ſimilia ſunt propter parallelas N L, & I A, pariterque triangula P M Q, & D K Q ſimilia ſunt; igitur L O ad O I erit vt N L ad I A; pariterque M Q ad Q K erit vt P M ad D K, ſeu vt N L ad A I: & propterea L O ad O I erit vt M Q ad Q K.*

ex 12. huius.

c Et ex æqualitate L O ad L B erit vt Q M ad M E, ſed L B ad L N eſt vt M E ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles, &c.

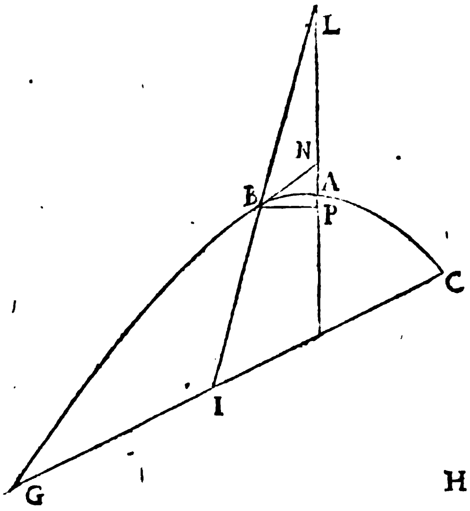


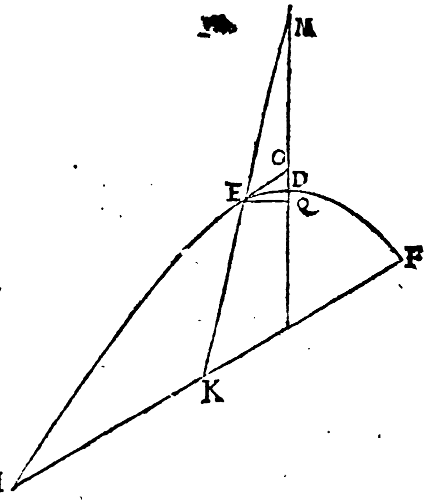


ſeu axium (in hoc caſu) L B, & M E figuræ ſimiles inter ſe; & ideò ſectiones A B C, & D E F ſimiles erunt. ex 11. 12. huius.

Itaque propter ſimilitudinem duorum ſegmẽtorum ſimlia erunt B N L, E O M, & pariter L B P, & M E Q atque quadratum B P ad L P in P N nempe, &c. *Huius ſecundæ partis demonſtrationem, quàm non ſinceram Paraphraſtes Arabicus nobis tranſmiſit omittere operę pretium erit, eandemq; breuius demonſtrare hac ratione. Quia ſegmenta C B G, & F E H ſimilia ponuntur; ergo erunt figuræ diametrorum B I, E K ſimiles inter ſe in angulis I, K æqualibus, & ſectiones ipſæ C B G, & F E H ſimiles inter ſe erunt; quod eſt contra hypotheſin.* b

Lem. 8. huius. Prop. 15. huius.

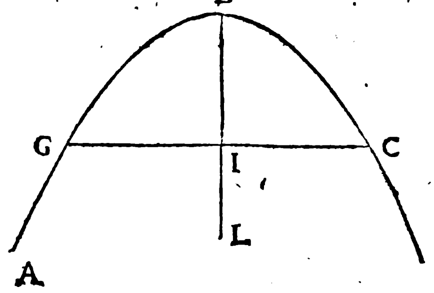


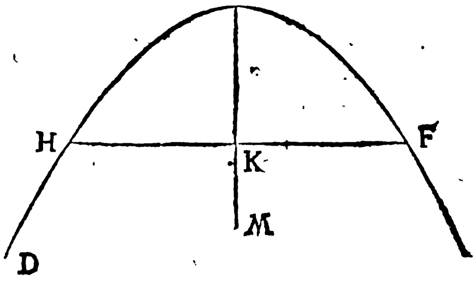


Notæ in Propoſit. XXIII.

SI enim ſimilia eſſent haberent conditiones ſimilitudinis, quod eſt impoſſibile, &c. *Si enim concedantur ſegmenta G B C in parabola, & H E F in hyperbole, vel ellipſi, ſimilia inter ſe; igitur in vnaquaque earũ duci poſſent ad diametros ordinatim applicatæ numero æquales, efficientes angulos æqua-* a

Defin. 7. huius.





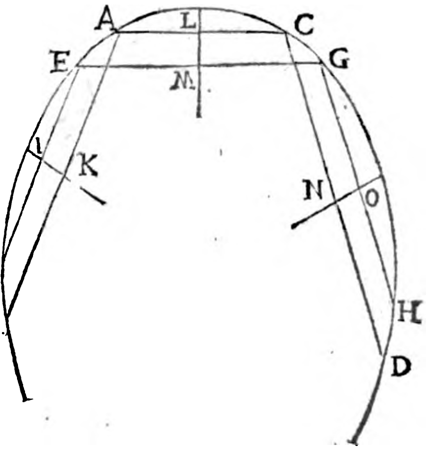
les cum diametris, quæ abſciſſis ſint proportionales, & abſciſſæ quoque inter ſe. Vnde ſequitur, quod portiones eiuſdem diametri E K à centro M ad omnes ordinatim ad diametros applicatas ſint æquales inter ſe, vt oſtenſum eſt in propoſitione 13. *huius: quod eſt impoſſibile.*

Quando verò ſectio A C eſt hyperbole, ac ſectio D F eſt ellipſis, ſimiliter, vt in 14. *propoſitione huius, oſtendetur; quo abſciſſæ in hyperbola, & ellipſi ſint proportionales; & propterea omnes habebunt rationes maioris inæqualitatis, aut omnes habebunt, proportiones inæqualitatis minoris, quod tamen in prædicta* 14. *propoſitione impoſſibile eſſe oſtenditur.*

Notæ in Propoſit. XXIV.

a SI enim hoc verum non eſt, &c. *Quod quælibet portio B A D ſectionis conicæ A B G nullo pacto circumferentia circuli eſſe poſſit ſic oſtendetur.*

Quia in circulo rectæ lineæ diuidentes bifariam duas parallelas inter ſe ſunt neceſſariò diametri circuli, qui perpendiculariter ſecant prædictas parallelas applicatas; igitur ſi curua linea B G D fuerit circuli peripheria rectæ lineæ K I, L M, & N O diametri circuli, erunt perpendiculares ad ordinatim applicatas æquidiſtantes inter ſe; ſed quia etiam A B G ſupponitur ſectio conica, erunt K I, L M, N O axes prædictæ ſectionis conicæ eo quod bifariam, & ad angulos rectos diuidunt ordinatim applicatas. Rurſus quia prædictæ ordinatim applicatæ non ſunt omnes inter ſe parallelæ, eo quod ex conſtructione applicatæ A B, A C, C D non fuerunt ductæ æquidiſtantes; igitur tres axes I K, L M, N O indirectum non coincidunt; quare in ſectione conica B A G reperiri poſſent tres axes; quod eſt impoſſibile. 48. lib. 2.

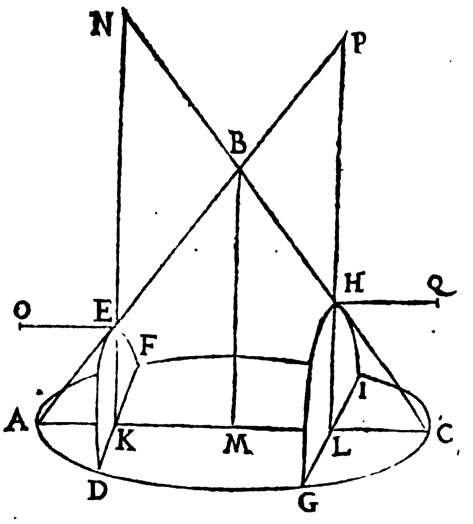


SECTIO NONA

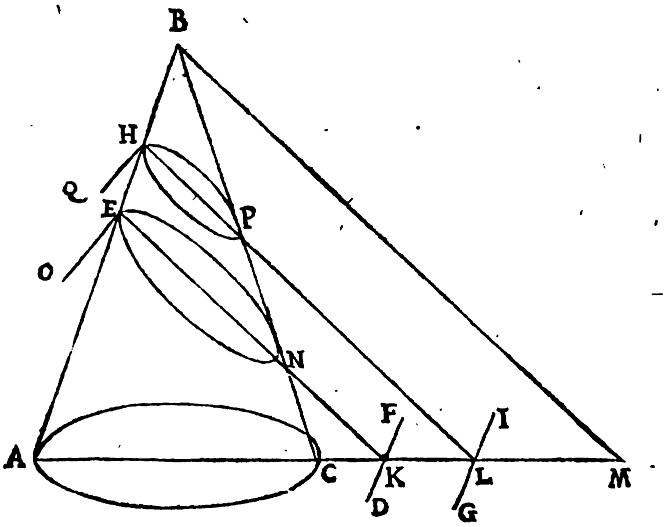
Continens Propoſit. XXV.

b SI duo plana æquidiſtantia conum aliquem ſecuerint, atque in eo efficiant duas hyperbolas, aut ellipſes; vtique ſectiones ſimiles inter ſe erunt, ſed non erunt neceſſariò æquales.

Efficiant



Efficiant duo plana parallela D E N F, G H P I in baſim coni A C duas rectas lineas D F, G I, & planum per axim coni ductum efficiat triangulum A B C perpendiculare ad duo illa plana parallela; quæ ab illo ſecentur in E K, H L. Erunt D F, I G perpendiculares ad A C, & educamus B M parallelam ipſis E K, H L; & vt quadratum B M ad A M in M C; ita ponatur N E ad E O, & ita P H fiat ad H Q, erunt 12. 13. lib. 1. N E, P H inclinata duarũ ſectionũ F E D, I H G, aut eorum tranſuerſæ; igitur O E, H Q erunt eorum 12. huius. erecta, & propterea figuræ duarum ſectionũ ſunt ſimiles; igitur duæ ſectio- 2. & 10. huius. nes ſimiles ſunt. Et ſi quidem fuerint N E, P H æquales; ipſæ quoque æquales erunt, alias non; Et hoc erat propoſitum. b



Notæ in Propoſit. XXV.

SI abſcindant conum aliquem duo plana parallela prouenient duæ ſectiones hyperbolicæ, vel quia duæ ſectiones ſunt ſimiles, &c. *Quæ, immutanda cenſui vt in textu videre eſt.* a

Sint abſciſſiones duorum planorum æquidiſtantium cum baſi I G, F D, & ſecet conum planum tranſiens per eius axim, &c. *Addidi verba, quæ in textu deſiderantur, quæ expoſitionem perficiunt. Animaduertendum eſt, hanc propoſitionem conuertibilem non eſſe; licet enim plana parallela in eodem cono efficiant ſectiones ſimiles, verum non eſt, quod quotieſcunque in eodem cono duæ* b

ſectiones

ſectiones ſunt æquales, vel ſimiles inter ſe, tunc quidem earum plana ſunt æquidiſtantia: Sicuti enim in eodem cono ſcaleno deſignari poſſunt circuli æquales ſubcontrariè poſiti, ſic etiam reliquæ coniſectiones ſubcontrariè conſtitutæ effici poſſunt æquales, & ſimiles inter ſe: hæc autem, ſicuti etiam quamplurima videri poſſunt in libris neotericorum.

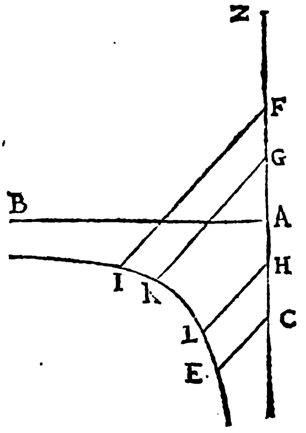
Sed non alienum erit à noſtro inſtituto hic paucis conſiderare paſſiones, & deſcriptiones ſectionum conicarum ſimilium, vel æqualium, quæ æquidiſtantes, ſeu asymptoticæ vocantur. Et licet hæ ab alijs inuentæ, & traditæ ſint, non nulla tamen noua in medium afferam: non enim rerum nouitas ex ſubiecti nouitate tantummodò arguitur, imo de ſubiecto antiquo poſſunt noua ſpeculationes afferri, atque corrigi, & cõpleri ea, quæ apicem perfectionis non attingunt, & hæc quidem omnia noua dici poterunt, & poſſunt, & debent zelo veritatis euulgari, nec propterea prædeceſſorum nominibus, aut inuentionibus iniuria infertur.

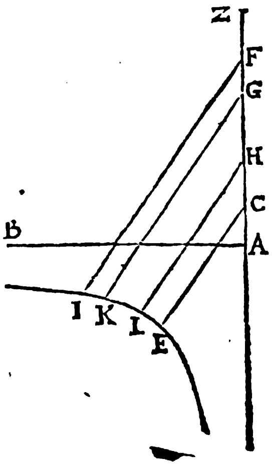
Primus itaque omnium (quod ſciam) Pappus Alexandrinus libro ſeptimo collectionum Mathematicarum propoſitione 208. lemmate ſexto in quintum librum Apollonij, conſiderauit concentricas hyperbolas inter ſe ſimiles, eundẽ axim habentes, ad eaſdem partes cauas inter ſe ſe non concurrere, ſed ſemper ad ſe ipſas vicinius accedere. Poſtea Gregorius à Santo Vincentio oſtendit, quod duæ parabolæ inter ſe æquales, ſimiliter poſitæ circa communem axim, vel diametrum, pariter nunquàm conueniunt, & parallelæ ſunt inter ſe, & in infinitum productæ ſemper magis ad inuicem accedunt; atque propoſit. 139. de Hyperbola conſiderauit duas hyperbolas æquales, & ſimiles, quæ pariter in infinitũ extenſæ nunquàm conueniunt, & ſimul cum Pappo putat, rite concludi poſſe, quod prædictæ ſectiones, in infinitum extenſæ, ſint asymptoti, & ſemper magis, ac magis ad inuicem appropinquentur ex eo, quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes inter duas ſectiones interceptæ, ſucceſſiuè ſemper diminuantur. Propoſitiones quidem reconditæ, & ſcitu iucundæ, ſed an æquè certæ, & indubitatæ cenſeri debeant, inquiremus, aliquibus tamen præmiſſis.

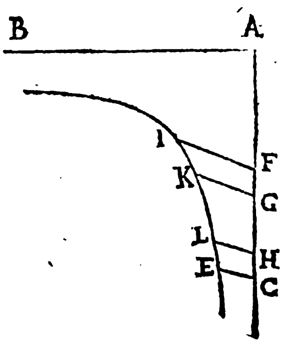
Parab. pr. 344.

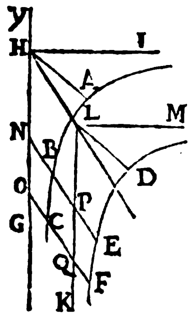
DEFINITIO Addita.

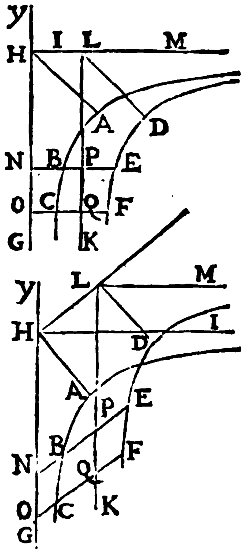
In qualibet hyperbola I E, cuius asymptoti C A B, duarum rectarum linearum F I, G K inter ſe æquidiſtantium, ab vna asymptoto A C ad hyperbolen eductarum, ſit F I propinquior centro, quàm G K, quando ambo cadunt infra centrum A ad partes C; vel F I magis à centro recedat, quando ambo cadunt





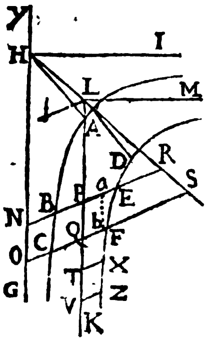


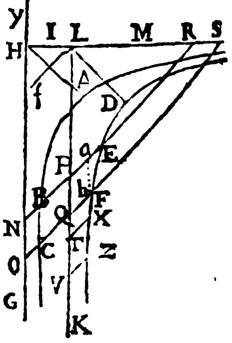




Rectæ lineæ parallelæ B E, C F ſecent æquidiſtantes aſymptotos H G, L K in punctis N, O, P, Q. Debent autem coniſectiones in eodem plano collocari ſicuti aliæ omnes, quæ in ſequentibus propoſitionibus 4. 5. 6. 7. 8. & 9. vſurpantur ſemper in vno plano poſitæ intelligi debent.

Et primo duæ rectæ B E, C F parallelæ ſint rectæ lineæ H L centra coniungenti. Quoniam hyperbolæ A B, D E æquales ſunt, & congruentes; atque æquidiſtantes asymptoti H N, L P æque inclinantur ad æquales ſemiaxes tranſuerſos H A, & L D; & ſegmenta asymptotorum H N, L P æqualia ſunt in parallelogrammo H P, nec non duo anguli H N B, & L P E æquales ſunt inter ſe, propter parallelas asymptotos: igitur duæ figuræ A H N B A, & D L P E D æquales erunt, & congruentes: quapropter interpoſita rectæ lineæ N B & P E congruẽtes, & æquales erunt; & addita vel ablata communi B P, erit N P æqualis B E: eſt verò N P æqualis H L, eo quod H P parallelogrammum eſt; igitur intercepta B E æqualis eſt rectæ lineæ H L centra coniungenti. Eadem ratione qualibet alia intercepta C F parallela ipſi H L eidem æqualis oſtendetur: quapropter duæ interceptæ æquidiſtantes B E, & C F inter ſe æquales erunt.





Secundo B E, C F parallelæ ſint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H; ideoque P L f N, & Q L f O parallelogramma erunt: ſecetur L T æqualis H N, atque L V æqualis H O; ducanturque T X, V Z parallelæ ipſis N B, O C ſecantes reliquam hyperbolen in X, Z; eritque (vt in prima parte oſtenſum eſt) T X æqualis N B, atque V Z æqualis O C. Et ſiquidem B E, C F cadunt infra centra H, L ad partes G, K, cadent quoque infra L f eis parallelam per L ductam infra centrum H incidentem, & ideo N f, ſeu ei æqualis P L in parallelogrãmo P f minor erit, quàm H N; eſtque L T æqualis H N; igitur L P minor erit, quàm L T; & propterea punctum P propinquius erit centro L, quàm T: Eadem ratione oſtendetur, quod punctum Q propinquius ſit centro L, quàm V, & P propinquius centro quàm Q; ergo quatuor æquidiſtantium P E, Q F, T X, V Z cadentium infra centrum ad partes K, duæ P E, T X vlterius ad partes centri, vel aſymptoti L M tendunt, quàm duæ Q F, V Z. At ſi B E, C F ſecent rectã lineam centra coniungentem inter duo centra H, & L, manifeſtum eſt puncta P, & Q cadere ſupra centrum L, atque duo puncta N, & O cadere infra centrum H alterius hyperboles, cumque L T ſecta ſit æqualis ipſi H N ad eaſdem partes; pariterque L V æqualis ipſi Def. add.

H O

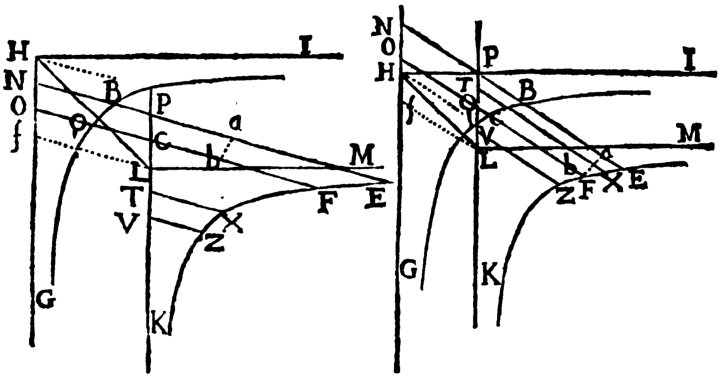
H O cadent puncta T, & V infra centrum L; & P vlterius tendit quàm Q ad partes eiuſdem centri L. igitur in tali caſu quatuor æquidiſtantium duæ P E, T X vlterius tendent ad partes centri, & aſymptoti L M, quàm duæ aliæ æquidiſtantes Q F, V Z. Quando verò B E, & C F cadunt vltra centra H, & L in productionibus æquidiſtantium aſymptotorum G H, K L: quia N P cadit ſupra, & L f infra centrũ H, ergo in parallelogrammo P f recta N f, ſeu ei æqualis L P maior erit quàm N H: facta autem fuit L T æqualis H N; igitur L T minor eſt, quàm L P; Eadem ratione L V minor erit, quàm L Q, atque P vlterius tendit quàm Q ad partes centri L, & ab ijſdem punctis cadentibus ſupra centrum L in productione aſymptoti K L ducuntur quatuor rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes vſque ad hyperbolen D Z; igitur duæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, vel aſymptoti L M, quàm duæ Q F, V Z. Secetur poſtea P a æqualis N B, atque Q b æqualis O C. Et quia T X æqualis oſtenſa fuit N B erit P a æqualis ipſi T X; eſtque P E maior quàm T X; propterea quod illa vlterius tendit ad partes cẽtri L, quàm T X; igitur P E maior erit, quàm P a, & earum differentia erit E a. Simili modo oſtendetur Q b æqualis V Z, & minor quàm Q F, quarum differentia F b: cumque Q P æqualis ſit ipſi N O, propterea quod ſunt latera oppoſita eiuſdem parallelogrammi; igitur T V, quæ oſtenſa fuit æqualis O N erit quoque æqualis Q P, & ſũpta communiter Q T erit Q V æqualis T P, atque à terminis æqualium ſegmentorum eiuſdem aſymptoti L K ducuntur vſque ad hyperbolen E Z quatuor rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, & earum binæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, & aſymptoti L M, quàm binæ Q F, V Z; igitur differentia priorum, ſcilicet E a maior erit poſteriorum differentia F b; eſtque B a æqualis N P, propterea quod æqualibus N B, & P a ponitur communiter B P; pariterque O Q æqualis eſt C b; ſuntque N P, & O Q æquales inter ſe, nempe latera oppoſita eiuſdem parallelogrammi; igitur B a, & C b æquales ſunt inter ſe: ijs verò adduntur exceſſus inæquales E a, F b efficietur E B vlterius tendens ad partes aſymptoti H I maior, quàm F C. Quod erat primum.

Def. add.

Ibidem.

Coroll. Propoſ. 2. addit.

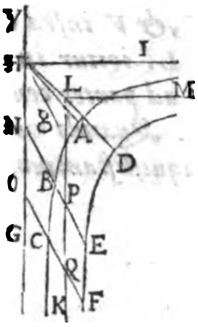
Propoſ. 2. addit.

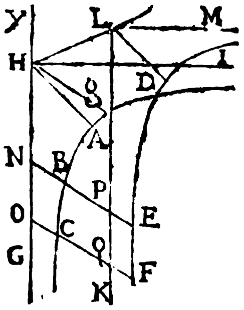


Tertio ijſdem poſitis N E, O F ſint parallelæ alicui rectæ lineæ H g diuidẽti angulum L H G, & propterea extenſæ productionem aſymptoti M L ſecabunt,

&

& parallelæ erunt alicui rectæ lineæ ex L diuidenti angulum H L M, eo quod parallela erãt recta H g diuidenti angulum L H G, & prius B E vlterius, quàm C F tendebat ad parteș asymptoti H I; ergo è contra C F vlterius tendet ad partes asymptoti H G, & educũtur ab asymptoto L M producta, & parallelæ ſunt rectæ lineæ ex L diuidenti angulũ H L M, contentum à recta linea centra coniungente, & asymptoto M L, in qua illæ cadunt; igitur (ex prima parte huius propoſitionis) C F maior erit, quàm B E; & è contra B E vlterius tendens ad partes asymptoti H I, minor erit, quã C F; vt propoſitum fuerat.

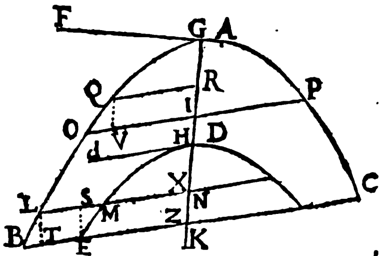


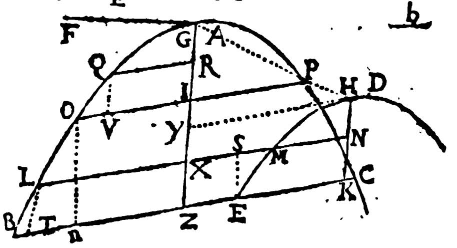


PROP. 4. Addit. Sint duæ æquales parabolæ A B, D E ad eaſdem partes cauæ, quarum diametri G I, H K ſint congruentes aut parallelæ inter ſe, nec nõ ad eas ordinatim applicatæ B Z K, L X N ſint parallelæ alicui rectæ diuidenti angulum G H K à recta linea G H vertices coniungenti, & diametro H K interioris ſectionis D H contentum, ſi diametri congruentes non fuerint. Dico quod, B E, L M portiones applicatarum à ſectionibus ad eaſdem partes interceptæ, ſemper magis dıminuentur, quo magis à verticibus recedunt; efficienturque minores quacumque recta linea propoſita, ſi diametri ſunt congruentes: ſi verò ſunt parallelæ nunquam minores erunt portione ordinatæ inter diametros intercepta. At ſi parallelæ fuerint alicui rectæ lıneæ diuidenti angulum H G I à recta G H, & diametro I G exterioris ſectionis A G contentum, ſemper magis augentur, ſed erunt ſemper minores ea quæ à diametris intercipitur. Vel ſi fuerint parallelæ diametris non congruentibus, ſemper magis augentur, quo magis à concurſu recedunt.

Sit F G latus rectum diametri G I in parabola G B, ordinatim applicatæ B E K, & L M N ſecent diametrum G I in X, Z, & diametrum H K in N, K, & ſecetur abſciſſa G I æqualis H K, & G R æqualis H N; ideoque R I æqualis erit N K, ſeu X Z (propterea quod in parallelogrammo N Z oppoſita latera æqualia ſunt) ducanturque ordinatæ O I, Q R, quæ erunt æquales, & congruentes ipſis E K, M N propter æqualitatem ſectionum, & abſciſſarũ ſimilium diametrorum; ducanturque à punctis E, L, Q rectæ lineæ E S, L T, Q V parallelæ diametris occurrentes ipſis B E, & O I in S, T, V: manifeſtum eſt S M

ex 10. ex 21. huius.





æqua-

æqualem eſſe O V, eo quod in perallelogrammis Q I, & S K latera oppoſita ſunt æqualia, & ipſæ ordinatæ E K O I; nec non M N, Q R æquales oſtenſæ ſunt: Deinde producantur, B E, O I ad ſectionem in C, P; Et quia differentia quadratorum B Z, L X, ſeu T Z, ideſt rectangulum B T C æquale eſt differentiæ rectangulorum Z G F, & X G F ſeu rectangulo ſub abſciſſarum differentia X Z, & latere recto G F. Simili modo rectangulum O V P æquale erit rectangulo ſub abſciſſarum differentia R I, & latere recto G F: ſuntque rectangula contenta ſub X Z, G F, & ſub R I, G F æqualia, propterea quod latera X Z, R I æqualia oſtenſa ſunt, & latus rectum G F eſt commune; igitur rectangula B T C, & O V P æqualia ſunt; ideoque vt T C ad V P, ita reciprocè erit O V ad B T. Et primò quia diametri G Z, H K coincidunt, & parabolæ H D compræhenditur ab A G: erit G Z maior quàm H K, ſeu quàm G I, & B Z maior quàm E K, & L X quàm M N. Si verò B E, L M parallelæ ſunt alicui rectæ lineæ H Y diuidenti angulum G H K; ergo Y Z, ſeu ei æqualis H K, vel G I minor erit, quàm G Z. Eadem ratione G X maior erit, quàm G R; quare ordinatim applicata B Z maior erit, quàm O I, & Z C maior, quàm I P; pariterque L X, ſeu T Z maior erit, quàm Q R, ſeu V I; ideoque T C maior erit, quàm V P: erat autem O V ad B T reciprocè, vt T C ad V P; ergo O V, ſeu ei æqualis S M maior erit, quàm B T: ijs verò addantur æquales L S, T E, quæ in parallelogrammo S T ſunt latera oppoſita, igitur L M, maior erit quàm B E.

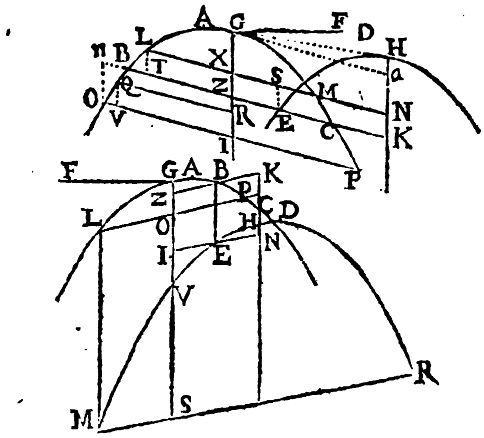
ex 11. lib. 1.

Deinde quando diametri G I, H K ſibi mutuo congruunt ſit b *minor qualibet data recta linea, & à vertice H ducatur H* d *cuius quadratũ æquale ſit rectangulo H G F, & fiat vt* b *ad H* d, *ita H* d *ad aliam rectam lineam æqualem C E; atq; vt H* d *ad ſemiſſem ſũmæ C E, &* b *potentia, ita fiat longitudine H G ad G K, ducaturque B K C ordinatim applicata ad diametrum G I. Quoniam quadratum E K æquale eſt parallelogrammo H K, G F (propterea quod parabolæ ſunt æquales, & diametri ſimiles) & ijs adduntur inter ſe æqualia quadratum* d *H, & rectangulum H G F, erunt duo quadrata E K, &* d *H ſimul ſumpta æqualia rectãgulo K G F, ſeu quadrato B Z; quare differentia quadratorũ B K, & E K, ideſt rectanguli B E C æqualis erit quadrato* d *H; & propterea* d *H media proportionalis eſt inter C E, B E, ſed facta fuit media proportionalis inter C E, &* b; *Ergo B E æqualis eſt* b; *ideoque B E minor eſt qualibet recta linea data. Quando verò diametri G Z, H K ſunt æquidiſtantes, ijſdem poſitis ducatur O* n *parallela diametris ſecans B E in* n. *Quia* n *Z eſt æqualis O I. & erat E K æqualis O I, ergo* n *Z, & E K æquales ſunt, & addita, vel ablata communi Z E erit* n *E æqualis Z K; & propterea qualibet intercepta B E maior erit in ſecundo caſu, & minor in tertio, quàm* n *E, ſeu Z K à diametris comprahenſa.*

11. lib. 1.

Tertio quando B E, L M parallelæ ſunt alicui rectæ G a *diuidenti angulum H G I, erit K* a, *ſeu ei æqualis G Z minor, quàm H K, ſeu quàm G I, atq; vt prius rectangula B T C, & O V P æqualia erunt, & eorum latera reciprocè proportionalia, eſtque S M æqualis minori O V, ergo S M minor erit quàm B T; & additis æqualibus L S, & T E, erit L M minor quàm B E.*

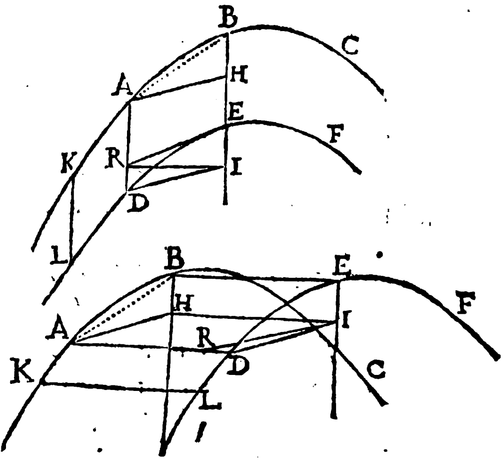
Tandem ſint interceptæ B E, L M parallelæ G V, H C portionibus interceptarum diametrorum non congruentium, & à terminis B, E, L, M, ducantur ad diametros ordinatim applicatæ, eas ſecantes in Z, K, I, N, O, S, & ſectiones in P, & R; & cadat B E inter duas diametros. Quoniam punctum



B cadit inter verticem G, & punctum C eiuſdem parabolæ G C; igitur Z B K ordinatim applicata ad diametrum G I neceſſario ſecabit diametrum G I intra ſectionem in Z, & producta occurret K N extra eandem in K. Non ſecus oſtendetur, quod E N I ordinatim applicatæ ad diametrum H N, punctum N cadit intra, & I extra eandem ſectionem H E, & propterea recta C H minor erit, quàm K N, ſeu B E ei æqualis in parallelogrammo E K; pariterque Z I, ſeu ei æqualis B E minor erit, quàm G V: Cadat poſtea L M extra duas diametros ad eaſdem partes. Quoniam in parallelogrammo L S latera L O, M S æqualia ſunt; eſtque S R maior quàm M S, ſeu quàm O L; ergo (vt in prima parte huius propoſitionis oſtenſum eſt) rectangulum M S R, ſeu rectangulum ſub S V, 11. lib. 1. & latere recto G F maius erit quadrato L O, ſeu rectãgulo O G F, & propterea S V maior erit, quàm O G, & addita communi O V; erit O S, ſeu ei æqualis L M, in parallellogrammo L S, maior quàm G V. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM. Idem omnino verificari in ellipſibus demonſtrari facile poſſet, quod breuitati ſtudens libens omitto.

PROP. 5. Addit. *Si fuerint duæ quælibet coniſectiones A B C, D E F æquales, & ſimiles ad eaſdemque partes cauæ, quarum diametri B H, E I (æquè inclinatæ ad ordinatim ad eas applicatas) æquidiſtantes ſint inter ſe, vel congruentes; & ducantur quælibet rectæ lineæ A D, K L à ſectionibus interceptæ, parallelæ rectæ lineæ B E vertices coniungenti: erunt illæ æquales inter ſe.*

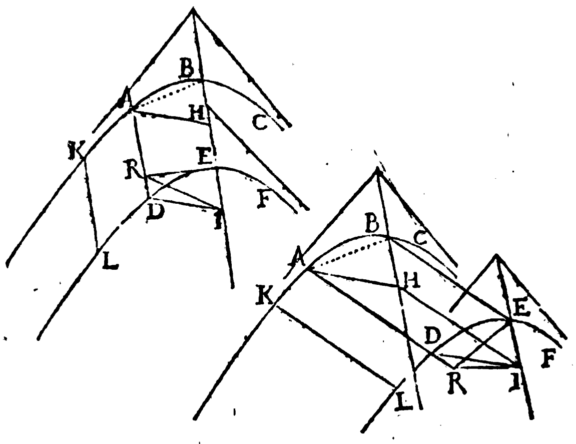


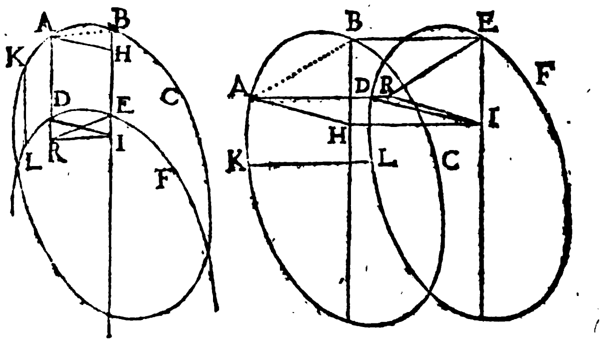
Si enim hoc verum non eſt, ſit A D ſi fieri poteſt maior, aut minor, quàm B E, & ſecetur A R æqualis B E: patet punctum R cadere intra, aut extra ſectionem D E (ſed in eius plano cum ſectiones in eodem plano exiſtant) iunganturque rectæ lineæ A B, E R, quæ æquales erunt, & parallelæ inter ſe, cum ſint coniungentes æqualium, & æquidiſtantium B E, & A R. Poſtea ducatur A H ordinatim applicata ad diametrum B H efficiens abſciſſam H B; ſeceturque abſciſſa E I in altera ſectione æqualis B H; iunganturque H I, I D, & I R. Et quoniam B H,

E I

E I ſunt æquales, & parallelæ; ergo H I æqualis erit, & parallela ipſi B E (vel quia additur communis H E, vel propter parallelogrammum B I) ſed prius A R æqualis erat, & parallela eidem B E; igitur A R, & H I æquales ſunt inter ſe, & æquidiſtantes; ideoque coniungentes A H, R I erunt æquales, & parallelæ; ſuntque anguli A H B, & R I E æquales inter ſe, cum ab æqualibus lateribus in triangulis A B H, & R E I æquilateris inter ſe contineantur; ergo R I ordinatim quoque applicata eſt ad diametrum E I; atque in ſectionibus æqualibus abſciſſæ B H, E I diametrorum ſimilium, ſcilicet æque inclinatarum ad ſuas ordinatas æquales ſunt inter ſe; nec non ordinatæ A H, I R æquales ſunt oſtenſæ; igitur ſicut punctum A in ſectione A B cadit, ita punctum R in ſectione E D exiſtit; ſed poſitus fuit intra, aut extra ipſam, quod eſt abſurdū: Non igitur recta linea A D maior, aut minor eſſe poteſt, quàm B E; ideoque ei quælibet alia intercepta K L æqualis omnino erit. Simili ratiocinio oſtendetur æquidiſtans ipſi B E eidem æqualis; quapropter interceptæ A D, K L, & B E æquales erunt inter ſe: Quod erat oſtendendum.

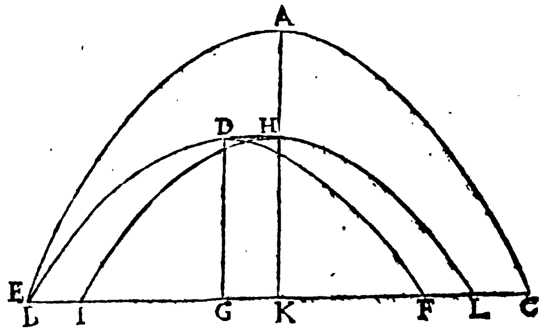
ex 10. huius.





SCHOLIVM.

Si duæ parabolæ B A C, F D E æquales ad eaſdem partes cauæ, conſtitutæ fuerint circa axes A K, D G æquidiſtantes, & non congruentes ſe mutuo ſecabunt.



Ex vertice D axis G D ducatur D H perpendicularis ad axim A K, eum ſecans in H, & deſcribatur alia parabola I H L æqualis prioribus B A, vel E D, cuius axis ſit K H, & vertex H, & ſicuti in propoſitione 4. additarum factum eſt, reperiatur B F C ordinatim ad axes applicata ſecans parabolas in E, B, I, & axes in G, K, ita vt intercepta B I æqualis ſit D H, ſeu G K, quæ in parallelogrammo D K ei æqualis eſt. Quoniã parabolæ E D, & I H æqua-

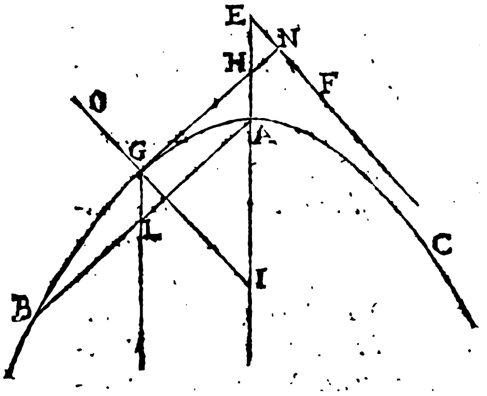
ex prop. 1. huius. les ſunt, & axium abſciſſæ D G, H K æquales cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D K; ergo ordinatim ad axes applicatæ E G, & I K æquales ſunt, & ablata communi I G, erit E I æqualis G K, ſeu D H; erat autem intercepta B I æqualis eidem D H; igitur B I erit æqualis E I; & propterea punctum E Maurol. 27. lib 5. Conic. parabolæ E D F cadet ſuper punctum B parabolæ B A C; ergo duæ parabolæ B A C, & E D F conueniunt in vno puncto, & in eo ſe mutuo tangere non poſſunt; igitur ſe mutuo ſecant. Quare patet propoſitum.

His demonſtratis manifeſtè percipitur, quod ex ſucceſſiua diminutione rectarũ æquidiſtantium, inter coniſectiones interceptarum, deduci non poteſt, coniſectiones magis ad ſe ipſas propius accedere; propterea quod in ijſdem ſectionibus aſymptoticis duci poſſunt interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, quæ ſint omnes æquales inter ſe, nimirum illæ, quæ parallelæ ſunt alicui communi diametro, vel rectæ lineæ vertices earum coniungenti, vt in propoſitione 5. additarũ oſtenſum eſt. Similiter aliæ interceptæ rectæ lineæ, inter ſe æquidiſtantes ſucceſſiuè augentur aliæ verò ſucceſſiuè diminuuntur verſus eaſdem partes, vt in propoſitione 3. & 4. addit. oſtenſum eſt. Et hoc nedũ verificatur in ſectionibus non congruentibus, & aſymptoticis, ſed etiã in duabus æqualibus, & inter ſe ſimilibus ſectionibus ſe mutuo ſecantibus, dummodo earum axes paralleli ſint, in ijs enim interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, tendentes ad eaſdem partes, etiam illæ, quæ proprius ad punctum occurſus ſectionum conicarum accedunt, poſſunt diminui, pariterque inter ſe æquales eſſe, & quod mirum eſt poſſunt ſemper magis augeri. Si igitur æquidiſtantes interceptæ ſunt menſuræ diſtantiarũ duarum ſectionum, eædem coniſectiones cenſeri debent modo parallelæ, & æqualibus interuallis inter ſe diſtantes, modo ad eaſdem partes ſtringi, & coanguſtari, & ſimul dilatari magis, ac magis, quod omnino videtur abſurdum. Non igitur ex eo qnod omnes interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes ſunt æquales inter ſe; propterea ſectiones ipſæ erunt parallelæ, & aſymptoticæ, & ſemper æquali interuallo ad inuicem ſeparatæ; neque ex eo quod prædictæ parallelæ magis augẽtur, vel diminuuntur interualla augeri, vel ſtringi cenſendum eſt.

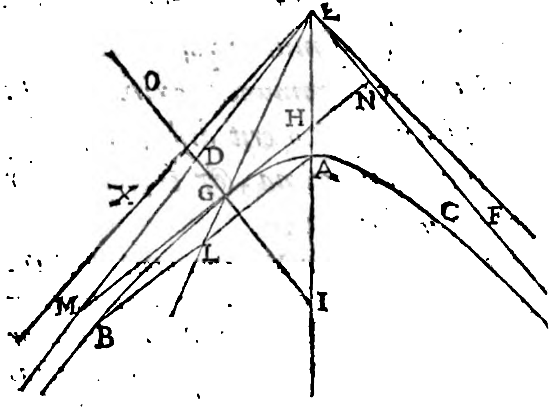
Et præcipuè præſtantiſſimus Gregorius à Sancto Vincentio neſcio an iure demonſtrationem propoſitionis 14. libri 2. ipſiuſmet Apollonij inſufficientem reputauerit, propterea quod Apollonius deduxit rectas lineas hyperbolen comprehendẽtes, quæ aſymptoti vocantur ſemper magis, ac magis ſectioni viciniores fieri ex eo quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtãtes, interceptæ inter rectas aſymptotos vocatas, & hyperbolen contentam ſucceſſiuè ſemper magis, ac magis diminuantur; & è contra aſſeruit cum Cardano, & quodam Rabino Moſe diſtantiam hyperbolæ à rectis aſymptotis ſumi debere, non à quibuſcunque rectis lineis interceptis inter ſe parallelis, ſed tantummodo à rectis lineis perpendicularibus ad aſymptotos, quæ ſolummodo, inquiunt ipſi, diſtantias determinant; at reuera hæc animaduerſio non videtur neceſſaria: perinde enim eſt conſiderare rectas lineas ab hyperbole ad vnam rectam lineam continentium ductas, quæ efficiat cum illa angulos æquales, ac ſi perpendiculares eſſent ad eandem: at quando rectæ lineæ interceptæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, tunc omnes efficiunt ſuper rectam lineam continentem hyperbolen angulos æquales ad eaſdem partes; & propterea (ex inæqualitate prædictarum æquidiſtantium) optimè concluditur cum Apollonio inæqualitas perpendicularium, ſeu diſtantiarum. Quando verò conſiderantur duæ lineæ curuæ veluti ſunt duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ, vel ellipſes, tunc qui-

dem nulla ratione rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, inter curuas interceptæ determinare poſſunt prædictarum curuarum diſtantias; quandoquidem inæqualiter ſemper inclinantur ad quamlibet prædictarum curuarum, & rectæ lineæ interceptæ, quæ ſunt perpendiculares ad vnam ipſarum, non erunt inter ſe æquidiſtantes. Et quia, vt dictum eſt, prædictæ perpendiculares ſunt diſtantiarum legitimæ menſuræ, nunquàm concludi poteſt certo, quod prædictæ ſectiones ſint æquidiſtantes. vel ſibi ipſis ſucceſſiuè viciniores fiant, niſi conſiderentur rectæ lineæ interceptæ ad vnam ſectionum perpendiculares: quod quidem hucuſque quod ſciam factum non eſt, neque forſan huiuſmodi ſpeculatio inuentu facilis erit, aut iniucunda.

In parabola, vel hyperbola A B C ad eius axim E A I ducere ramum breuiſſimum æquidiſtantem alicui rectæ lineæ E F, quæ oportet, vt efficiat cum axi ad partes ſectionis angulum A E F acutum, ſed in hyperbola ſit minor ſemiße vnius recti, & angulus F E X ab vna aſymptoto, & recta linea E F contentus ſit acutus. PROP. 6. Addit.

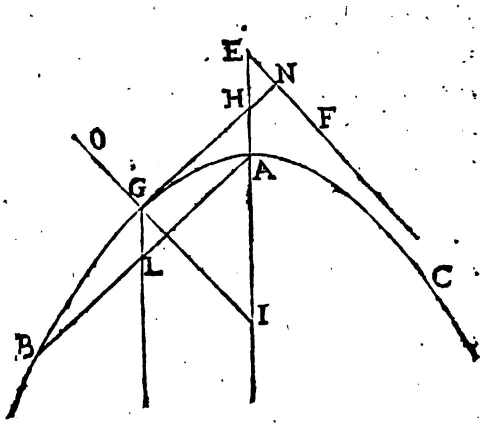


Fiat angulus A E D æqualis angulo A E F, & ex vertice A ducatur recta linea A B efficiens angulum I A B, qui ſimul cum angulo A E F vnum rectum angulũ compleat; ſed in hyperbola, quia vterq; angulus X E A, & A E F deficit à ſemirecto erũt ambo minores ſumma præcedentium, ſcilicet vno angulo recto; ergo ablato cõmuni angulo A E F, erit angulus I A B maior angulo A E X. Poſtea, quia tam A E F, quàm A E D minor eſt ſemiſſe vnius anguli recti, & A E F cum angulo I A B vnum rectum angulum complent; ergo angulus I A B maior erit angulo D E A: & propterea recta linea A B producta neceſſario ſecabit vtramque rectam lineam E D, & E X aſymptotum extra ſectionem cadentem ad partes D, X; ideoque A B hyperbolen ſecabit in aliquo alio puncto B. In parabola verò, quia recta linea A B axim ſecat in vertice A non ad angulos rectos (cum anguli I A B, & A E F rectum compleant) ergo A B ſectioni occurrit in duobus punctis. Secetur iam A B bifariam in L, & per L ducatur diameter ſectionis L G ſectioni occurrens in G, & per G ducatur contingens G H, ſeu parallela A B ſecans axim in H, & per G ducatur I G O perpendicularis ad G H. Dico I G problema efficere. Quoniam pro-



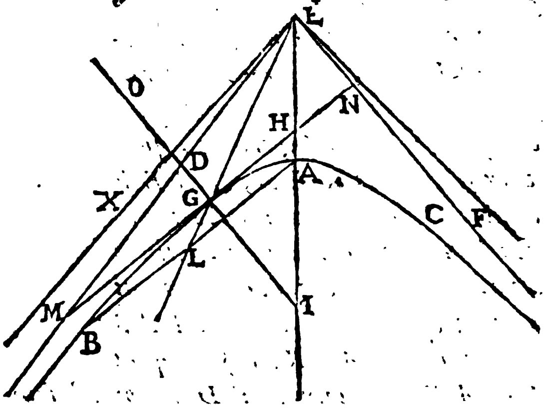
17. 27. lib. 1.

35. 36. lib. 1.
5. lib. 2.

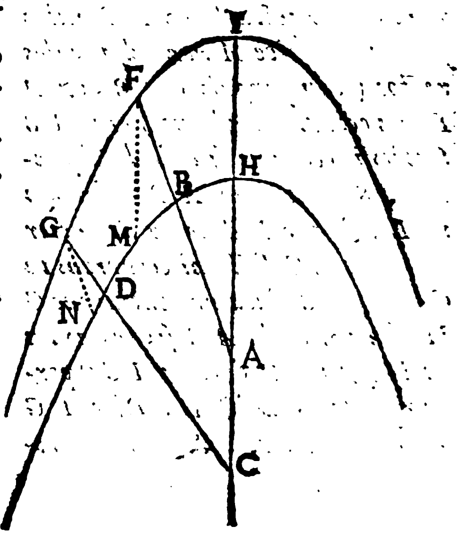


p̀ter parallelas G H, B A, eſt angulus G H A, ſeu E H N aqualis angulo B A I; ſed anguli B A I, & A E F vnicum rectum complent; ergo duo anguli N H E, & N E H ſimul ſumpti vni recto aquales ſunt, & propterea in triangulo E N H reliquus angulus N rectus erit: erat quoque angulus 31. lib. 5. *I G H rectus; igitur I G (qui eſt ramus breuiſſimus cum ſit perpendicularis ad tangentem G H) eſt æquidiſtans recta lineæ E F; quod erat propoſitum.*

SCHOLIVM. *Facile deducitur, quod ſi angulus A E F fuerit rectus in parabola, & non fuerit ſemirecto minor in hyperbole facta eadem conſtructione quilibet ramus breuiſſimus I G æquidiſtans erit rectæ lineæ diuidenti angulũ A E F.*



Nam angulus A I G ab axi, & ramo breuiſſimo contentus eſt acutus, ſed angulus F E A in parabola eſt re- 13. 14. 15. lib. 5. *ctus; ergo recta linea I G parallela eſt alicui recta lineæ diuidenti angulum A E F, in hyperbola verò factus eſt angulus A E D aqualis angulo A E F, qui ſemirecto minor non eſt; propterea erit totus angulus D E F rectus, aut obtuſus; ergo in triangulo E M N externus angulus F N M maior interno, & oppoſito angulo E recto,* 31. lib. 5. *vel obtuſo, erit quoque obtuſus, & angulus I G N rectus eſt; igitur I G, F N ſe viciſſim ſecabunt vltra punctum E, & ideo I G parallela erit recta lineæ diuidenti angulum A E F. Quod erat oſtendendum.*



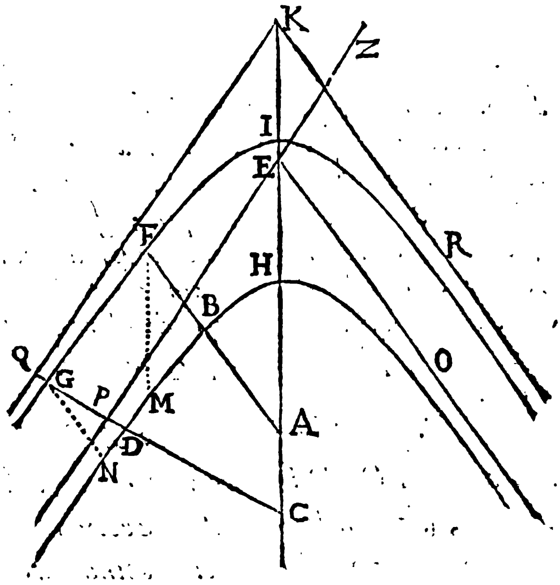
PROP. 7. Addit. *Sint duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ æquales, & ſimiliter poſitæ H B D, & I F G circa communem axim A H I: intercepta axis portio erit diſtantia ſectionum omnium maxima, & ei propinquior remotiore maior erit.*

Sint centra E, & K, asymptoti P E O, Q K R, & à vertice H, & à quibuslibet 8. 9. 10. 30. lib. 5. *punctis interiores ſectionis B D eleuentur lineæ breuiſſimæ, ſeu perpendiculares ad rectas curuam B D contingentes in eiſdem punctis, quæ ſint H A, B A, & D C, quæ ſecent reliquam ſectionem in punctis I, F, & G.*

Manife-

Manifeſtum eſt interceptas I H, F B, G D eſſe minimas linearum rectarum, quæ à punctis I, F, G ad ſectionem B D duci poſſunt; & ideo eædem intercepta erunt diſtantiæ quorunlibet punctorum ſectionis I F G à ſectione B D: & propterea erunt diſtantiæ prædictarum curuarum. Oſtendendum modo eſt H I maiorem eſſe, quàm B F, & B F maiorem, quàm D G, & ſic ſemper. Ducatur à puncto F intercepta recta linea F M parallela axi I H, atque à puncto G ducatur recta linea G N parallela ipſi F B, quæ occurrant ſectioni B D in M, N. Et quoniam F M æquidiſtat vertices coniungenti I H, erit intercepta F M æqualis I H, ſed cum ramus B A ſit breuiſſimus, & eius portio F B erit quoque breuiſſima omnium, quæ ex puncto F ad eandem ſectionem B H duci poſſunt; quare B F minor erit quàm F M, & F M oſtenſa fuit æqualis I H; igitur diſtantia intercepta F B minor erit quàm I H. 38.lib. 5. 5. aiddit. huus. 38. lib. 5.

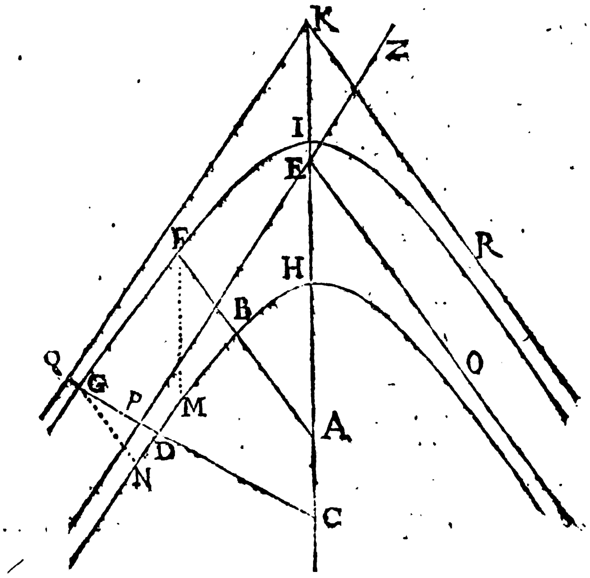
Secundò quia duæ interceptæ B F, N G parallelæ inter ſe productæ occurrunt axi intra ſectiones ad partes A C, & in parabola, quàm ſecabunt in binis punctis, erunt ſaltem ordinatim applicatæ ad aliquàm diametrum: in hyperbolis verò 27. lib. 1.



parallelæ erunt rectæ lineæ diuidenti angulum P E K à recta linea E K centra coniungente, & E P interiore asymptoto contentum; propterea tam in parabolis, quàm in hyperbolis intercepta B F, quæ vlterius tendit ad partes reliquæ asymptoti E O maior erit intercepta N G; ſed quia G D eſt linea breuiſſima omnium, quæ ad ſectienem H D duci poſſunt, cum ſit portio breuiſſimæ D C, quæ perpendicularis eſt ad rectam contingentem in D, igitur G D minor erit, quàm G N; eſtque G N oſtenſa minor, quàm F B; ergo G D minor erit, quàm F B. 3. & 4. addit. 38.lib. 5.

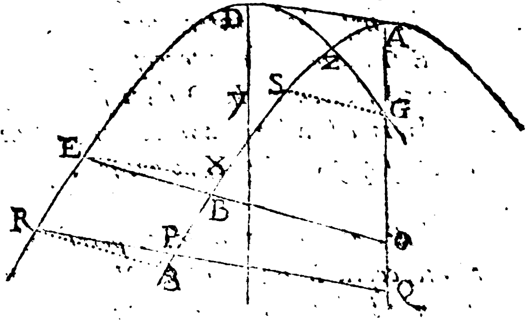
In parabolis autem, quia duci poteſt aliqua recta linea, vt N G parallela cuilibet interceptæ B F; itaut ſit N G minor quacunque recta linea data (quando nimirum ad aliquam diametrum ordinatim ſunt applicatæ, ſcilicet, quando vna ipſarum, puta B F occurrat axi intra ſectiones; quod quidem neceſſario eueniet, quando B A eſt ramus breuiſſimus) eſtque ramus breuiſſimus D G mi- Prop. 4. addit. 27.lib. 1.

nor

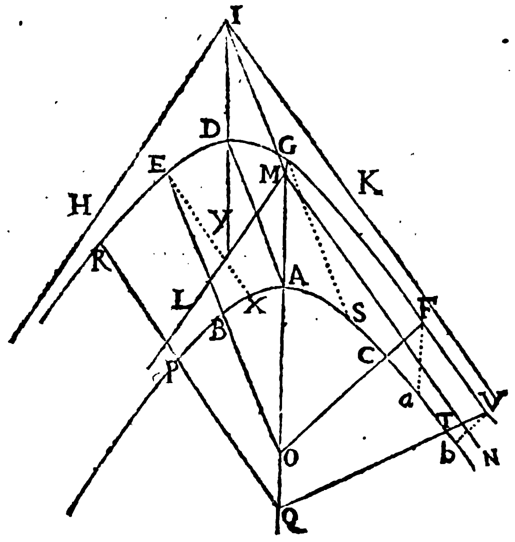


nor eadem G N ; igitur diſtantia ſectionum G D minor erit quacunque recta linea propoſita. Quia verò (vt conſtat ex demonſtratione caſus 2. propoſ. 3. addit. huius) qualibet recta linea G D intercepta inter hyperbolas conueniens cum axi intra ſectiones maior eſt portione eiuſdem rectæ lineæ C D G inter æquidiſtantes asymptotos E P, & K Q intercepta ; igitur interuallum inter duas hyperbolas, licet ſucceſſiuè ſemper magis, ac magis diminuatur, nunquàm tamen minor effici poterit interuallo duarum æquidiſtantium hyperbolas continentium E P, & K Q; Quod quidem eſt perpendiculare ad vtramque rectam continentem E P, & K Q; eſtque prædicta perpendicularis minima omnium interceptarum inter eas.

PROP.8. Addit. *Duarum parabolarum, vel hyperbolarum A B, D E æqualium, & ſimilium, quarum axes A O, D Y, nec non aſymptoti H I K, L M N ſint parallelæ inter ſe, & ſimiliter poſitæ: Sectionum diſtantia maxima parallela erit vertices coniungenti, & ei propinquiores ex vtraq; parte maiores ſunt remotioribus vſq; ad concurſum: ſi verò diſtantiam maximam non habent ſemper augentur quo magis à concurſu recedunt.*



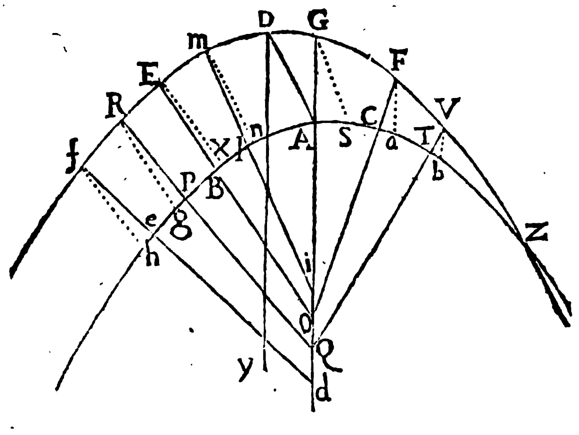
Cadat concurſus ſectionum Z inter axes A G, & D Y, & aſymptoti I K, M N coincidant, aut ſibi ſint viciniores, quàm I H, M L. Et primò angulus Y D A ab axe Y D, & D A vertices coniungente contentus ſemirecto minor non ſit in hyperbola; ſitque rectus in parabola, & vltra concurſum Z, ad partes axis D Y, & aſymptotorum magis diſſitorum H I, L M: ſumantur in compræhenſa ſectione A B qualibet puncta, B, P, à quibus ad axim *ad axim ducantur rami breuiſſimi O B, Q P præter axim A O, & ſecent externam curuam in G, E, R, & occurſui Z, vel communi aſymptoto I M N,* 8.9. & 10. lib. 5.



aut vicinioribus aſymptotis I K, M N ſit A G propinquior, quàm E B, & E B propinquior, quàm R P: Oſtendendum eſt curuarum diſtantiam A G minorem eſſe, quàm B E, & B E, quàm P R. Ducantur interceptæ G S parallela E B, & E X parallela R P. Et quia in parabola angulus T D A rectus ſupponitur, & in hyperbola non eſt minor ſemirecto, ergo quilibet ramus breuiſſimus E B, vel R P æquidiſtans erit rectæ lineæ diuidenti angulum A D T in parabola, & angulum M I H in hyperbola; ſed duarum parallelarum E B, G S, vel R P, E X eſt G S vertici propinquior, vel vlterius tendit ad partes aſymptoti I K, quàm E B; ergo G S minor eſt, quàm E B; eſtque G A minor, quàm G S, quia illa eſt portio, vel productio lineæ breuiſſimæ O A; igitur G A adhuc minor erit

SCHOLIVM. Prop. 6. addit.

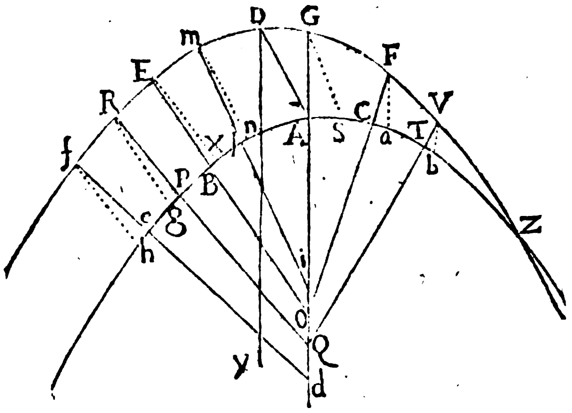
Prop. 3.4. addit. 7. & 38. lib. 5.



quàm E B. Eadem ratione E B minor oſtendetur, quàm R P. Poſtea ſi occurſus Z cadit extra duos axes, inter axim A G, & occurſum aut ad partes aſym-

ptotorum

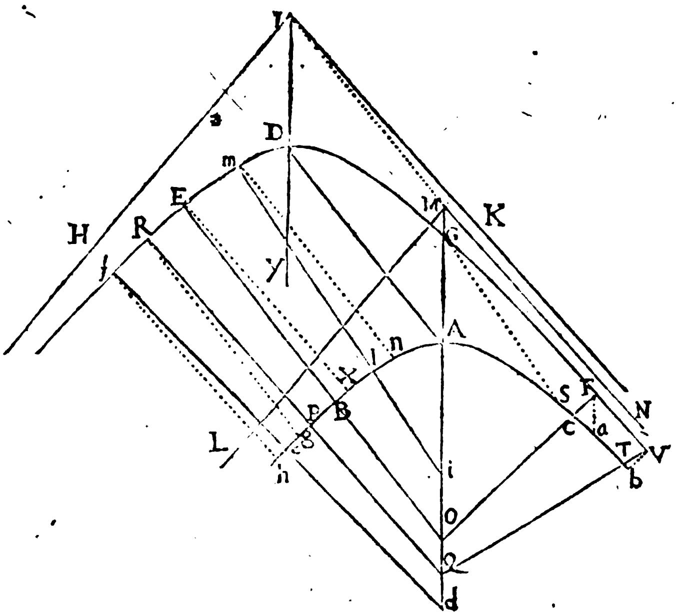
Pratorum coincidentium, vel propinquiorum, ad oppoſitas partes citra axim G A, ſumantur duo puncta C, T, & ab eis ducantur ad axim rami breuiſſimi O C, Q T ſecantq; externam ſectionem in F, V, & ab occurſu, vel communi aſymptoto, vel ab aſymptotis vicinioribus I K, M N magis recedat A G, quàm C F, & C F, quàm T V; Dico G A maiorem eſſe, quàm C F, & C F maiorem, quàm T V. Ducantur interceptæ F a parallela G A, & V b parallela C F.



Poſtr.pars pr. 4. add. huius. Et quia in parabola F a propinquior eſt occurſui ſectionum, & parallela eſt diametro G A; at in hyperbola F a parallela eſt axi G A, vel D Y diuidenti an-
Pars 3. prop. 3. addit. huius. gulum M I H, & F a vlterius tendit ad partes aſymptoti I K, quàm G A; ergo
F a minor eſt, quàm G A: eſtque C F productio rami breuiſſimi minor quàm
F a; ergo A G maior erit, quàm C F. Eodem ratiocinio oſtendetur C F maior,
38. lib. 5. quàm T V.

Secundò angulus Y D A ſit acutus in parabolis, at in hyperbolis minor ſemirecto, & M I H ab aſymptoto I H, & recta linea centra coniungente con-
tentus ſit acutus: Manifeſtum eſt duci poſſe ramum breuiſſimum, vt O B ad ſe-
Propoſ. 6. addit. huius. ctionem interiorem A B, qui parallelus ſit rectæ lineæ D A vertices coniungenti,
vel I M centra coniungenti; & ex vtraque parte ipſius rami O B præter axim
8.9. & 10. lib. 5. A G ducantur quilibet breuiſſimi rami Q P, d e, i l, O C, qui ſecent exter-
nam peripheriam in R, f, m, F. Oſtendendum modò eſt in eiſdem coniſectionibus E B eſſe diſtantiam omnium maximam, & R P propinquiorem maximæ
maiorem eſſe remotiore f e; pariterque m l maiorem eſſe quàm G A. Ducantur
interceptæ R g, m n parallelæ E B, & f h parallela R P, nec non G S paral-
lela m l, & F a parallela G a. Quoniam interceptæ R g, m n parallelæ ſunt
Propoſ. 5. addit. huius. eidem E B, & recta linea D A vertices coniungens, vel I M centra coniungens parallela facta fuit eidem E B; ergo E B, R g, m n erunt omnes inter
38. lib. 5. ſe æquales; eſtque R P minor, quàm R g; pariterque m l minor, quàm m n,
quia illæ ſunt productiones breuiſſimorum ramorum Q P, & i l; igitur quæ-
libet diſtantia R P, vel l m ex vtraque parte ipſius E B ſumpta minor eſt,
quàm E B; ideoque E B erit omnium maxima. Deinde quia O B parallela eſt
A D, vel M I, & rami breuiſſimi O B, Q P ſe ſecant vltra axim A O; ergo
38. lib. 5. recta linea R P Q producta ſecabit quoque reliquam parallelarum D A, vel

I M ad partes O A M ; ideoque intercepta R P , f h *parallelæ erunt alicui*
rectæ lineæ diuidenti angulum D A O ab axe interioris parabola , & vertices
coniungente contentum , vel angulum I M L ab aſymptoto interioris hyperbolæ ,
& centra coniungente contentum ; igitur R P propinquior verticibus , vel vlte-
rius tendens ad partes reliquæ aſymptoti M N maior erit quàm f h *; eſtque* f h 3.4. addit.

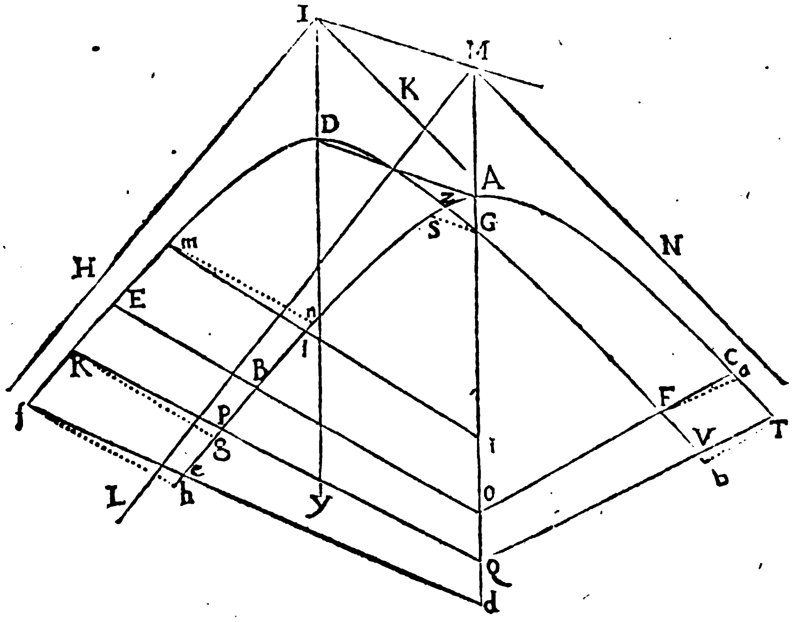


maior f e *quæ eſt productio rami breuiſſimi ; ergo diſtātia R P propinquior maximæ* 38. lib. 5.
E B maior erit , quàm f e. *E contra quia breuiſſimus ramus* i l m *cadit inter*
duas parallelas E B , & D A , & ſecat ramū breuiſſimum E B ad partes O i ; 28. lib. 5.
ergo l m *occurrit A D , vel M I ad partes D , vel I ; ideoque intercepta* m l ,
& ei parallela G S erunt æquidiſtantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum Y
D A , in parabolis , vel H I M in hyperbolis : & propterea G S propinquior ver- 3.4. addit.
tici parabolæ , vel vlterius tendens ad partes reliquæ aſymptoti M N minor
erit , quàm m l *; eſtque G A productio rami breuiſſimi minor quàm G S ; ergo* 38. lib. 5.
m l *maior erit , quàm G A ; & ſic vlterius G A maior erit C F , quando oc-*
curſus Z ſectionum cadit vltra interceptam F C ad partes T V ; vt in prima
parte oſtenſum eſt.

Iiſdem manentibus : dico poſtea , quod vltra diſtantiam maximam E B ad partes R P , diſtantiæ , licet ſemper diminuantur non efficiuntur minores interuallo diametrorum æquidiſtantium D Y , A O in parabolis , vel interuallo aſymptotorum collateralium I H , M L in hyperbolis , vt facile deducitur ex 3. & 4. additarum. At ad partes aſymptotorum congruentium hyperbolæ ad ſe ſe ipſas propius accedunt , interuallo minori quolibet dato : Nam in locum ab hyperbole B A C , & aſymptoto M N contentum extenditur altera hyperbole E D F ; ſed diſtantia hyperbolæ B A C ab aſymptoto M N efficitur minor qualibet data ; igitur diſtantia hyperbolæ D G F comprehenſæ ab hyperbole intercipiente minor erit qualibet data diſtantia.

Tandem

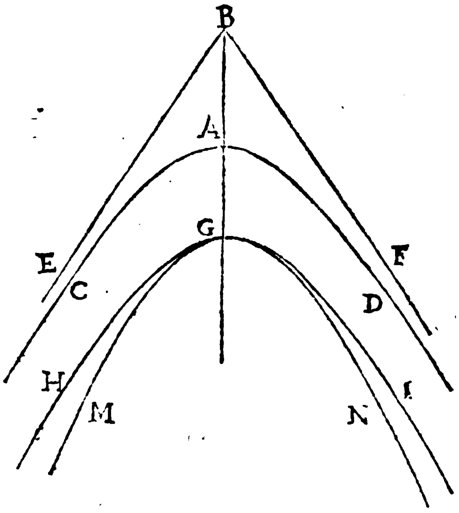
Tandem ijſdem poſitis ducantur ex altera parte concurſus Z rami breuiſſimi O C, Q T, qui efficiant diſtantias F C, T V. Dico F C propinquiorem concurſui Z minorem eſſe, quàm T V. Quoniam angulus Y D A, vel Y I M ſup-



ponitur acutus; ſuntque I D Y, M A O inter ſe, parallelæ; ergo angulus D A O, vel I M O, & multò magis I M N erit obtuſus; ſed quilibet ramus breuiſſimus
13. 14. lib. 5. *Q V T parallelus F a efficit cum axi A O angulũ acutũ; igitur ramus breuiſſimus Q T, & ei parallelus F a ſunt æquidiſtantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O, vel I M N;*
Propoſ. 3. & 4. add. *ideoque F a propinquior concurſui, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti I H minor eſt, quàm T V; eſtque F C minor quàm F a (quia illa eſt portio rami breuiſſimi) ergo F C minor eſt, quàm T V.*
12. lib. 5. *Quod erat propoſitum.*

PROP. 9. Addit.

In duabus hyperbolis C A D, H G I ſimilibus, concentricis, & ſimiliter poſitis circa communem axim B A G, ideſt conſiſtant circa cõmunes asymptotos E B F: Dico ſectionum C A D, H G I interualla ſẽper minui, quo magis ab axis vertice recedunt; atque effici poſſe minora interuallo quolibet dato.



12. huius. & ex 53. lib. 1. *Deſcribatur hyperbole M G N æqualis, ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi*

ipſi C A D circa communem axim A G. Et quoniam hyperbolæ H G I ſemiaxis tranſuerſus B G maior eſt tranſuerſo ſemiaxe B A, hyperboles C A D, pariterquè latus rectum illius maius erit huius latere recto (cum latera figurarum ſint proportionalia in hyperbolis ſimilibus:) igitur hyperbole H G I maior eſt hyperbola M G N (quod ab alijs oſtenſum eſt), & conſiſtunt circa communẽ axim A G, & vertex G eſt communis; igitur hyperbole H G I comprahendit hyperbolen M G N; & ideo hyperbole H G I cadit inter duas hyperbolas G M, & A C: & propterea hyperbole G H multo magis ſucceſſiuè vicinior efficitur hyperbolæ A C, quàm hyperbole G M; ſed duæ hyperbolæ æquales, & ſimiliter poſitæ A C, & G M ſemper magis, ac magis ad inuicem approximantur, igitur multo magis hyperbolæ concentricæ A C, & G H ſemper magis, ac magis ad ſe ſe ipſas appropinquantur, & inter ſe non conuenient vt Pappus demonſtrauit. Tandem, quoniã lineæ breuiſſimæ, quæ perpendicularis eſt ad tangentem hyperbolem G H portio ab asymptoto E B, & ſectione H G comprahenſa effici poteſt minor quacunque recta linea propoſita; cadit verò hyperbole A C inter ſectionem G H, & continentem B E; igitur multo magis diſtantia inter hyperbolas G H, & A C minor erit quacunque recta linea propoſita. Quod erat oſtendendum.

12. huius.

Propoſ. 7. addit.

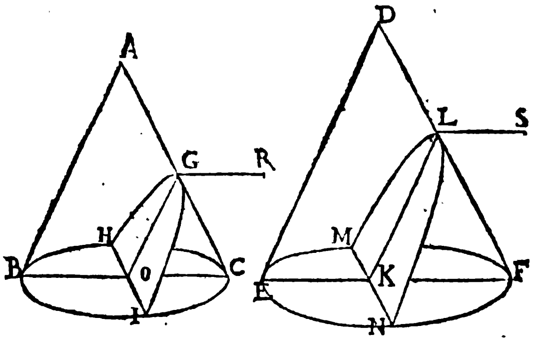
lib. 7. prop. 208.

29. 30. lib. 5.

Propoſ. 4. lib. 2.

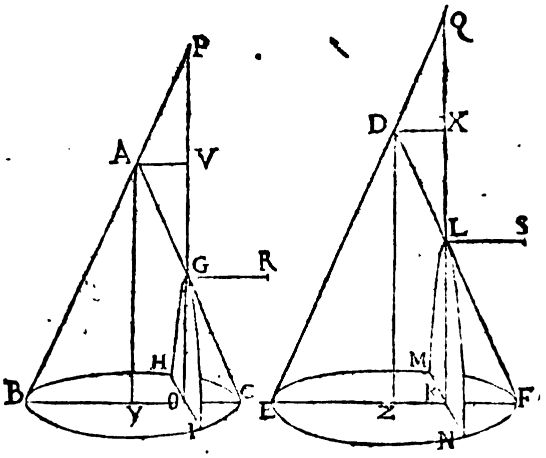
PROP. 10. Add.

Si in duobus conis ducta fuerint duo triangula per axes A B C, D E F ſimilia, & ſimiliter poſita, atq; ſectionum I G H, & N L M diametri G O, L K æque ad baſes inclinatæ intercipiant cũ triangulorum lateribus A B, D E eiſdem G O, L K parallelis, portiones O B, K E æquales; vel cum axibus conorum A Y, D Z diametris æquidiſtantibus intercipiant portiones O Y, K Z æquales, & efficiant angulos A Y C, D Z F æquales: erunt conicæ ſectiones inter ſe æquales, & in qualibet earum duplum interceptæ poterit figuram ſectionis.



Primò in parabolis, quia triangula A B C, D E F ſunt ſimilia, erit B C ad C A vt E F ad F D, & G O, L K ſunt parallelæ homologis A B, D E; ergo O C ad C G, & B O ad G A eandem proportionem habebunt, quàm B C ad C A, ſeu eandem, quàm habet E F ad F D; eſtque E K ad L D vt E F ad F D; ergo B O ad G A eſt vt E K ad L D; ſuntque B O, E K æquales;

igitur G A æqualis eſt L D ; & quia in triangulis ſimilibus rectangulum B A 11. lib. 1.
C ad quadratum B C, ſeu A G ad latus rectum G R eandem proportionem habet; quàm rectangulum E D F ad quadratum E F, ſeu quàm D L habet ad latus rectum L S; igitur A G ad G R erit vt D L ad L S; ſuntq; A G, D L oſtenſæ æquales ergo G R, & L S latera recta æqualia ſunt, & diametri ſectionum efficiunt angulos G O H, L K M æquales; ergo parabolæ H G I, & M L N æquales ſunt inter ſe. Prop 10. huius.



In hyperbolis verò, quoniam P G parallela eſt axi A Y, & A V parallela eſt baſi B C, & latera P B, & A C ſunt communia; igitur P V ad V A eſt vt A Y ad Y B, & G V ad V A eſt vt Y A ad Y C: habet verò eadem A Y ad æquales Y B, Y C eandem rationem ergò P V, & G V ad eandem V A habent eandem proportionem, & ideo P V æqualis eſt V G, atq; punctum V erit centrum ſectionis, & quadratum A Y æquale erit quadrato V O (propter parallelogrammum V Y), & quadratum V O æquale eſt rectangulo P O G cum quadrato V G; pariterque quadratum C Y æquale eſt rectangulo C O B cum quadrato O Y, & habet quadratum A Y ad quadratum C Y eandem proportionem, 21. lib. 1. *quàm latus tranſuerſum P G ad latus rectum G R, ſeu eandem, quàm habet rectangulum P O G ad rectangulum C O B, ergo diuidendo quadratum V G ad quadratũ O Y eandem proportionem habebit, quàm quadratum A Y ad quadratũ Y C, ſeu vt P G ad G R, ſeu vt quadratum P G ad rectangulum P G R, & ideo quadratum duplæ V G, ſeu P G eandem proportionem habebit ad rectangulum P G R, atq; ad quadratum duplæ ipſius Y O; quare quadratum duplæ ipſius O Y æquale erit figuræ ſectionis ſeu rectangulo P G R. Eodem modo oſtendetur X centrum hyperbolæ M L N, & quadratum L Q ad quadratum duplæ K Z eſſe vt quadratum D Z ad quadratum Z F, ſeu vt Q L ad L S, & ideo quadratum duplæ ipſius K Z æquale erit figuræ ſectionis, ſeu rectangulo Q L S. Tandem, quia propter ſimilitudinem triangulorum per axes, ſunt anguli C, F æquales, & anguli Y, Z pariter æquales (cum ex hypotheſi diametri G O, L K parallelæ axibus A Y, D Z efficiant angulos G O C, L K F æquales); ergo A Y ad Y C erit vt D Z ad Z F, & earum quadrata etiam proportionalia erunt; ſed P G ad G R eſt vt quadratum A Y ad quadratum Y C, atque Q L*

ad

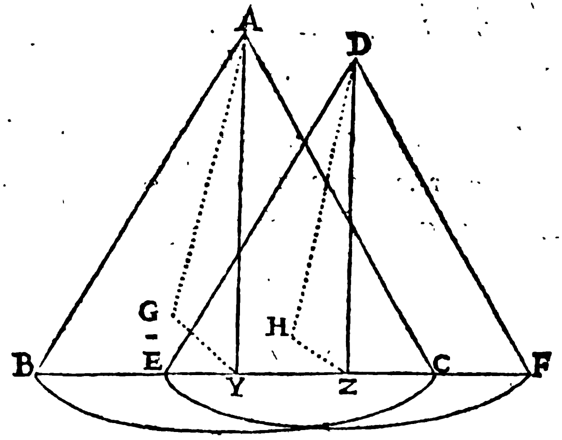
ad L S eſt vt quadratum D Z ad quadratum Z F; igitur P G ad G R eandem proportionem habet, quàm Q L ad L S, & propterea figuræ ſectionem erunt ſimiles; ijs autẽ figuris æqualia oſtenſa ſunt quadrata dupliciũ O Y, & K Z, quæ ſuppoſitæ fuerunt æquales; igitur figuræ P G R, & Q L S ſimiles, & æquales ſunt inter ſe, atque diametri æquæ inclinatæ ſunt ad ordinatim ad eas applicatas H I, M N; igitur ſectiones H G I, M L N æquales ſunt inter ſe, ſimiles, & congruentes, quarum figuræ æquales ſunt quadratis duplicium interceptarum O Y, & K Z, quod erat propoſitum.

ex 12. huius.

Prop. 10. huius.

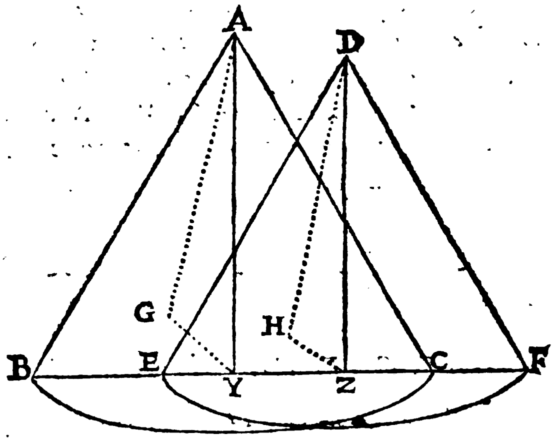
L E M M A IX.

SI in duobus conis A B C, D E F, baſes ſint in eodem plano, & duo triangula per axes A B C, D E F fuerint ſimilia, & ſimiliter poſita, & in eodem plano exiſtentia, erunt coni ſimiles inter ſe.



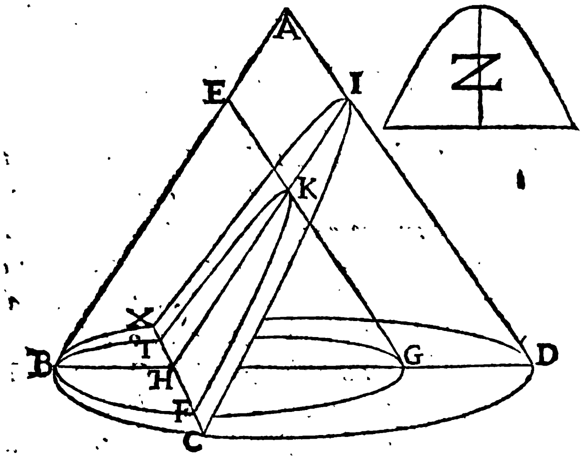
Ducantur à verticibus A, & D duæ rectæ A G, & D H perpendiculares ad baſes conorũ, & à terminis axium A Y, & D Z coniungantur rectæ lineæ Y G, & Z H. Quoniã planum, in quo exiſtunt duo triangula A B C, D E F ſecat planum, in quo baſes conorum iacent in vna recta linea, quæ baſis eſt vtriuſque trianguli per axes conorum ducti; ideoque B C, & E F in directum conſtitutæ erunt, & circa angulos æquales B, & E latera A B ad B C, atque D E ad E F ſunt proportionalia (propter triangulorum A B C, & D E F ſimilitudinem) erunt quoque ad conſequẽtium ſemiſſes proportionales, ſcilicet A B ad B Y erit, vt D E ad E Z circa angulos æquales, & propterea triangula A B Y, & D E Z ſimilia erunt: & ideò duo anguli B Y A, & E Z D, externus interno, æquales erant inter ſe; igitur Y A, & Z D in eodem plano exiſtentes, parallelæ erunt inter ſe; ſunt quoque A G, D H inter ſe parallelæ (cum ſint perpendiculares ad idem planum baſium) ergo duo anguli Y A G, & Z D H æquales ſunt inter ſe; atquè anguli G, & H æquales ſunt, nempe recti; igitur in triangulis A Y G, & D Z H, duo poſtremi anguli A Y G, & D Z H æquales ſunt

inter



inter ſe : hi autem anguli inclinationes ſunt axium conorum ad ſuas baſes; igitur axes A Y , & D Z æque ſunt inclinati ad ſuas baſes : ſuntque proportionales ad baſium ſemidiametros Y B , & Z E (cum triangula A B Y , D E Z ſi-
Defin.8. huius. *milia oſtenſa ſint) ; igitur coni A B C , & D E F ſimiles ſunt inter ſe . Quod erat oſtendendum .*

PROP. 11. Addit. *Data parabola Z duos conos ſimiles exhibere , vt idem planum efficiat in eis duas parabolas æquales eidem datæ parabolæ , quæ aſymptoticæ ſint , & ſibi ipſis viciniores fiant diſtantia minore quacũque data .*



In quolibet plano fiat angulus I H C æqualis angulo inclinationis diametri , & baſis parabolæ Z , & per H C extenſo alio quolibet plano ducatur in eo B H G perpendicularis ad X H C ; & fiat quodlibet triangulum H G K , & vt quadratum H G ad rectangulum H K G , ita fiat latus rectum parabolæ Z ad pro-

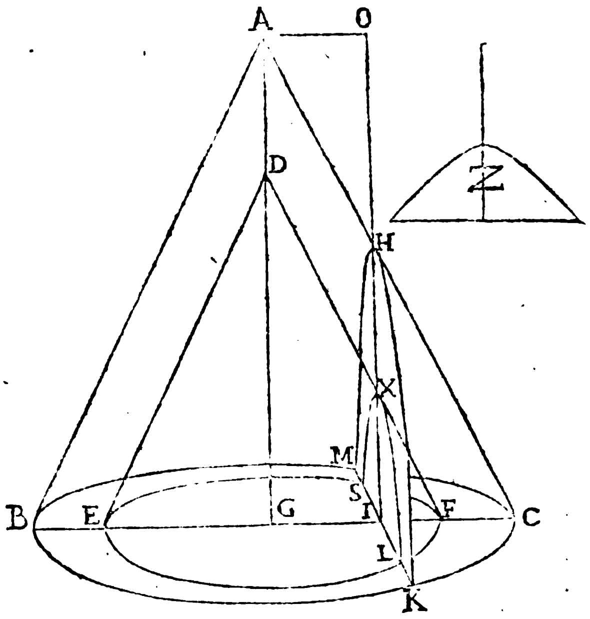
ductionem

ductionem K E, & ab E ducatur A E B parallela I H, quæ ſecet G H in B: poſtea producatur H K, vt cumq; in I, & per I ducatur A I D parallela E G, quæ ſecet B G in D; & in plano B X D C, diametris B G, B D, fiant duo circuli, qui ſint baſes duorum conorum, quorum vertices A, & E, & in eorum ſuperficiebus planum per X I C ductum, efficiat ſectiones C I X, & F K T. Dico eas eſſe parabolas quæſitas. Quoniam recta E G facta eſt parallela ipſi A D; igitur duo triangula A B D, & E B G per axes conorum ducta ſimilia, & ſimiliter poſita in eodem ſunt plano; & duo circuli baſium in eodem ſunt plano; ergo coni A B D, & E B G ſimiles erunt: poſtea quia triangula Lem. 9. huius. *A B D, & E B G ſimilia ſunt, & I K H communis diameter ſectionum ad coincidentes baſes C X, F T æque inclinata, & recta linea A E B à verticibus conorum ducta parallelæ ſunt inter ſe, atque intercipiunt in angulis æqualibus A B H, & E B H communem portionem B H baſium triangulorum ſimilium per axes; ergo parabolæ C I X, & F K T æquales ſunt inter ſe. Secundò, quia* Prop. 10. addit. *propter parallelas E B, K H ſunt triangula E B G, H K G ſimilia; ergo quadratum B G ad rectangulum B E G ſcilicet latus rectum parabolæ F K T ad K* 11. lib. 1. *E eſt, vt quadratum H G ad rectangulum H K G; ſed latus rectum parabolæ Z ad K E fuit vt qtadratum H G ad rectangulum H K G; igitur duo latera recta, parabole Z, atq; parabole F K T ad eandem K E habent eandem proportionem, & propterea æqualia ſunt, & diametri, ad baſes æque inclinatæ ſunt ex conſtructione; igitur parabole F K T, & ei æqualis C I X erit æqua-* Prop. 10. huius. *lis eidem parabolæ Z. Tertiò quia ſectionum plano, & communi diametro I K H æquidiſtat cummune lateris A E B, in quo duo coni ſe ſe contingunt; ergo latus A E B nunquàm occurret plano C I X: ſed duæ ſuperficies conicæ tantummodò ſe ſe tangunt in latere A E B, & reliquis omnibus in locis ſeparatæ ſunt; igitur duæ parabolæ C I X, F K T in illo plano poſitæ per contactum A E B non tranſeunte, & extenſæ in duabus conicis ſuperficiebus nunquàm conuenientibus, erunt asymptoticæ. Quartò quia duæ parabolæ C I X, F K T æquales ſunt, & ſimiliter poſitæ circa communem diametrum I K H; ergo earum di-* Propoſ. 7. addit. *ſtantiæ ſemper magis, ac magis diminuuntur quouſque ſint minores qualibet recta linea data. Quod erat faciendum.*

PRO I. 12. Addi t Data hyperbola Z duos conos ſimiles exhibere, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas æquales, & ſimiles datæ, quæ aſymptoticæ ſint, & ſibi ipſis ſemper viciniores fiant, non tamen interuallo minore recta linea data.

In quolibet plano fiat angulus H I M æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis datæ hyperboles Z, & per M I extenſo quolibet alio plano ducatur in eo B I C perpendicularis ad M I K; & ſumpto quolibet puncto O in recta linea I H producta, ducatur à puncto O in plano per O I B extenſo recta linea O A parallela ipſi B I, & ſecetur O A æqualis ſemiſſi potentis figuram ſectionis Z, cuius rectum latus ad tranſuerſum eandem proportionem habeat quàm quadratum A O ad quadratum O H; atque à puncto A ducatur recta linea A D G parallela ipſi H I, & coniungatur A H, quæ ſecent rectam lineam G I in punctis G; & C, & ſecetur recta linea G B æqualis G C iungaturq; A B, & à quolibet puncto D in recta A G ſumpto ducatur in eodem plano A B C duæ rectæ lineæ D E, & D F parallelæ lateribus A B, & A C; eruntque triangula

A B C,



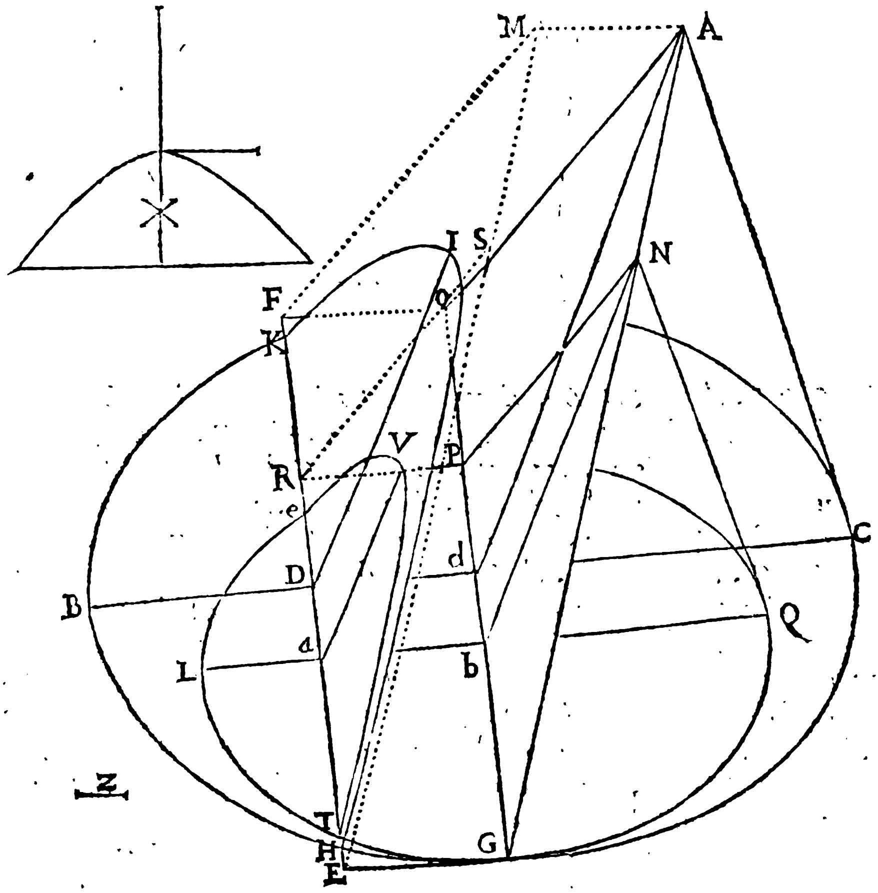
A B C, & D E E ſimilia, & ſimiliter poſita: poſtea in plano per B C, M K
ducto, diametris B C, & E F, fiant duo circuli B K C, E L F, qui ſint baſes
duorum conorum, quorum vertices ſint A, & D, & in eorum ſuperficiebus
planum per H I, M K ductum efficiat ſectiones K H M, & L X S: Dico
eas eſſe quæſitas. Quoniam duo triangula A B C, D E F ſimilia, & ſimiliter
poſita in eodem ſunt plano, pariterquè duo circuli baſium in vno plano exiſtunt;
Lem. 9. huius. *ergo duo coni A B C, & D E F ſimiles erunt; poſtea quia triangula A B C,*
& D E F ſimilia ſunt, & communis ſectionum diameter H X I æque inclinatur
ad coincidentes baſes M K, S L, & axi communi A D G æquidiſtat, &
Prop. 10. add. *in angulis æqualibus intercipiunt G I communem portionem baſium triangulorum*
ſimilium per axes; igitur hyperbolæ K H M, & L X S æquales ſunt, & ſimiles
inter ſe, & earum figuris æqualia ſunt quadrata ex dupla interceptæ G I
deſcripta. Secundò quia (propter parallelas A O, & B C.) triangula H O A,
& A G C ſimilia ſunt; igitur quadratum A G ad quadratum G C, ſeu ad rectangulum
B G C eandem proportionem habebit, quàm quadratum H O ad quadratum
O A, ſeu quàm latus tranſuerſum ad rectum figuræ Z; ſed vt quadratum
12. lib. 1. *A G ad rectangulum B G C, ita eſt latus tranſuerſum ad rectum hyperboles*
K H M; igitur duæ hyperbolæ Z, & K H M, habent figurarum latera
porportionalia; ſuntq; prædictæ figuræ æquales cum ſint æquales quadratis ex duplis
ipſarum A O, & interceptæ G I: quæ ſunt æquales in parallelogrammo G
10. 12. huus. *O, & habent angulos à diametris, & baſibus contenti, æquales inter ſe: erunt*
hyperbolæ K H M, & Z æquales, & ſimiles inter ſe: & propterea ſectio L X S,
quæ ſimilis, & æqualis oſtenſa eſt ipſi K H M, erit quoque æqualis, & ſimilis
eidem ſectioni Z. Tertiò, quia in duobus conis ſimilibus, & ſimiliter poſitis
circa communem axim A D G, ſuperficies nunquàm conueniunt, propterea
quod latera A B, & D E, à quibus generantur in tota reuolutione inter ſe
parallela.

parallela conſeruantur ; igitur duæ ſectiones K H M , & L X S , exiſtentes in eodem plano ſecante duas ſuperficies, quæ licet in infinitum producantur vbique ſeparatæ ſunt , erunt aſymptoticæ. Quartò, quia duæ hyperbolæ H K M , & L X S ſunt æquales , ſimiles, & ſimiliter poſitæ circa communem diametrum H X I, earum diſtantiæ ſemper magis , ac magis diminuuntur ; nunquam tamen minores effici poſſunt interuallo duarum æquidiſtantium, hyperbolas continentium. Et hoc erat propoſitum.

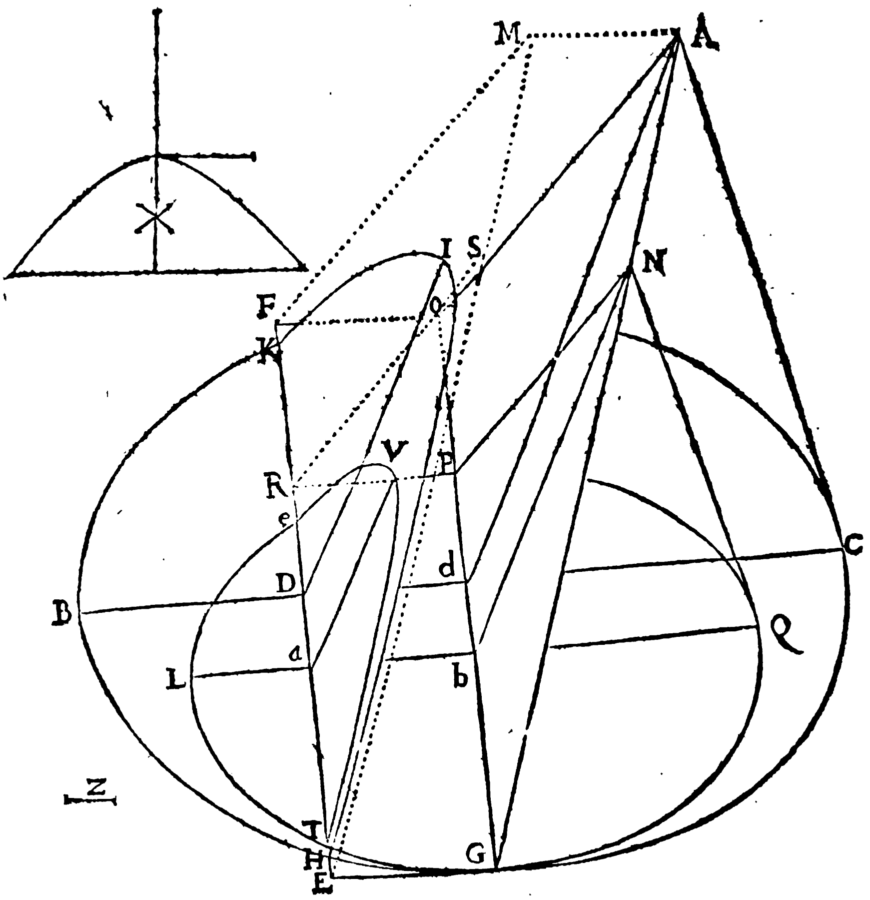
Prop. 7. addit.

PROP. 13. Addit.

Data hyperbola X duos conos ſimiles exhibere vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas ſimiles, & æquales datæ, quæ aſymptoticæ ſint, & ex vna parte ſibi ipſis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato : ex altera verò parte ad ſe ipſas propius accedant interuallo tamen maiore dato : oportet autem vt angulus ab aſymptotis ſectionis X contentus ſit acutus.



In quolibet plano fiat angulus A d *O æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ X ; & per O* d *extenſo quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad O* d *G, & ſumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea G O in plano per B G C O ducto , centris* d, *&* b *deſcribantur duo*



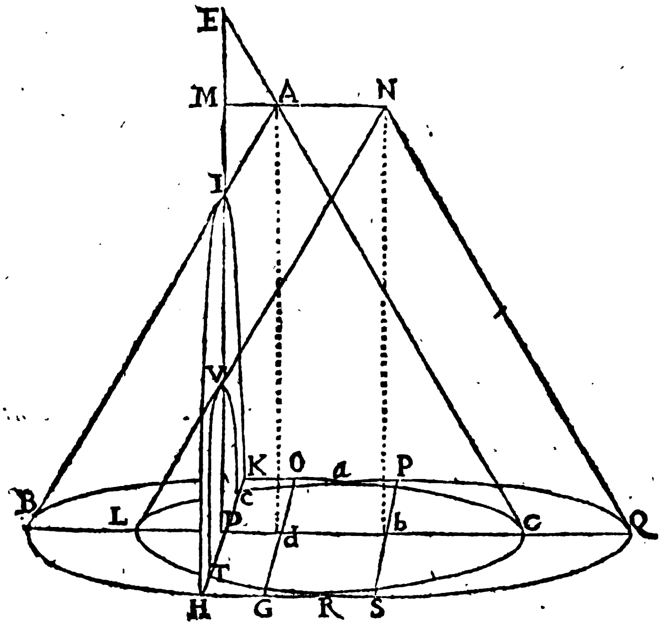
circuli G C O B, & G Q P L ſe ſe contingentes in communi puncto G recta linea G O ducaturque diameter L b Q æquidiſtans ipſi B C: & vt latus rectum ad tranſuerſum ſectionis X, ita fiat quadratum G d ad quadratum d A; & coniungantur recta linea A G, & A O, ducaturque ex puncto P recta linea P N parallela ipſi O A occurrens G A in N, atque A, & N fiant vertices duorum conorum A B C, & N L Q, & ſecetur D d æqualis ſemiſſi potentis figuram ſectionis X; ducaturque per punctum D planum E M F æquidiſtans plano communi A G O per axes ducto, efficiens in conicis ſuperficiebus ſectiones H I K, & T V c; Dico eas eſſe hyperbolas quæſitas. Quoniam propter parallelas A O, N P eſt A G ad G O, vt N G ad G P, & ad ſemiſſes conſequentium, ſcilicet A G ad G d, atque N G ad G b proportionales erunt, ideoque A d, N b erunt parallela, & A d ad d G, ſeu ad d C eſt vt N b ad b G, ſeu ad b Q; eſtque d C etiam parallela b Q; ergo plana A B C, & N L Q parallela ſunt, & anguli A d C, & N b Q æquales ſunt, atque triangula A d C, & N b Q ſimilia erunt inter ſe; ideoque circa angulos æquales C, & Q erit A C ad C d, vt N Q ad Q b, & ad conſequentium duplas, ſcilicet A C ad C B, atq; N Q ad Q L proportionales erunt; & propterea triangula A B C, & N L Q ſimilia erunt, & ſimiliter poſita, & inter ſe parallela; ergo efficient in duobus planis A O G, & II E F inter ſe æquidiſtantibus ſectionũ diametros I D, & V a parallelas conorũ axibus A d, & N b, & inter ſe; quare conſtituent cum ſectionũ baſibus

coinci-

coincidentibus angulos æquales I D H, & V a T & cum ipſis D d, & a b etiã
parallelis inter ſe continebunt angulos æquales I D d, & V a b, eruntque
interceptæ D d, a b æquales (cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D b);
igitur hyperbole H I K, & T V e æquales ſunt inter ſe, & ſimiles atq; earum Prop. 10. addit. huius.
figuris æqualia ſunt quadrata ex duplis interceptarum D d, & a b. Et quia
triangula A G O, N G P ſunt ſimilia in eodem plano, ſuntque pariter duo
circuli baſium in vno plano extenſi; igitur coni A B C, & N L Q ſimiles ſunt Lem. 9. huius.
inter ſe. Secundò quia vt quadratum A d ad rectangulum G d O, ſeu ad
rectangulum B d C ita eſt latus tranſuerſum ad rectum ſectionis H I K, & (ex
conſtructione) in eadem proportione erat latus tranſuerſum ad rectum
hyperboles X, atque anguli I D K, & A d O æquales ſunt inter ſe (propterea quod
D I, d A parallelæ ſunt, pariterque D K, d O parallelæ ſunt inter ſe, cum
communes ſectiones ſint plani baſis, & duorum planorum æquidiſtantium K I
H, & O A G): & erat angulus inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ X
æqualis angulo A d O; igitur diametri ſectionum X, & H I K ad ſuas baſes
æque inclinantur, & habebant latera earundem figurarum proportionalia; ſuntq;
prædictæ figuræ æquales, cum ſint æquales quadrato ex dupla interceptæ D d vt
dictum eſt: igitur ſectiones H I K, & X ſimiles ſunt inter ſe, & æquales; 10. 12. huius.
ideoque reliqua ſectio T V d, quæ æqualis, & congruens oſtenſa eſt ipſi H I K,
erit quoque ſimilis, & æqualis eidem hyperbolæ X. Tertiò quoniam plana H I
K, & G A O æquidiſtantia ſunt, nunquam conuenient; & ideo planum H I K
nunquam lateri A N G alterius plani occurret; ſed ſuperficies conicæ ſe ſe
tantummodo tangunt in communi latere A N G, & alibi perpetuo ſeparatæ incedunt;
igitur duæ ſectiones H I K, & T V e in plano E I K exiſtentes, quæ infinitè
producuntur in ſuperficiebus conicis, nunquam ſe ſe mutuo ſecant; igitur
ſectiones ipſæ aſymptoticæ ſunt. Quartò ducantur rectæ lineæ G E, O F, P R
tangentes circulos in extremitatibus communis diametri G P O, quæ parallelæ erunt
inter ſe (cum perpendiculares ſint ad communem diametrum G P O): poſtea
producantur plana E G A, F O A, R P N tangentia conos in lateribus G A,
O A, & P N, & extendantur quouſque ſecent planum conicæ ſectionis H I K in
rectis lineis E S M, F M, R S. Et quoniam duo plana æquidiſtantia G A O,
et E M F efficiunt in eodem plano E G A, vtrumque conum contingente, duas
rectas lineas G A, E M æquidiſtantes inter ſe: pari ratione in plano tangente
F O A erunt rectæ lineæ F M, et O A parallelæ inter ſe: ſimili modo in plano
R P N erunt P N, et R S inter ſe æquidiſtantes, cumque A O, et N P
parallelæ ſint, erunt quoque F M, et R S inter ſe æquidiſtantes; ſuntque E M, et
M F aſymptoti continentes hyperbolen E I K pariterq; rectæ lineæ E S, S R ſunt Maurol. lib. 3. de lin. horar. ca. 6. 7.
aſymptoti hyperboles T V e: quare duæ hyperbolæ H I K, et T V e, ſimiles
eidem X, et æquales, & ſimiliter poſitæ, quarum duæ aſymptoti F M, R S
æquidiſtantes ſunt; reliquæ verò E M, & E S coincidunt (cum exiſtant in eodem
plano tangente E A), & angulus ab eis contentus E M F, vel E S R eſt
acutus (cum æqualis ſit acuto angulo ab aſymptotis ſectionis X contento, propter
ſimilitudinẽ ſectionũ, vt ab alijs oſtenſum eſt): poterit ergo duci ramus breuiſſimus Propoſ. 6. addit. huius.
in ſectione T V e ad partes V e qui æquidiſtãs ſit rectæ lineæ V I vertices ſectionũ
coniungenti: eritque illius breuiſſimæ portio inter ſectiones comprehenſa diſtantia
omniũ maxima; & propterea interualla ſectionũ ad vtraſq; partes maxima Propoſ. 8. addit. huius.
diſtãtia ſucceſſiuè diminuuntur, & ad partes æquidiſtantiũ aſymptotorũ F M, R S diminuuntur

nuuntur quidem ; ſed non efficiuntur minora interuallo quo parallelæ asymptoti diſtant inter ſe ; ex altera verò parte perueniri poteſt ad interuallum minus quolibet dato. Et hoc erat faciendum.

PROP. 14. Add. *Data hyperbola eadem X præcedentis propoſitionis deſcribere duos ſimiles conos, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas ſimiles datæ ſectioni, quæ asymptoticæ ſint, & ex vtraque parte ſibi ipſis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato.*



In quolibet plano fiat angulus A d *G æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ datæ X, & per G* d *extenſo quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad G* d *O, & ſumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea B C in plano per B G O extenſo, centris* d, *&* b, *deſcribātur duo circuli inter ſe æquales G C O B, & S Q P L ſe ſe ſecantes in duobus punctis R,* a: *atq; vt latus rectum ad tranſuerſum ſectionis datæ X, ita fiat quadratū G* d *ad quadratū* d *A, & ducatur recta linea A N M parallela ipſi B C, quæ ſecet* b *N æquidiſtantē* d *A in N, & coniungantur rectæ lineæ A B, A C, N L, N Q, & fiant A, & N vertices duorū conorū A B C, N L Q, & in eorū ſuperficiebus planum M* c *T æquidiſtans planis A G O, & N S P efficiat ſectiones H I K, & T V* c, *quarum diametri D V I genitæ à triangulis A B C, & N L Q per axes in eodem plano exiſtentibus ſunt æquidiſtantes axibus conorum A* d, *N* b, *propter planorum æquidiſtantiam: Dico, eas eſſe hyperbolas quæſitas. Quoniam (propter æquidiſtantiam oppoſitarum linearum) eſt ſpatium A* b *parallelogrammum; igitur conorum axes A* d, *N* b *æquales ſunt inter ſe, & æquè inclinantur ad communem rectam lineam B C Q (propter æquidiſtantiam earundem A* d, *N* b*); ſuntque æqualium circulorum radij* d *B,* d *C,* b *L,* b *Q æquales inter ſe; igitur triangula A B C, N L Q ſimilia ſunt inter ſe, & ſimiliter*

ter poſita in eodem plano; ſuntquè etiam duo circuli baſium in vno plano extenſi; igitur coni A B C, & N L Q ſimiles ſunt inter ſe; & quoniam, vt latus tranſuerſum ad rectum ſectionis datæ X, ita eſt quadratum A d *ad quadratum radij G* d, *& ita eſt latus tranſuerſum ad rectum ſectionis H I K; pariterquè vt quadratum N* b *ad quadratum radij L* b *ita eſt latus tranſuerſum ad rectū hyperbolæ T V* c; *Et quadrata axium ad quadrata radiorum baſeos eandem proportionem habet ideo latus tranſuerſum ad rectum ſectionis H I K eandem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum alterius ſectionis T V* c, *ſeu eandem, quàm habet latus tranſuerſum ad rectum datæ ſectionis X; atque diametri I V D, & diameter ſectionis X æquè inclinantur ad baſes, vt dictum eſt; igitur duæ ſectiones H I K, & T V* c, *nedum datæ hyperbolæ X; ſed etiam inter ſe ſimiles ſunt. Secundò quoniam duæ peripheriæ circulorum baſium circa communem diametrum B C Q ſe ſe mutuo ſecant in duobus punctis R, &* a, *quæ neceſſario cadunt inter duas circulorum diametros G O, S P perpendiculares ad communem diametrum B C Q; igitur ſuperficies conorum viciſſim ſe ſecant ſemper inter duo triangula, per conorum axes A G O, & N S P, in reliquis autem locis ſeparatæ ſunt; planum verò efficiens ſectiones H I K, T V* c *cadit nō inter axes A* d, *& N* b; *igitur duæ ſectiones H I K, & T V* c *exiſtentes in duabus conicis ſuperficiebus, non ſe ſecantibus, nunquàm conuenient, & aſymptoticæ erunt. Tertiò quoniam recta linea N A M per vertices conorum ducta parallela eſt communi baſi B Q triangulorum per axes, & ſecat diametrum communem D V I in M: ergo (ſicuti oſtenſum eſt in prop.* 10. *addit. huius) erit punctum M centrum ſectionis H I K, atq; centrum alterius ſectionis T V* c; *ergo duæ ſectiones H I K, & T V* c *ſimiles ſunt inter ſe, concentricæ, & ſimiliter poſitæ circa communem diametrum D V I; igitur ſectionum interualla ſemper magis, ac magis in infinitum minuuntur, & reperiri poſſunt minora quolibet interuallo dato. Et hoc erat oſtendendum.*

Lem. 9. huius.

Prop. 12. huius.

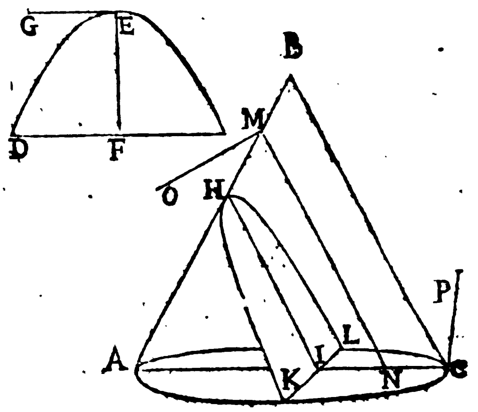
Propoſ. 9. addit. huius.

SECTIO DECIMA

Continens Propoſit. XXVI. XXVII. & XXVIII.

PROPOSITIO XXVI.

IN cono recto, cuius triangulum per axim ſit A B C reperire ſectionem datæ parabolæ D E æqualem, cuius axis E F, & erectum E G.



Vt quadratum A C ad C B in B A, ita ponatur E G ad B H: & educamus H I parallelam B C, & extendatur per H I planum eleuatum ſuper triangulum A B C ad angulos rectos efficiens in cono ſectionem K H L. Dico eam æqualem eſſe ſectioni D E. Quia quadratum A C ad C B in B A eſt, vt E G ad B H; ergo potentes eductæ ad axim H I in ſectione a
K H L poſſunt applicata contenta ab abſciſſis illarum potentium, & ab E G; quare E G erit erectum ſectionis K H, & idem etiam eſt erectum ſectionis D E; ergo duo erecta duarum ſectionum ſunt æqualia, & propterea ſectiones æquales ſunt (1. ex 6.)

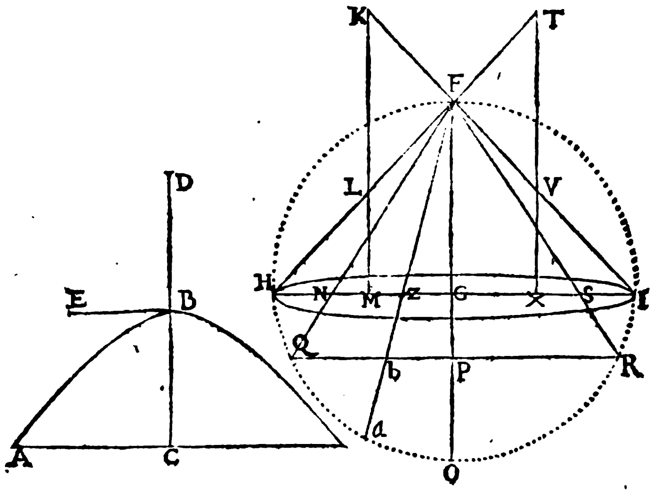
Et dico, quod in cono A B C reperiri non poteſt ſectio alia parabolica, b
cuius vertex ſit ſuper A B, quæ eidem D E ſit æqualis. Si enim hoc eſt poſſibile, ſit axis illius ſectionis M N, qui quidem cadet in triangulo A B C; quia conus eſt rectus, & erectum illius ſit M O; atq; M O ad M B erit, vt G E ad B H; eſtque B H maior, quàm B M; ergo M O
ex conu. Prop. 1. huius. minor eſt, quàm G E; quare ſectio, cuius axis eſt M N non eſt æqualis ſectioni D E; & tamen ſuppoſita fuit æqualis illi, quod eſt abſurdum. Quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XXVII.

SIt deinde hyperbole A B, cuius axis C D, inclinatus B a
D, & erectus B E; atque quadratum axis F G dati coni recti F H I ad quadratum G H ſemidiametri baſis eius, non habeat maiorem proportionem, quàm habet figura, ſcilicet quàm habet D B ad B E.

Sit prius proportio eadem, & producamus I F ad K; & ducamus K L ſubtendentem angulum H F K, quæ parallela ſit ipſi F G, & æqualis exiſtat ipſi D B; & per K L planum extendatur eleuatum ad angulos rectos ſuper planum trianguli H F I, quod efficiet in ſuperficie conica ſectionem hyperbolicam, cuius axis erit L M, & inclinatus K L. Et quia
12. lib. 1. F G parallela eſt K L, erit quadratum F G ad G I in G H, vt K L inclinatus ad illius erectum, ſiue vt D B ad B E; facta autem fuit K L æqualis
2. huius. D B; ergo erectus inclinati K L æqualis eſt B E; & propterea ſectio, b
cuius axis eſt L M æqualis eſt ſectioni A B. Nec reperiri poterit in cono H F I alia ſectio hyperbolica, cuius vertex ſit ſuper H F, quæ æqualis ſit A B; quia, ſi reperiri poſſet eſſet illius axis in plano trianguli H F I, & eius inclinatus, ſubtendens angulum H F K æqualis eſſet D B, nec tamen eſſet K L, nequè ipſi æquidiſtans (eo quod, ſi æquidiſtaret

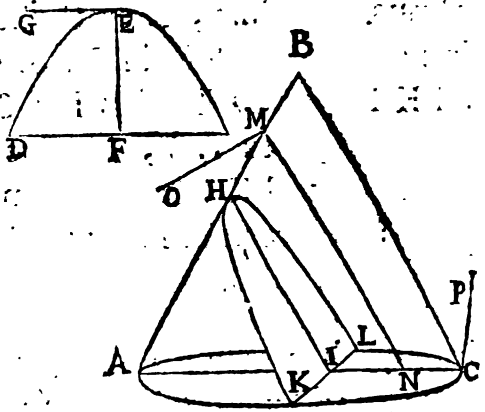
ipſi



ipſi K L, non eſſet eidem æqualis.) His poſitis ſi educatur ex F linea ipſi
parallela cadet inter F G, F H, aut inter F I, F G; ſitque F N; igitur 12. lib. 1.
quadratum F N ad I N in N H eſt, vt D B ad B E: quod eſt abſurdum;
quia quadratum F N maius eſt, quàm quadratum F G, & N H in N I
minus eſt, quàm quadratum G H.

Poſtea habeat quadratum F G ad quadratum G H minorem propor-
tionem quàm habet D B ad B E; & circumſcribamus circa triangulum
H F I circulum; & producamus F G quouſque occurrat circuli circum-
ferentię in O; ergo quadratum F G ad quadratum G H, nempe ad F G
in G O habet minorem proportionem, quàm D B ad B E: & ponamus
F G ad G P, vt D B ad B E; & per P ducamus P Q parallellam H I;
& coniungamus F R, F Q; quæ occurrant H I in S, N: quare D B ad
B E eſt, vt F G ad G P, quæ eſt, vt F N ad N Q; nempe vt quadra-
tum F N ad F N in N Q æquale ipſi I N in N H, atque vt quadra-
tum F S ad F S in S R, nempe vt quadratum F S ad I S in S H; & edu-
c camus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos H F K, I F T, & ſint
d parallelæ ipſis F N, & F S, & æquales ipſi D B; igitur duo plana per K
L, T V extenſa ſuper triangulum H F I ad angulos rectos eleuata, pro-
ducunt in cono H F I ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X,
& inclinati ipſarum L K, T V, & ſinguli earum ad ſuos erectos eandem
proportionem habent, quàm D B ad B E, & propterea figuræ ſectionum
ſimiles ſunt, & æquales, ideoque ſectiones, quarum axes ſunt L M, V 2. huius.
X ſunt æquales ſectioni A B.

e Nec reperitur ſectio præter iam dictas, cuius vertex ſit ſuper aliquam
duarum linearum H F, F I, & ſit æqualis ſectioni A B. Quia ſi reperiri
poſſet, caderet eius axis in planum trianguli H F I, illiuſque axi educa-
tur parallela F Z *a*, quæ non cadet ſuper F R, neque ſuper F Q, eritq;
quadratum F Z ad I Z in Z H, quod eſt æquale ipſi F Z in Z *a*, nempe
F Z ad Z *a* eandem proportionem haberet, quàm D B ad B E; ſed D
B ad B E eſt, vt F G ad G P, nempe F Z ad Z *b*; ergo proportio F Z
ad



contentum, habet eandē rationem, quam G E ad H B, ſufficienter deducitur, quod 11. lib. 1. *G E ſit latus rectum tam parabolæ L H K, quàm D E; & ideo erit parabole L* Propoſ. 1. huius. *H æqualis D E. Non igitur neceſſe eſt, vt rectangula ſub abſciſſis, & lateribus rectis æqualibus oſtendatur æqualia inter ſe, & inde eliciatur æqualitas, & congruentia ſectionum. Quapropter caſu illa verba in Codice Arabico irrepſiſſe puto:*

[b] Et dico, quod non reperiatur in ſectione A B C alia ſectio parabolica; b quia ſi reperiretur, &c. *Verba, quæ in hoc textu addidi ex ſerie demonſtrationis facile colliguntur: Sed animaduertendum eſt, quod ne dum in cono recto, ſed in quolibet cono ſcaleno quomodolibet per axim ſecetur triangulo A B C, deſignari poteſt in eius ſuperficie parabole æqualis datæ D E.*

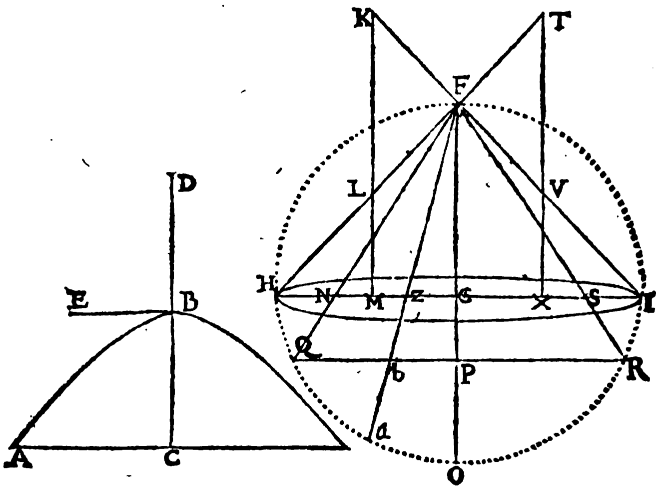
Ducatur C P contingens circulum baſis in C, & in parabola D E ducatur 51. lib. 2. *diameter E F, & contingens verticalis, quæ contineat angulum F E G æqualem angulo B C P; ſitque G E latus rectum diametri F E; atque vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ita fiat G E ad H B, & per H extendatur planum L H K æquidiſtans plano per B C P ducto. Dico ſectionem L H K eſſe parabolen quæſitam. Quia plana æquidiſtantia L H K, & B C P efficiunt in circulo baſis rectas P C, L K inter ſe parallelas, & in plano A B C efficiunt rectas H I, B C inter ſe parallelas; ergo anguli B C P, & H I L æquales ſunt, ſed in parabola D E diameter E F efficit cum ordinatis ad eam applicatis angulos* Conu. 46. lib. 1. *æquales F E G, ſcilicet ei, qui cum tangente verticali conſtituit, ſeu angulo B C P; ergo duatum ſectionum L H K, & D E, diametri H I, & E F æque ſunt inclinatæ ad ſuas baſes, cumque latus rectum parabolæ L H K ad H B ſit, vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ſeu vt G E ad H B; igitur duo latera recta ſimilium diametrorum I H, & F E ad H B eandem proportionem habent; & ideo æqualia ſunt inter ſe; quare ſectiones ipſæ æquales, & congruentes* 10. huius. *erunt. Quod erat oſtendendum.*

Multoties in eodem cono duæ parabolæ æquales ſubcontrariæ duci poſſunt, vt Mydorgius demonſtrauit.

Notæ in Propoſit. XXVII.

DEinde ſit hyperbole, vt A B, & axis illius C D, & inclinatus B a D, & erectus B E, ita vt non ſit proportio quadrati axis coni ad quadratum dimidij diametri illius baſis, vt quadratum F G ad quadratum G H, maior, quàm proportio figuræ ſectionis: &c. *Senſus huius propoſitionis hic erit. In cono recto F H I, cuius triangulum per axim H F I reperire ſectionem æqualem hyperbole datæ A B, cuius tranſuerſus axis D B, & latus rectum B E. Oportet autem, vt quadratum F G axis dati coni ad quadratum radij G H circuli baſis non habeant maiorem proportionem, quàm ha-*

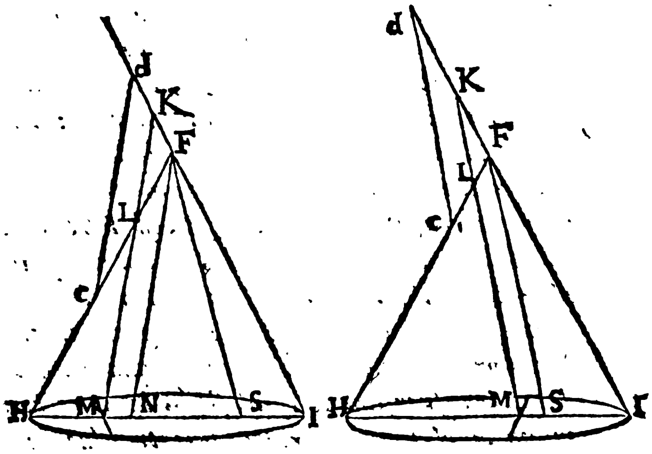
bent

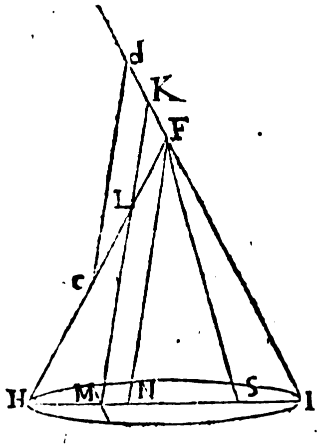


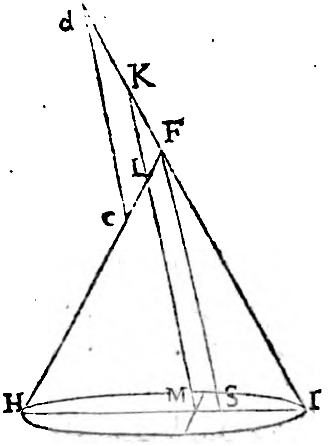
bent figuræ latera, ſcilicet, quàm habet D B ad B E. At quomodo duci debeat ſubtenſa K L quæ æqualis ſit ipſi D B, & parallela alteri F G, oſtendetur inferius.

b Et non reperitur in cono H F I alia ſectio hyperbolica ſuper F H, & æqualis A B, &c. *Addidi verba quæ ad huius textus integritatem facere videbantur.*

c Et educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos L F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, F S, & æquales D B, &c. *Quomodo autem hoc fieri poſſit modo oſtendemus. Sumatur in recta linea H F quodlibet punctum* c *inter F, & H; atque à puncto* c *ducatur recta linea* c d *parallela ipſi F N, vel F S, quæ ſecet productionem alterius lateris I F in* d, *& quàm proportionem habet* c d *ad D B, eandem habeat C F ad F L, & per punctum L ducatur recta L K parallela ipſi* c d. *Manifeſtum eſt* c d *ad L K eandem proportionem habere, quàm* c *F ad F L, ſeu quàm* c d *ad B D; & ideo K L æqualis erit B D, & ſubtendit angulum L F K, eſtque parallela ipſi* c d, *ſeu ipſi F N, vel F S. Et hoc erat faciendum.*







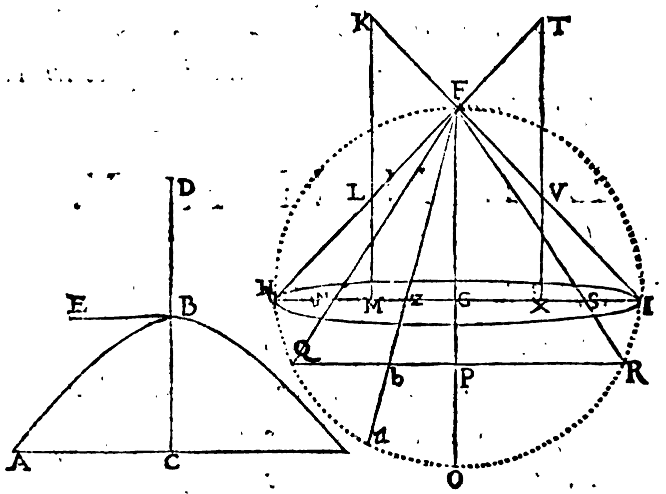
Igitur duo plana tranſeuntia per K L, T V eleuata ſuper triangulum H F I ad angulos rectos producunt in cono H F I duas ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipſarum L K, V T, & ſinguli eorum ad ſuos erectos ſunt, vt D B ad B E; ergo figuræ trium ſectionum ſunt ſimiles, & æquales; & propterea duæ ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B, &c. d *Ex textu mendoſo expungi debent ſuperuacanea aliqua verba, ſicut in contextu habetur. Non enim verum eſt, quod duæ tantummodo hyperbole æquales eidem A B duci poſſunt in cono recto H F I, vertices habentes in lateribus H F, & F I, ſed quatuor inter ſe æquales eſſe poſſunt; nam ſuper latus F H duci poſſunt duæ hyperbole, quarum axes tranſuerſi K L æquales ſint ipſi B D, & æquidiſtantes ſint rectis lineis F N, & F S. Quod ſic oſtendetur. Quoniam recta linea Q R ducta eſt parallela ipſi H I erunt duo arcus circuli intercepti H Q, I R æquales inter ſe; & ideo duo anguli ad peripheriam H F Q, & I F R æquales erunt inter ſe; poſita autem fuit K L æqualis, & parallela ipſi F N; igitur duo anguli alterni K L F, & H F N æquales ſunt inter ſe: pari ratione; quia reliqua K L ducta eſt parallela ipſi F S, erit angulus externus S F I æqualis interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes L K F; & ideo duo triangula L F K habent angulum F, communem, & duos angolos in ſingulis triangulis K, & L æquales; igitur ſunt æquiangula, & ſimilia, &, vt antea dictum eſt, fieri poſſunt duæ rectæ lineæ K L æquales eidem D B, & inter ſe: ſi igitur per duas rectas lineas K L ducantur plana perpendicularia ad planum trianguli per axim H F I, efficientur in cono recto duæ hyperbole, quarum bini axes tranſuerſi K L ſunt æquales: & quia, propter parallelas H I, Q R, eſt F N ad N Q ſeu quadratum F N ad rectangulum F N Q vt F S ad S R ſeu vt quadratum F S ad rectangum F S R; ſed rectangulum H N I æquale eſt rectangulo F N Q, & rectangulum H S I æquale eſt rectangulo F S R: ergo quadratum F N ad rectangulum H N I eandem proportionem habet, quàm quadratum F S ad rectãgulum H S I; 12. lib. 1. eſtque latus tranſuerſum K L ad ſuum latus rectum, vt quadratum F N ad rectangulum H N I, pariterque latus tranſuerſum K L alterius Ibidem. ſectionis ad ſuum latus rectum eſt vt quadratum F S ad rectangulum H S I:*

igitur

igitur duo æqualia latera tranſuerſa K L ad ſua latera recta eandem proportionem habent, & ideo huiuſmodi latera recta æqualia ſunt inter ſe; ideoque duæ hyperbolæ genitæ, habentes vertices in eodem latere F H, æquales ſunt inter ſe, quas vocat Mydorgius ſubcontrarias. 10. huius. *Simili modo duæ aliæ hyperbolæ inter ſe, & prioribus æquales in eodem cono duci poſſunt, vertices habentes in latere F I.*

e Nec reperitur tertia, cuius vertex ſit ſuper aliqua duarum linearum H F, F I, & ſit æqualis ſectioni A B, quia, &c. *Immutaui particulam; quæ propoſitionem reddebat falſam, id quod colligitur ex conſtructione, & progreſſu demonſtrationis: Quælibet enim alia ſectio, præter quatuor aſſignatas, habebit axem æquidiſtantem alicui rectæ vt F Z, quæ cadit inter F N, & F S; & hæc oſtendetur inæqualis prædictis ſectionibus, & ipſi A B.*

f Deinde ponamus quadratum F G ad G H maius, quàm D B ad B E. Dico, non reperiri in cono H F I ſectionem æqualem ſectioni A B: nam, ſi reperiretur, eſſet vel æqualis parallela ſuo axi, & erit quadratum N F ad I N in N H, &c. *Legendum eſſe vt in textu dixi conſtat ex progreſſu totius propoſitionis. Iam facili negotio demonſtratio perfici poteſt, nam axis F G minor eſt quàm F N, quæ ſubtendit angulum rectum G, quadratum vero G H ſemiſſius totius H I maius eſt rectangulo I N H, ſub inæqualibus ſegmentis contentum; propterea quadratum F N ad rectangulum I N H maiorem proportionem habebit, quàm quadratum G F ad quadratum G H: eſtque D B ad B E, vt quadratum F N ad rectangulum I N H;* 12. lib. 1. *propterea quod F N parallela eſt axi illius ſectionis, quæ poſita fuit æqualis A B; igitur D B ad B E maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratum G H; quod eſt contra hypotheſin: habebat enim quadratum F G ad quadratum G H maiorem proportionem, quàm D B ad B E. Non ergo reperitur in cono; &c.*

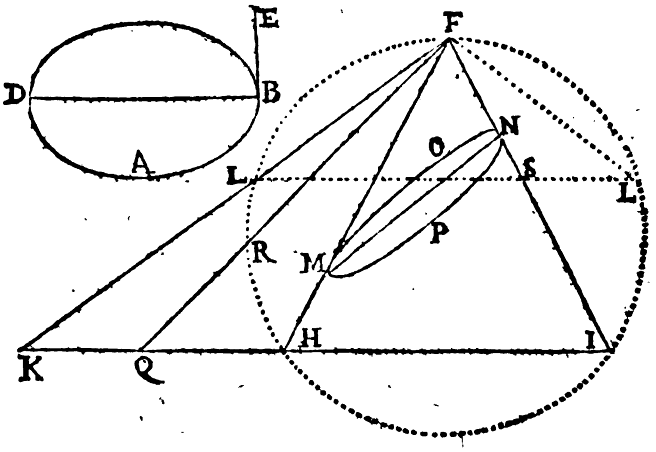


Sicuti in præcedenti propoſitione factum eſt, nedum in cono recto, ſed etiam in quolibet cono ſcaleno, quomodolibet per axim ſectio à triangulo H F I determinari poſſet, quando, & quomodo in eo deſignari poſſet ſectio æqualis datæ hyperbolæ A B. Quod ab alijs factum eſt.

Nota

Notæ in Propoſit. XXVIII.

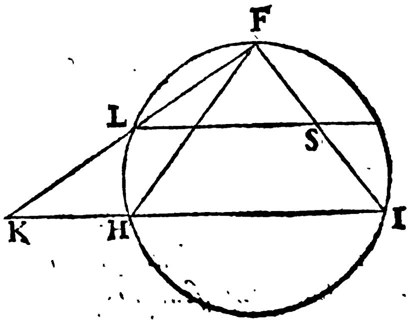
a DEinde ſit ſectio elliptica, vt A B, & axis eius tranſuerſus B D, & erectus illius B E; & ſit triãgulum coni H F I, & circumducamus circa illum circulum, & educamus ex F lineam F L K occurrentem ipſi extra circulum in K; & occurrat circulo in L ita vt ſit F K ad K L, vt D B ad B E; & eſt facile (vti demonſtrauimus in 59. ex 1.), &c.



Senſus propoſitionis hic erit: In cono recto, cuius triangulum per axim H F I reperire ſectionem æqualem datæ ellipſi A B, cuius axis tranſuerſus D B, & latus rectum B E. In conſtructione poſtea duci debet recta linea F L K extra circulum, & triangulum ad vtraſque partes, alias conſtructio non eſſet perfecta.

Lemma verò, quod repoſuiſſe, dicit Arabicus interpres in 1. libro, ab hoc ſequenti forſam diuerſum non erit.

LEMMA X.



SEcetur latus F I in S, vt ſit F I ad I S in eadem ratione, quàm habet axis tranſuerſus D B ad latus rectum B E: & ducatur S L æquidiſtans trianguli baſi H I, quæ ſecet circulum ex vtraque parte in L, & coniungantur rectæ lineæ F L, producanturque quouſquè ſecent baſim H I in punctis K.

Quoniam in triangulo F I K ducitur recta linea S L æquidiſtans baſi I K, erit F I ad

erit

I S, vt F K ad K L: ſed erat D B ad B E, vt F I ad I S; igitur F K ad K L eandem proportionem habebit: quàm D B ad D E.

b Et educamus in triangulo chordam M N parallelam K F, & æqualem D B, &c. *Non vna, ſed duplex recta linea M N duci poteſt parallela cuilibet duarum F K, quæ interius ſubtendat angulum verticis F trianguli H F I per axim ducti. Et poteſt etiam effici M N æqualis ipſi D B, vt in expoſitione præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt.*

c Itaque planum, tranſiens per M N, producit in cono H F I ſectionem ellipticam æqualem ſectioni A B; quia, &c. *Addidi verba, quæ in textu deſiderantur, vt ſenſus perfectus ſit.*

d Ergo duæ illæ ſectiones ſunt æquales, &c. *Concipi debet ſectio N O M P, duplex, quia nimirum duæ ſectiones ſub contrariæ, æquales ſunt, vt facile cum Mydorgio oſtendi poteſt.*

e Et dico, quod non reperiatur in cono H F I ſectio elliptica, habens verticem ſuper F I; quia ſi poſſibile eſſet, &c. *Textus valde corruptus expoſito modo reſtitui debere conſtat ex progreſſu demonſtrationis.*

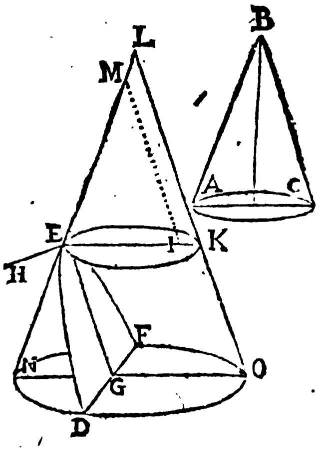
f Et diuidendo F R maior ad minorem R Q eſt vt F L minor ad maiorem K L, &c. *Supplendæ fuerunt particulæ aliquæ ad tollendam equiuocationem.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſit. XXIX. XXX. & XXXI.

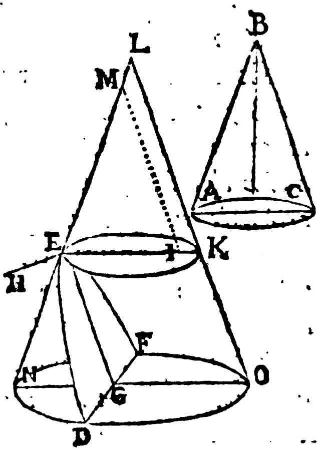
PROPOSITIO XXIX.

DAto cono recto A B C, conum exhibere ei ſimilem, qui datam ſectionem D E F contineat, cuius axis E G, & erectus E H; ſitque prius ſectio parabole.



Super E G educatur planum ad ſectionem D E F ad angulos rectos eleuatum, in quo ducatur E I K, quæ contineat cum E G angulum æqualem ipſi angulo C: & ponamus E H ad E K, vt A C ad C B, & faciamus ſuper E K triangulum E L K ſimile triangulo A B C, vt angulus verticalis L æqualis ſit angulo B. Faciamus etiam conum, cuius vertex ſit L, eiuſque baſis circulus, cuius diameter ſit E K, qui ſit eleuatus ſuper triangulum E L K ad angulos rectos; erit igitur angulus E K L æqualis ipſi C, ſed

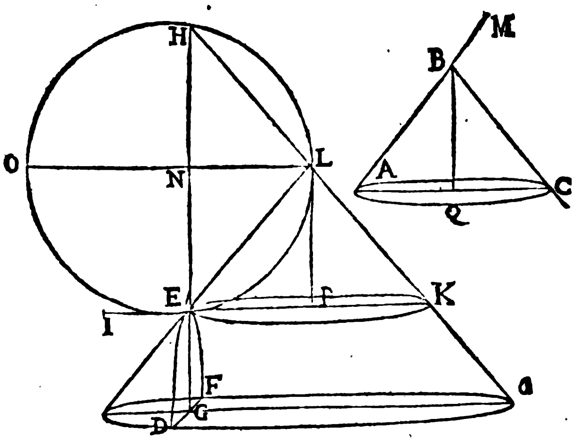
a



ſed angulus K E G factus fuit etiam eidẽ æqualis; igitur L K, quod eſt latus trianguli per axim b
coni tranſeuntis, parallelum erit ipſi E G:
& propterea planum, in quo eſt ſectio D E F c
producit in cono ſectionem parabolicam; &
quia A C ad C B eſt, vt H E ad E K, & vt E
K ad K L; igitur H E ad E L (quæ eſt æqualis d
ipſi K L) eandem proportionem habet, quàm
quadratum E K ad quadratum K L, nempe ad
11. lib.1. K L in L E: quaproptor H E eſt erectus ſectionis
prouenientis in cono, ſed eſt etiam erectus
ſectionis D E F; igitur D E F exiſtit in ſuperficie
Def. 8. huius. coni, cuius vertex eſt L, qui ſimilis eſt cono
A B C: eo quod triangulum A B C ſimile
eſt triangulo E L K. Dico etiam, quod ſectio D E F contineri non e
poteſt ab aliquo alio cono, ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex eadẽ
parte ſectionis præter conum iam exhibitum. Nam (ſi poſſibile eſt) ſit
conus habens verticem M, & triangulum eius erectum ſit ſuper planum
ſectionis D E F, & communis ſectio illius, & coni ſectionis erit axis eius;
eſtque E G illius axis; ergo hæc eſt abſciſſio communis eorundem planorum;
ſed eſt E G abſciſſio communis plani ſectionis, & plani trianguli
K E L, ſuper quod eſt etiam erectum; igitur duo triangula E L K, E M
Def. 8. I ſunt in eodem plano, & angulus L æqualis eſt M (propter ſimilitudinẽ
duorum conorum); ergo E M eſt indirectum ipſi E L, & educta E K ad f
Def. 9. I ſectio D E F continebitur in cono, cuius vertex eſt M: ſi autem ponamus
proportionem lineæ alicuius ad E M, eandem quàm habet quadra-
11. lib.1. tum E I ad I M in M E, linea illa eſſet erectus ſectionis D E F; ſed H
E erat erectus ſectionis D E F; igitur H E eſt illa linea, hæc autem ad
E L eandem proportionem habebat, quàm quadratum E K ad K L in
L E; ergo quadratum E K ad K L in L E eandem proportionem habet,
quàm quadratũ E I ad I M in M E; igitur H E ad E M, & ad E L eandem
proportionem habet: quod eſt abſurdum. Non ergo in aliquo alio
cono ſectio contineri poteſt, vt diximus. Et hoc erat propoſitum.

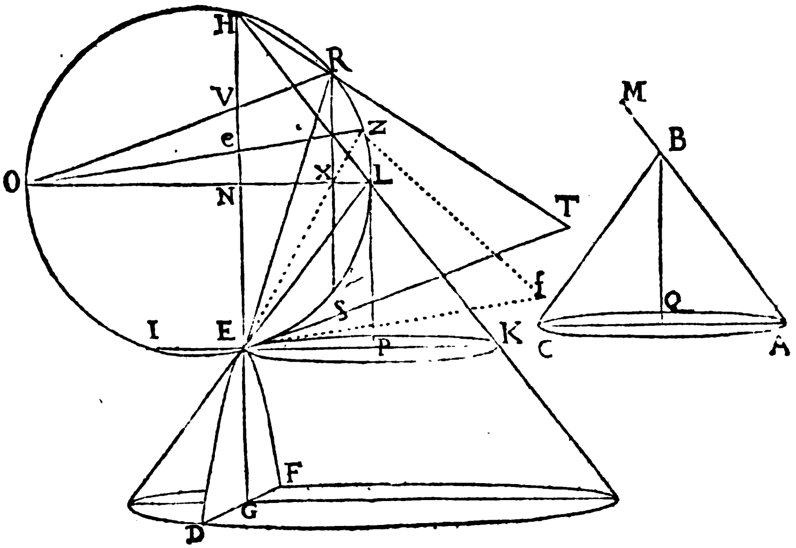
PROPOSITIO XXX.

SI ſectio hyperbolica D E F, cuius axis E G inclinatus E H, & erectus a
E I (oportet autem, vt quadratum axis B Q coni recti ad quadratũ ſemidiametri
baſis illius A Q non maiorẽ proportionẽ habeat, quàm habent figuræ
latera). Et habeat prius eandem proportionẽ, quàm H E ad E I, &
producamus A B ad M, & ſuper H E in plano erecto ad ſectionẽ D E F
deſcribamus ſegmentũ circuli E L H, quod capiat angulum æqualem angulo
M B C, & biſariam ſecemus arcum E O H in O, & educamus perpendicularem
O N ſuper H E; & producamus illam, quouſque occur-
rat



rat circumferentiæ in L, & iungamus E L, & L H, quæ occurrat in K perpendiculari ex puncto E ſuper lineam E H. Et quia E K parallela eſt L O erit angulus K æqualis H L O, qui eſt ſemiſſis anguli H L E, & hic eſt æqualis duobus angulis K, K E L; igitur ſunt æquales; quare K L E eſt æquicrus, & angulus K L E æqualis eſt A B C; quia angulus H L E
c æqualis eſt M B C; quapropter K L E ſimile eſt A B C, quia æqualia crura etiam habet! Si autem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum illius trianguli erectum ad planum D E F; vtique planum ſectionis producit in cono hyperbolen, cuius axis E G, inclinatus E H; eo quod ſi educamus L P, B Q perpendiculares in duobus triangulis, habebit quadratum B Q ad C Q in Q A (quod eſt vt H E ad E I) eandem proportionem, quàm quadratum L P ad P K in P E: quare potentes æductæ in illa ſectione ad axim E G, poterunt comparata, applicata ad E I erectum; ſed potentes, eductæ in ſectione D E F, 12. lib. 1.
poſſunt quoque illa applicata; ergo ſectio D E F æqualis eſt ſectioni, prouenienti in cono, cuius vertex eſt L, & exiſtit in eodem plano, habetque eundem axim: quare conus, cuius vertex L continet ſectionem Defin. 9.
D E F, & eſt ſimilis cono A B C.

Dico rurſus, quod nullus alius conus ſimilis cono A B C, cuius vertex ſit in ea parte, in qua eſt L, præter iam dictum, continebit hanc
d eandem ſectionem. Si enim hoc verum non eſt, contineat illam alius conus ſimilis cono A B C, cuius vertex R in plano L E G; atque latera illius ſint E R, R T. Quia angulus E R T æqualis eſt E L K, & eorum conſequentes æquales inter ſe in eodem circuli ſegmento E L H exiſtent, eo quod T R produſta occurrit axi tranſuerſo E H in H, & iungamus R O, & ex E educamus E T, quæ ſit parallela coniunctæ rectæ lineæ O R; vnde angulus O R H æqualis eſt O R E) propter æqualitatem arcuum ſuorum, & ſunt æquales duobus angulis R T E, R E T, ergo E R T eſt æquicrus, & angulus T R E æqualis eſt A B C: educatur iam R S parallela H E, tunc quadratum R S ad T S in S E eandem proportionem habebit, quàm E H inclinatus ſectionis D E F ad E I erectum illius; eo quod ſectionem D E F continet conus, cuius vertex eſt R; ſed H E ad



E I eandem proportionẽ habet,. quàm quadratum B Q ad C Q in Q A:
eſtq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ proportionẽ e
habet, quã T R ad R H, ſeu quàm E V ad V H; igitur E V æqualis
eſt V H; quod eſt abſurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã
perpendicularis eſt, bifariam ſecat eam in N. Oſtenſum igitur eſt, non reperiri
conum alium continentem ſectionem D E F, præter ſuperius expoſitum.
Tandem ſupponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere
minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nẽpe f
N E, ſeu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N
L, ſcilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad
E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R
X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T
quouſque ſecet E T parallelam ipſi O R. Oſtendetur (quemadmodum g
ſupra dictum eſt) quod E T R, B A C ſunt iſoſcelia, & ſimilia. Et quia
E H ad E I eſt vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V
in V R, quod eſt æquale ipſi E V in V H ad quadratum V R; hæc autem
proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S,
& ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus componitur
proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E
S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea
planum ſectionis D E F in cono, cuius vertex eſt R, & illius trianguli
latera R E, R T, producit ſectionem hyperbolicam, cuius inclinatus eſt
E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex eſt R, continet ſectionẽ D E
F, nec non continet illam alius conus, huic cono ſimilis, cuius vertex
eſt Y; & hi duo coni ſunt ſimiles cono A B C, nec continet illam tertius
alius conus, qui ſimilis ſit cono A B C, nam (ſi hoc fieri poſſibile
eſt) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & punctum verticis
illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ ſecet H E in *e*: h

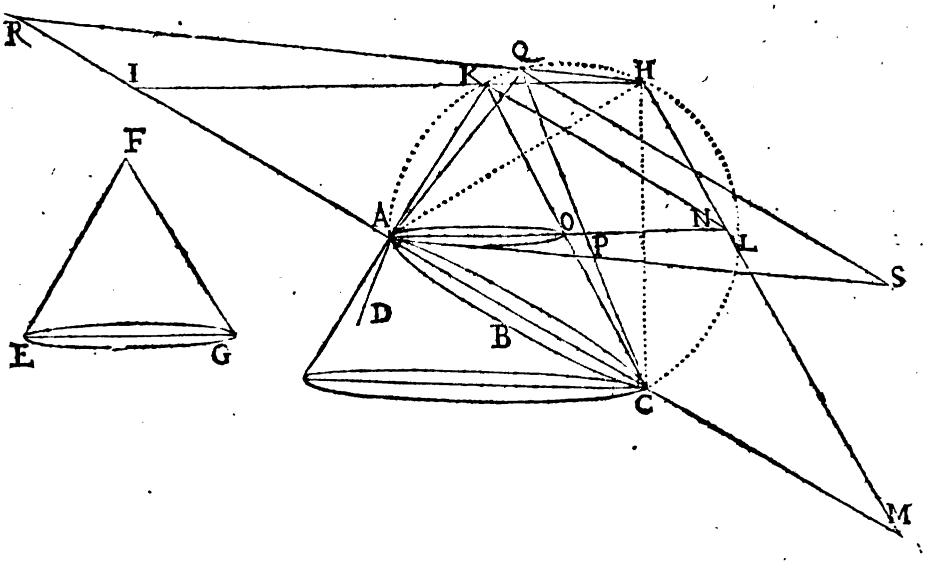
Inde

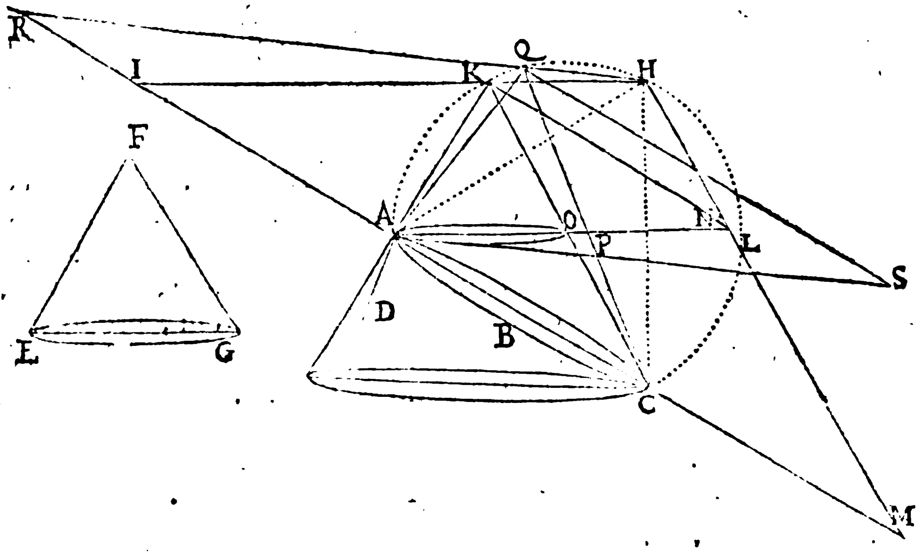
Inde demonſtrabitur , quod H E ad E I habebit neceſſario eandem proportionem , quàm O *e* ad *e* Z ; quod eſt abſurdum, quia haberet eandem proportionem , quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam tertius alius conus ſimilis cono A B C.

Supponamus iam , quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem proportionem habere , quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non poſſe conum i ſimilem cono A B C , qui contineat ſectionem D E F. Alioquin contineat illam conus , cuius vertex eſt R , & demonſtrabitur , quod O V ad V R ſit , vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm quadratum B Q ad quadratum Q A , quæ oſtenſa eſt eadem, quàm O N ad N L ; ergo O V ad V R ; nempe O N ad N X minorem , proportionem habet , quàm eadẽ O N ad N L , quod eſt abſurdum. Non igitur continebit ſectionem D E F conus ſimilis cono A B C. Vt propoſitũ fuerat.

PROPOSITIO XXXI.

a SIt tandem ſectio elliptica A B C , eiuſque tranſuerſus axis A C , & erectus A D , & in plano perpendiculariter erecto ad ſectionis planum A B C , fiat ſuper A C ſegmentum circuli , quod capiat angulum æqualem angulo F, eumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, C H , & ex H educamus H I , quæ ſecet circulum in K, & occurrat ſubtenſæ extra circulum in I ; ſitque H I ad I K , vt A C ad A D : & educamus H L M eaſdem conditiones habens ; & iungamus C K , A K , b ducaturque K N parallela A C , & A N parallela H I , quæ ſecet K C in O. Quia H I in I K (quod eſt æquale ipſi C I in A I ad quadratum I K) eſt vt A C ed A D ; & proportio C I in A I ad quadratum I K componitur ex ratione C I ad I K , nempe K N ad N O (propter ſimili- Lem. 10. huius.





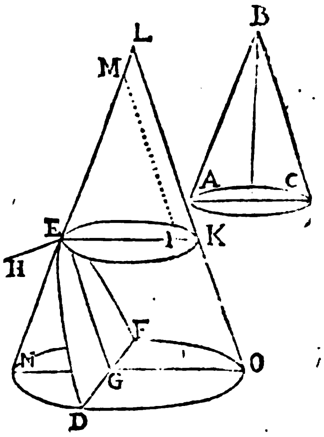
tudinem duorum triangulorum), & ex ratione A I, nempe K N ad I K, nempe ad A N (propter parallelas), & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati K N ad A N in N O; ergo quadratum K N ad A N in N O eandem proportionem habet, quàm A C tranſuerſus ad A D erectum; igitur planum, in quo eſt ſectio A B C, in cono cuius vertex eſt K, & baſis circulus, cuius diameter A O producit 13. & 54. lib. 1. ſectionem ellipticam, cuius tranſuerſus eſt A C, & erectus A D: quare Defin. 9. huius. ſectionem B A C continet; & quia angulus H K C, nempe A O K æ- c qualis eſt H A C, & angulus C H A æqualis eſt C K A, remanet angulus H C A æqualis O A K; eritque H C A, quod ſimile eſt F E G, ſimile quoque O K A; quapropter O K A iſoſceleum, & ſimile eſt ipſi Defin. 8. huus. F E G; igitur conus, cuius vertex eſt K, ſimilis eſt dato cono F E G, & quidem continet ſectionem A B C, vti diximus. Similiter quoque oſtendemus, quod eandem ſectionem continebit alius conus, cuius vertex eſt L, ſi educantur A L, L C. Et alius conus, præter hos duos, iuxta hanc hypotheſin non continebit illam: Alioquin contineat illam d alius conus, cuius vertex ſit Q, & triangulum A Q P: & oſtendetur, quemadmodum ſupra dictum eſt, quod communis ſectio plani, per axim illius coni ducti, erecti ad planum ſectionis A B C, & plani ſectionis eſt A C, & quod punctum verticis illius coni ſit in circumferentia ſegmenti A H C, & ſit Q, ducamus per H Q rectam H R, & iungamus C Q, A Q, & educamus A S parallelam H Q R, & Q S parallelam A C, erit Q A P triangulum illius coni, & eſt iſoſceleum, erit quadratum Q S ad A S in S P, vt C R in R A; quod eſt æquale ipſi H R in R Q ad quadratum R Q, nempe H R ad R Q; ergo H R ad R Q eſt, vt A C e ad A D, quæ eſt, vt H I ad I K; ergo diuidendo permutandoq; H K maior ad H Q minorem, eandem proportionem habebit, quàm K I minor ad R Q maiorem: & hoc eſt abſurdum. Non ergo reperiri poteſt tertius conus, continens ſectionem B A C. Et hoc erat oſtendendum.

Notę

Notæ in Propoſit. XXIX.

a ET faciamus ſuper E K triangulum ſimile triangulo A B C, &c. *Nimirum; fiat angulus K E L æqualis angulo A, & angulus L fiat æqualis angulo B.*

b Ergo L K, quæ eſt latus trianguli tranſeuntis per axim E G parallelũ eſt E G, &c. *Legi debet, vt in textu videre eſt. Hoc conſtat ex conſtructione; nam duo anguli alterni G E K, , & L K E æquales ſunt eidem angulo C.*



c Et propterea planum, in quo eſt ſectio D E F producit in cono ſectionem parabolicam, &c. *Quoniam planum circuli, cuius diameter E K perpendiculare eſt ad planum trianguli L E K: igitur ſi ducatur planum N F O æquidiſtans circulo E K ſecans plannm D E F in recta linea D G F, erit quoque circulus, & perpendicularis ad planum triãguli per axim L E K: ſed ex conſtructione planum D E F perpendiculare quoque erat ad idem triangulum per axim E L K; igitur D F communis ſectio eorundem planorum perpendicularis quoque erit ad idem planum L N O, & efficiet angulos rectos cum diametro circuli N O, & cum E G, quæ in eodẽ plano exiſtunt, & cũ illo conueniunt in puncto G; ſuntq; E G, & L O parallelæ: igitur planum ſectionis D E F producit neceſſariò in cono L N O producto parabolam.* 11. lib. 1.

d Igitur H E ad E L, quæ eſt æqualis ipſi L K eamdem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, &c. *Quoniam conus L E K ſimilis eſt cono recto A B C erit quoque rectus: & propterea duo latera trianguli per axim E L, & L K æqualia erunt inter ſe, & ideo E K ad K L, atque ad E L eandem proportionem habebit, &c.*

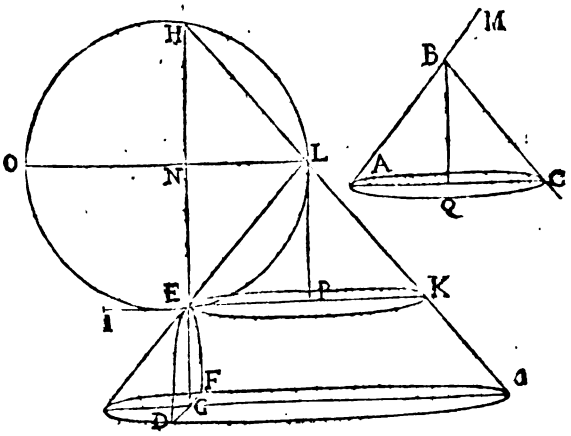
e Et dico, quod ſectio D E F non reperitur in alio cono ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex parte plani ſectionis præter hunc conum, &c. *Ideſt. Nullus alius conus rectus continebit eandem parabolam D E F, qui ſit ſimilis cono A B C, & vertex E parabole magis, aut minus recedat à vertice coni, quàm E L.*

f Ergo E M eſt indirectum ipſi E L, &c. *Quia D G baſis ſectionis conicæ perpendicularis eſſe debet ad G O, & ad G E, & ideo ad triangulum per axim vtriuſque coni recti L E K, & M E I; & conueniunt plana eorundem triangulorum in E G axi conicæ ſectionis geniti ab eis; ergo dicta triangula in eodem plano exiſtunt per rectas E G, & G O ducto; & in vtroquè cono triangulorum per axes latera L K, & M I parallela ſunt eidem axi E G paraboles: ergo L K, M I parallelæ ſunt inter ſe, & anguli L, & M æquales ſunt propter ſimilitudinem triangulorum per axes in conis ſimilibus: igitur L E, & M E ſunt quoq; parallelæ, & conueniunt in E vertice paraboles; ergo in directum ſunt conſtitutæ.*

Notæ

Notæ in Propoſit. XXX.

ITa vt non ſit proportio quadrati axis coni, B Q ad quadratum ſemidiametri baſis illius vt C Q minor proportione figuræ ſectionis, &c. a *Rurſus datus ſit conus rectus A B C, cuius axis B Q ſemidiameter circuli baſis ſit C Q, exhiberi debet alius conus ſimilis dato, qui datam hyperbolen D E F contineat; oportet autem, vt quadratum axis coni B Q ad quadratum ſemidiametri illius Q A non babeat maiorem proportionem, quàm habet axis tranſuerſus H E ad latus rectum E I.*



•Et producamus L H ad E I occurret in K perpendiculari rectæ ad punctum E linea H, &c. b *Ideſt ſi ducatur recta linea E K in plano circuli H L E perpendicularis ad H E, ſeu parallela ipſi L N coniuncta recta linea H L ſecabit reliquam æquidiſtantium E K in K.*

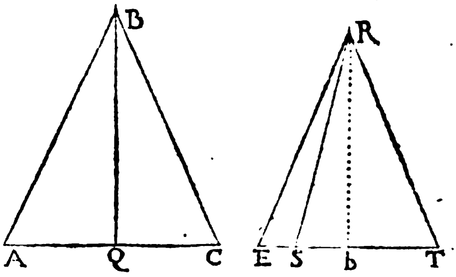
Quapropter K L E ſimile eſt A B C, quia æquicrus etiam eſt: ſi au- c tem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum trianguli illius erectum ad planum D E F; vtique planum, quod eſt in ſectione producit in cono ſectionẽ hyperbolicã, cuius axis E G, & inclinatus E H, &c. *Quoniam in duobus triangulis A B C, & E L K ſunt anguli verticales B, & L æquales inter ſe, cũ externi M B C, & H L E æquales facti ſint; & angulus H L N æqualis ſit interno, & oppoſito K, & angulus N L E æqualis eſt alterno angulo L E K propter parallelas N L, E K, & quilibet eorũ eſt medietas externi anguli H L E; ergo angulus K æqualis erit angulo L E K, & triangulũ L E K erit iſoſceliũ, ſed triangulum A B C per axim coni recti ductum eſt quoque iſoſcelium; igitur duo anguli ſupra baſim A, & C æquales ſunt inter ſe; erant autem prius verticales anguli B, & L æquales; igitur triangula A B C, & E L K æquiangula, & ſimilia ſunt. Ducatur poſtea recta linea L P perpendicularis ad baſim E K, quæ eam ſecabit bifariam in P, & ducatur planum per E K perpendiculare ad planum E L K, & in eo diametro E K fiat circulus, qui ſit baſis coni, cuius vertex L, & ducatur planum F D a æquidiſtans plano circuli E K; efficietur*

alius

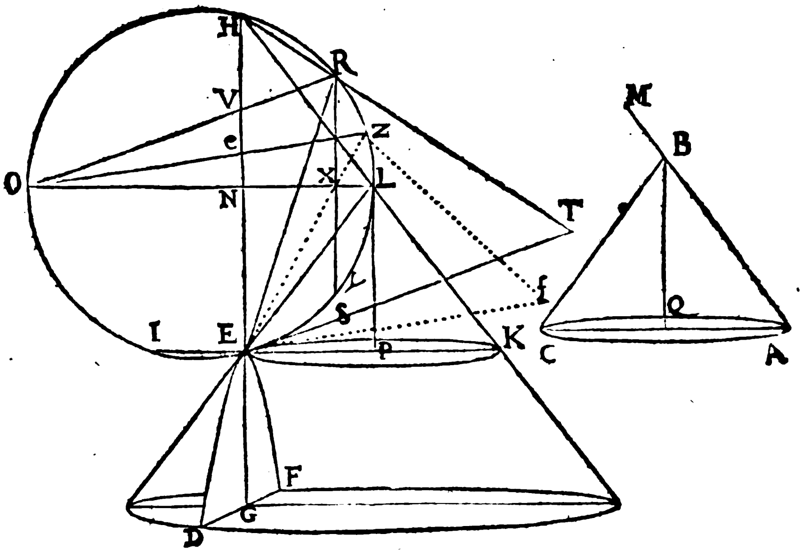
alius circulus F D a perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K; erat autem ex conſtructione planum hyperboles D E F perpendiculare ad idem planum per axim E L K; igitur duorum planorum communis ſectio, quæ ſit F G D perpendicularis quoque erit ad planum trianguli L E K: & ideo efficiet angulos F G E, & F G a rectos, & G E H producta ſubtendit angulum externum trianguli conici E L K; quapropter planum D E F efficiet in cono E L K hyperbolen, cuius axis tranſuerſus erit H E.

d Alias eontineat illam alius conus ſimilis cono A B C, ſitque vertex eius R in plano L E G, & duo latera trianguli illius ſint E R, T R; ergo angulus E R T æqualis eſt E L K, & eſt in circumferentia arcus E L H; ergo T R ſi producatur, occurret H: &c. *Senſus huius textus corrupti talis eſt: Si enim fieri poteſt, vt aliquis alius conus, vt E R T, qui ſimilis ſit cono A B C, vel E L K, contineat eandem hyperbolam D E F, & conorum vertices R, & L ad eaſdem partes tendant, erunt duo plana triangulorum per axes conorum ducta perpendicularia ad planum ſectionis D E F; alias E G non eſſet axis hyperbole D E F; Et quia coni ſupponuntur ſimiles erunt quoque triangula per axes E L K, & E R T ſimilia inter ſe; & ideo anguli verticales E* ex Def. 8. *L K, & E R T æquales inter ſe erunt, atque ſubſequentes anguli E L H, & E R H æquales quoque inter ſe erunt, & ſubtendunt commune latus tranſuerſum H E; igitur duo anguli E L H, & E R H in eodem circuli ſegmento conſiſtunt. Textus igitur corrigi debebat vt dictum eſt.*

e Atque T S æqualis eſt ipſi E, & T S ad S E eſt, vt T R ad R H, quæ eſt vt E V ad V N; ergo E V æqualis eſt V H, &c. *In duobus triangulis iſoſcelijs inter ſe ſimilibus A B C, & E R T ab æqualibus angulis verticalibus A B C, & E R T ducuntur rectæ lineæ B Q, R S ſecantes baſes in Q, & S: eſtque quadratum R S ad rectangulum E S T, vt quadratum B Q ad rectangulum A Q C, & ſecatur A C bifariam in Q; oſtendendum eſt E T in duas partes æquales in S quoque ſecari. Si enim hoc verum non eſt E T in alio puncto bifariam diuidetur vt in* b *iungaturquè R* b. *Quoniam à verticibus triangulorum A B C, & R E T iſoſcelium ducuntur rectæ lineæ B Q, R* b *diuidentes baſes bifariam in Q,* b, *ergo anguli ad Q, &* b *ſunt recti, & erant anguli A, & E æquales (propter ſimilitudinem eorundem triangulorum) igitur triangula A B Q, & E R* b *ſimilia ſunt, ideoq; B Q ad Q A erit vt R* b *ad* b *E, & quadratũ B Q ad quadratum Q A erit vt quadratũ R* b *ad quadratũ* b *E; erat autem quadratum R S ad rectangulum E S T vt quadratum B Q ad quadratum Q A; ergo quadratum R* b *ad quadratum* b *E eandem proportionem habet, quàm quadratum R S ad rectangulum E S T; eſtque quadratum R* b *minus quadrato R S (cum perpendicularis R* b *minor ſit quàm R S) quarè quadratum ex* b *E ſemiſſe totius E T minus erit rectangulo E S T ſub ſegmentis inæqualibus eiuſdem E T contento; quod eſt abſurdum: quarè neceſſario E T bifariam ſecatur in S. Poſtea propter parallela R S, & H E, vt T S ad S E ita erit T R ad R H; & propter parallelas R V, & E T erit E V ad V H, vt T R ad R H, ſeu T S ad S E: oſtenſa autem fuit T S æqualis S E; igitur E*



V æqua-



V æqualis eſt V H, quod eſt abſurdum.

Patet quadratum L P nempe N E, ſeu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, ſcilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I; ponamus iam O N ad Z X, vt H E ad E I; & per X ducamus X R, & iungamus E R, &c. *Suppoſita conſtructione prioris caſus, quandò conus rectus E L K factus eſt ſimilis cono A B C quadratum L P ad quadratum E P habebat eandem proportionem, quàm O N ad N L, ſeu quàm quadratum B Q ad quadratum Q A: modò in hac altera ſuppoſitione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I; igitur O N ad N L minorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; & fiat O N ad N X vt H E ad E I, erit N X minor quàm N L, & ideo punctum X intra circulum cadet, & per X ducta R X Y parallela H E; vtique ſecabit circulum in duobus punctis, vt in R, & Y. Quod verò recta R X Y duci debeat parallela ipſi H E, non quomodocunque, patet ex contextu ſequenti, nam debent O X, O R ſecari in N, & V proportionaliter, quarè textus debuit omnino corrigi.* f

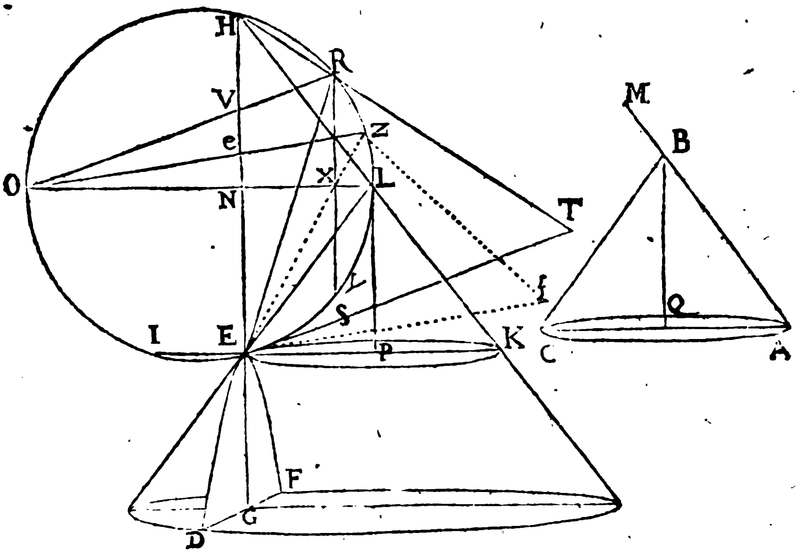
Oſtendetur, quemadmodum dictum eſt, quod E T R, & A B C ſunt iſoſcelia, & ſimilia, &c. *Quoniam arcus circuli E O, & O H æquales ſunt inter ſe ex conſtructione, erunt anguli E R O, & O R H æquales inter ſe, & propter parallelas O R, & E T eſt angulus O R E æqualis alterno T E R; atquè externus H R O æqualis eſt interno, & oppoſito R T E; igitur duo anguli R E T, & R T E æquales ſunt inter ſe; & propterea triangulum E R T erit iſoſcelium. Rurſus quia duo anguli E L H, E R H in eodem circuli ſegmento conſtituti æquales ſunt inter ſe, & erat ex conſtructione angulus M B C æqualis angulo H L E; igitur anguli H R E, & M B C æquales ſunt inter ſe, & ideo conſequentes anguli verticales E R T, & A B C æquales erunt inter ſe, eſt quoque triangulum A B C per axim coni recti iſoſcelium igitur duo triangula E R T, & A B C ſimilia ſunt inter ſe. Et quia vt dictum eſt O N ad N X eandem proportionem habet, quàm H E ad E I, atque propter parallelas V N, & R X eſt O V ad V R vt O N ad N X; & ſumpta cõmuni altitudine V R erit* g

rectan-

rectangulum O V R ad quadratum V R, vt H E ad E I: eſt verò rectangulum H V E æquale rectangulo O V R (propterea quod duæ rectæ lineæ O R, H E ſeſe ſecant intra circulum in V) igitur rectangulum H V E ad quadratum V R eandē proportionē habet quàm H E ad E I; cumq; proportio rectanguli H V E ad quadratum V R compoſita ſit ex duabus rationibus, ipſius E V ad V R, ſeu R S ad S E, (propter parallelogrammum V E S R), & ex proportione H V ad V R, quæ eadem eſt proportioni ipſius R S ad S T (propterea quod triangula H V R, & R S T ſimilia conſtituuntur ab æquidiſtantibus H V, R S, & V R, S T) quapropter duæ proportiones R S ad S E, & R S ad S T componentes proportionem quadrati R S ad rectangulum E S T eadem ſunt rationibus, ex quibus componitur proportio rectanguli H V E ad quadratum V R; & ideo quadratum R S ad rectangulum E S T eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H V E ad quadratum V R, ſeu eandem quàm habet H E ad E I; igitur ſi fiat conus, cuius vertex R, & baſis circulus diametro E T, cuius planum perpendiculare ſit ad planum trianguli E R T, erit triangulum E R T iſoſcelium per axim prædicti coni extenſum, atq; ad ipſum ſectionis D E F planum eſt quoque perpendiculare, & eius axis G E ſubtendit angulum E R H, qui deinceps eſt angulo verticis; igitur planum D E F in cono E R T generat hyperbolen, cuius axis inclinatus eſt E H, & erectus E I: & propterea conus E R T comprehendit hyperbolen D E F. Rurſus ſi recta R X producatur quouſque ſecet peripheriam circuli L E ex altera parte in puncto Y; atque denuò coniungantur recta linea E Y, & H Y, quæ extendatur quouſquè conueniat cum recta linea ex puncto E parallela ipſi O Y in puncto aliquo, quod concipiatur eſſe d; *fieri poterit alius conus (cuius vertex Y; baſis circulus diametro E* d *erectus ad planum trianguli) ſimilis cono E R T, ſiue A B C: Oſtendetur ſicuti modo dictum eſt, quod idem planum H D F efficiet in cono Y* d *E eandem hyperbolen D E F.*

h Inde demonſtrabitur quod E H ad E I neceſſe eſt, vt habeat eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z: & hoc eſt abſurdum, &c. *quia conus Z E* f *continet hyperbolen D E F neceſſariò eius axis tranſuerſus E H ſubtendet angulum H Z E, qui deinceps eſt anguli verticis trianguli per axim; & propter ſimilitudinē conorū rectorum, ſunt triangula per axes A B C, E R T, & E Z* f *ſimilia inter ſe, & anguli verticales B, Z, & R æquales erunt inter ſe; ideo conſequentes anguli M B C, & H R E, nec non H Z E æquales erunt inter ſe, & ſubtenduntur ab eadem recta linea H E; ergo in eodem circuli ſegmento conſiſtunt: & propterea punctum Z in circuli peripheria H Z E cadit. Poſtea (vt in propoſitione 53. primi libri, & in hac eadem propoſitione demonſtrauit Apollonius) conſtat quod H E ad E I habet eandem proportionem, quàm O* e *ad* e *Z; & prius O V ad V R erat vt H E ad E I; ergo O V ad V R eādem proportionem habet quàm O* e *ad* e *Z; ſed quia punctum Z non cadit in R, neque in Y alias conus E Z* f *non eſſet alius à præcedentibus E R T, & E Y* d; *ergo O* e *ad* e *Z non habet eandem proportionem, quàm O V ad V R, quod eſt abſurdum.*

i Et demonſtrabitur quod O V ad V R ſit vt H E ad E I, &c. *Repetatur denuo conſtructio primi caſus huius propoſitionis, vt fiat conus rectus L E K ſimilis cono A B C, tunc quidem quadratum L P ad quadratum E P habebit eandem proportionem, quàm O N ad N L, ſeu quàm quadratum B Q ad*



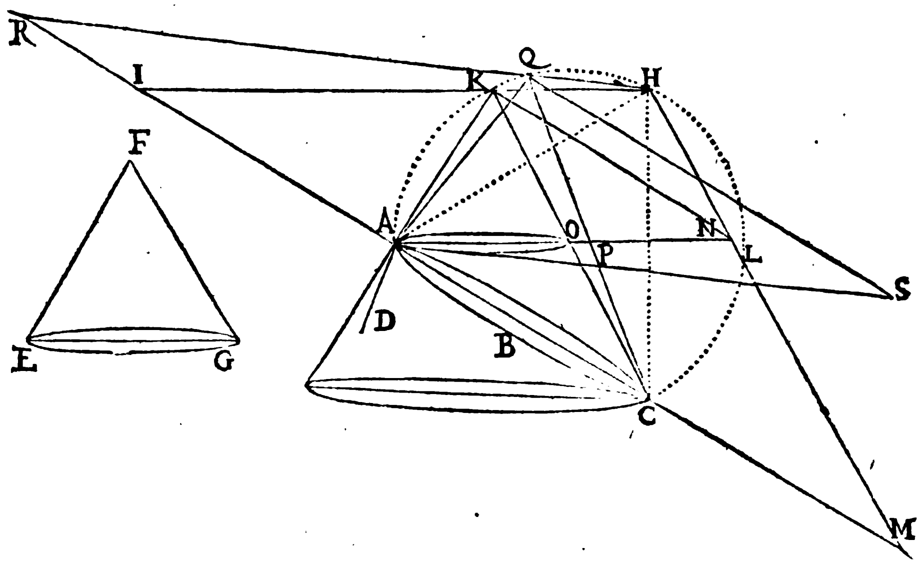
quadratum Q A; ſed in hac poſtrema ſuppoſitione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere maiorem proportionem, quàm H E ad E I; igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; ſed quia conus E R T ponitur continere ſectionem D E F: habebit O V ad V R eandem proportionem, quàm H E ad E I (vt ex 53. primi deducitur, & in hac propoſitione denuò factum eſt): igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit quàm O V ad V R; oſtenſa autem fuit O N ad N X, vt O V ad V R; ergo O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm O N ad N X: quod eſt abſurdum, nam N X minor eſt, quàm N L.

Notæ in Propoſit. XXXI.

DEinde ſit ſectio elliptica A B C, & tranſuerſa illius A C, & erectus A D, & circunducamus ſuper A C in plano erecto ad ſectionis planum A B C ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo F: &c. *Rurſus conus exhiberi debet ſimilis cono dato E F G, qui datam ellipſim A B C contineat, ſitque axis tranſuerſus ellipſis C A, eiuſque latus rectum A D.* a

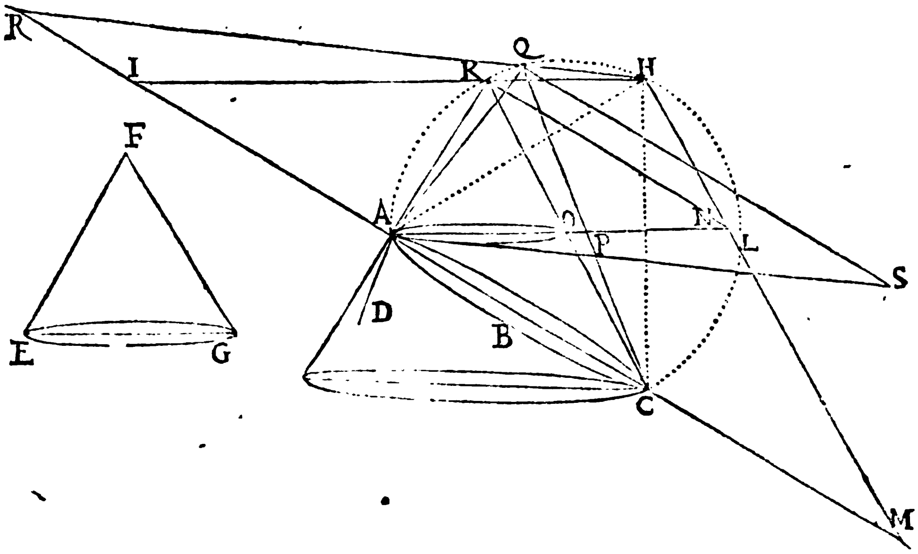
Quia H I in I K, quod eſt æquale ipſi C I in I A, ad quadratum I A eſt, vt A C ad A D, & C I in A I ad quadratum I K nempe K N ad N O propter ſimilitudinem duorum triangulorum, & ex A I, nempe N K ad I K nempe A N vt parallelas conſtituamus lineas, & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati N K ad A N in N O, &c. *Senſus huius textus valdè corrupti hic eſt. Quia ex conſtructione H I ad I K erat vt C A ad A D, & ſumpta communi altitudine I K, erit rectangu-* b

lum



lum H I K ad quadratum I K, vt H I ad I K ſeu vt C A ad A D; eſtque rectangulum C I A æquale rectangulo H I K; igitur rectangulum C I A ad quadratum I K eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; componitur verò proportio rectanguli C I A ad quadratum I K ex duabus proportionibus laterum C I ad I K, & A I ad I K: & propter parallelas N O, I K, atque K N, & C I, & latus commune C O K duo triangula C I K, & K O N ſimilia ſunt; igitur K N ad N O eſt, vt C I ad I K; & quia in parallelogrammo I N latera oppoſita ſunt æqualia K N ad N A eandem proportionem habebit quàm A I ad I K; quapropter duæ rationes K N ad N O, & K N ad N A componunt proportionem quadrati K N ad rectangulum A N O, quæ eadem eſt proportioni rectanguli C I A ad quadratum I K; & propterea quadratum K N ad rectangulum A N O eandem proportionem habebit, quàm A G ad A D. Si igitur fiat conus, cuius vertex K baſis circulus diametro A O deſcriptus, cuius planum perpendiculare ſit ad planum A K C; atque per rectam A C æquidiſtantem ipſi K N planum ducatur perpendiculare ad idem planum A K C generabitur ellipſis, cuius axis tranſuerſus erit A C, & latus rectum A D. Textus igitur corrigi debere ex dictis manifeſtum eſt.

C Et quia angulus H K C nempe A O K æqualis eſt H A C, & angulus C H A æqualis eſt C K A remanet angulus H C A æqualis O A K erit H C A ſimile F E G ſimile quoque O K A; ergo, &c. *Quoniam ex conſtructione ſegmentum A H C capax eſt anguli æqualis angulo F erit angulus A H C æqualis angulo F; & quia peripheria A H C ſecta eſt bifariam in H; ergo ſubtenſa latera A H, & H C æqualia ſunt: & propterea triangulum A H C iſoſcelium, & ſimile erit triangulo E F G; propterea quod anguli verticales æquales ſunt inter ſe; ſunt verò duo anguli A H C, & A K C in eodem circuli ſegmento; ergo æquales ſunt inter ſe; pariterque duo anguli C A H, & C K H in eodem circuli ſegmento conſtituti, æquales ſunt inter ſe, & propter paralle-*



las A O, K H ſunt anguli alterni A O K, & H K O æquales inter ſe; igitur angulus A O K æqualis erit angulo C A H; & propterea in duobus triangulis K A O, & H C A tertius angulus A C H æqualis erit tertio angulo K A O, & propterea triangulum K A O iſoſcelium, & ſimile erit triangulo H A C, ſiuè F G E; igitur conus, cuius vertex K baſis circulus A O perpendicularis ad planum trianguli A K O erit conus rectus, & ſimilis cono E F G dato.

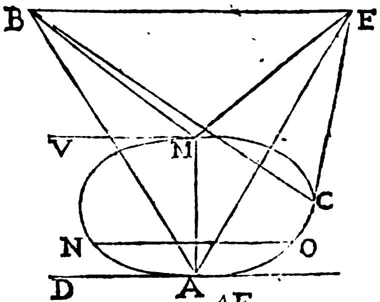
Alioquin contineat illum conus alius, cuius vertex ſit Q, & triangulum Q A P, & oſtendetur quemadmodum dictum eſt, quod planum d tranſiens per axim illius coni erectum ad planum ſectionis A B C ſectio communis cum plano ſectionis eſt A C, & quod punctum verticis illius coni ſit in circumferentia ſegmenti A H C, &c. *Quia ſupponitur, quod conus Q A P ſimilis cono E F G contineat ellipſim A B C, cuius axis tranſuerſus C A; & latus rectum A D; igitur triangulum per axim coni ductum Q A P, nedum ſimile erit triangulo E F G, ſed etiam perpendiculare erit ad planum ellipſis A B C, & propterea conſiſtet in plano circularis ſegmenti A H C pariter erecti ad planum A B C, per idem axim A C extenſum, & eſt angulus A Q C æqualis angulo verticali F propter ſimilitudinem duorum triangulorum, & ex conſtructione primæ partis huius propoſitionis, eſt ſegmentum A H C capax anguli æqualis angulo F; ſecaturque bifariam in H; igitur angulus A Q C æqualis ipſi F in peripheria ſegmenti A H C exiſtit. Ducatur poſtea Q S parallela lateri tranſuerſo ellipſis A C, quæ ſecet baſim trianguli per axim Q A P productam in S, & à puncto H bipartitæ diuiſionis ſegmenti A H C coniungatur recta linea H Q producaturq; quouſq; occurrat rectæ lineæ C A in R. Quoniā duo anguli A H C, & A Q C in eodē circuli ſegmento conſtituti æquales ſunt inter ſe; pariterq; duo anguli C A H, & C Q H in eodē circuli ſegmento exiſtentes ſunt æquales, & eſt angulus A P Q æqualis angulo P A Q in triangulo iſoſcelio Q A P; & angulus P A Q æqualis angulo C A H in triangulis ſimilibus; igitur angulus A P Q æqualis eſt alterno angulo P Q H; & propterea*

recta

recta linea H R parallela eſt ipſi A S ; & erat prius Q S parallela ipſi C R , & recta linea C P Q eſt communis ; igitur triangula C R Q , & Q S P ſimilia ſunt , & ſpatium R S parallelogrammum eſt ; eritque vt prius dictum eſt proportio quadrati Q S ad rectangulum A S P eadem proportioni rectangnli C R A ad quadratum R Q ; eſt verò quadratum Q S ad rectangulum A S P , vt ellipſis axis tranſuerſus C A ad eius latus rectum A D , propterea quod conus A Q P ſupponitur continere ellipſim A B C ; igitur rectangulum C R A ad quadratum R Q eandem proportionem habet , quàm C A ad A D ; eſt verò rectangulum H R Q æquale rectangulo C R A ; igitur rectangulum H R Q ad quadratum R Q ſeu H R ad R Q eandem proportionem habebit , quàm C A ad A D ; ſed in priori caſu facta eſt H I ad I K in eadem proportione , quàm C A ad A D ; igitur H R ad R Q eandem proportionem habebit quàm H I ad I K .

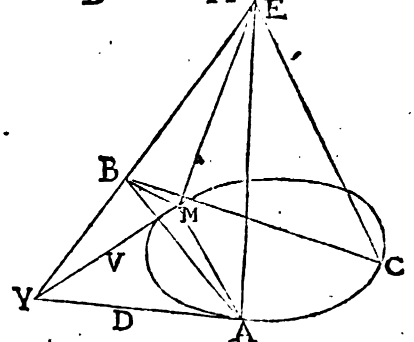
e Ergo diuidendo HK maior ad minorem KI erit vt minor HQ ad maiorem QR , &c. *Ideſt quia H R ad R Q eſt vt H I ad I K , & diuidendo H Q ad Q R eandem proportionem habebit quàm H K ad K I , & permutando H Q ad H K erit vt Q R ad K I : quod eſt abſurdum ; quandoquidem in circulo ſubtenſa H Q à centro remotior minor eſt , quàm H K , at exterius comprehenſa Q R maior eſt , quàm K I . Quapropter fieri non poteſt , vt aliquis alius conus A Q P præter iam dictos contineat ellipſim A B C , & ſit ſimilis dato cono E F G . Textus ergo confuſus corrigi debebat .*

Ad propoſitionem 77. libri quinti egi de contactibus circulorum , & ſectionum conicarum , eorumque admirabilia ſymptomata à nemine adhuc quod ſciam excogitata patefeci , non tamen prædicta diſceptatio omnino perfecta , & abſoluta fuit : itaque iuxta loci exigentiam hic afferam coronidis loco eiuſdem doctrinæ complementum .

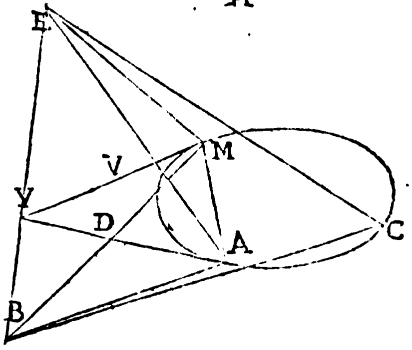


PROP. 15. Addit.

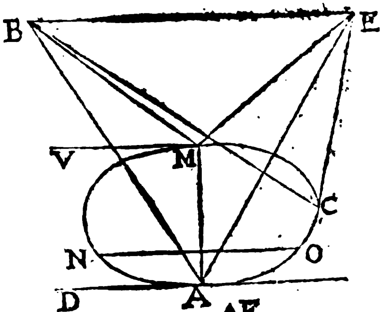
Per rectam lineam coniungentem vertices duorum conorum eandem baſim habentium ducere duo plana vtrumque conum tangentia : oportet autem rectam lineam vertices coniungentem extra peripheriam circuli communis baſis cadere .

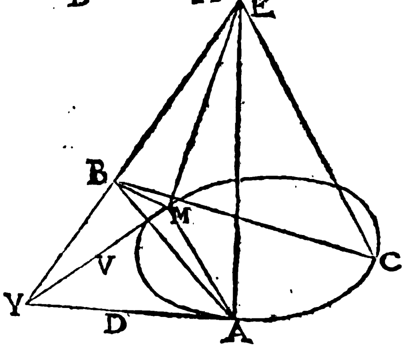


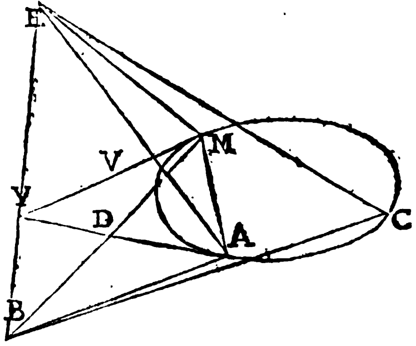
Circulus A M C ſit communis baſis duorum conorum , quorum vertices B , & E , & coniuncta recta linea B E extra peripheriam circuli A M C cadat : duci debent duo plana tangentia vtroſque conos per eandem rectam lineam B E extenſa . Et primo recta linea E B plano circuli A M C æquidiſtet , & ducto quolibet plano per E B circulum ſecante in recta linea N O erit ipſa N O parallela E B ; tunc ducatur diameter A M perpendicularis ad N O , & per A , & M ducantur A D , M V tangentes circulum , ſiue perpendiculares ad idem



idem diametrum M A; erunt igitur tangentes A D, & M V parallelæ eidem N O, erat autem E B parallela ipſi N O; igitur duæ circulum tangentes A B, & M V parallelæ ſunt idem E B; & propterea A D, & E B in eodem ſunt plano, vtrumque conum tangente cum per vertices E, & B ducatur, & per A D baſis circulum tangentem. Eadem ratione M V, & E B in eodem plano vtrumque conum tangente exiſtent. Si verò recta E B plano circuli non æquidiſtat producta alicubi planum eiuſdem circuli ſecabit extra circulum ipſum, vt in Y, & tunc quidem à puncto Y extra circulum poſito ducantur duæ contingentes Y A, & Y M. Manifeſtum eſt, rectas lineas A Y, B E in eodem plano iacere: tranſit verò prædictum planum per vertices B, & E duorum conorum, atque per Y A tangentem circulum baſis communis; igitur planum A E B vtrumque conum contingit. Eodem modo planum E B M ex altera parte vtrumq; conum tanget. Et hoc erat faciendum.

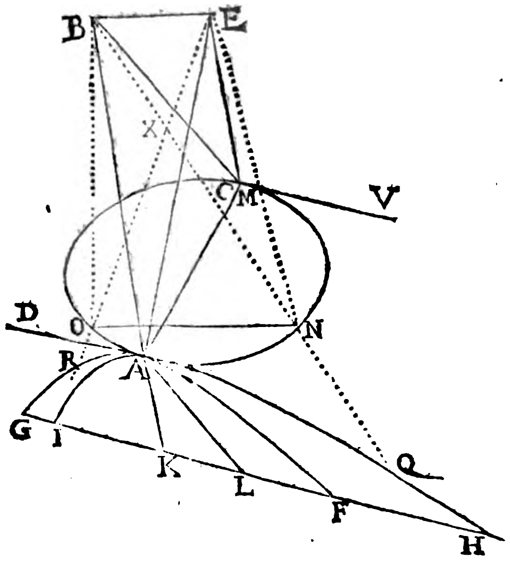




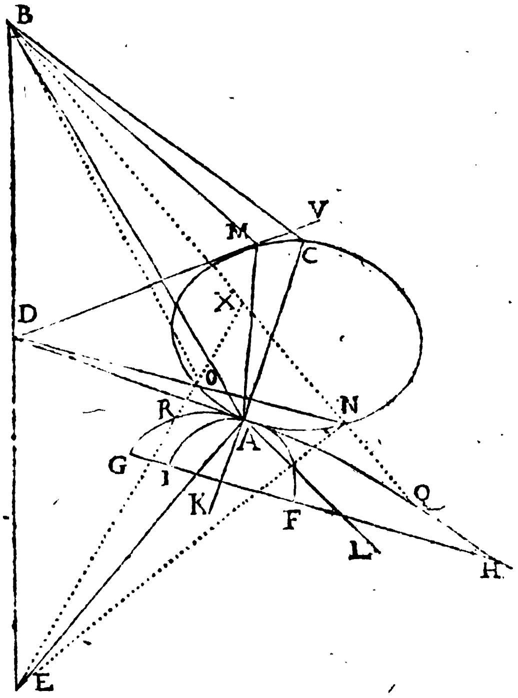


PROP. 16. Addit. *In qualibet coniſectione H A I cuius diameter A L non ſit axis, per eius verticem A aliam coniſectionem in eodem plano deſcribere, quæ priorem abſcindat, atque eadem recta linea vtramq; ſectionem tangat in puncto mutuæ earum abſciſſionis.*

Sicut in constructione prop. 11. & 12. addit. factum eſt, deſcribatur conus B A C comprehendens ſectionem H A I, cuius vertex B baſis circulus A M C per ſectionis verticem A ductus, & triangulum per axim B A C efficiat diametrum A L: & in duobus circulis æquidiſtantibus A C M, & in eo, qui per ſectionis baſim H I ducitur idē planum ſectionis conicæ deſignet duas parallelas A D, H I, & planum trianguli per axim efficiat circulorũ diametros C A, & eum, qui per L ducitur æquidiſtantes inter ſe: ergo ſicuti baſis H I perpendicularis eſt ad circuli diametrum per L ductam, ſeu ad baſim trianguli per axim, ita D A



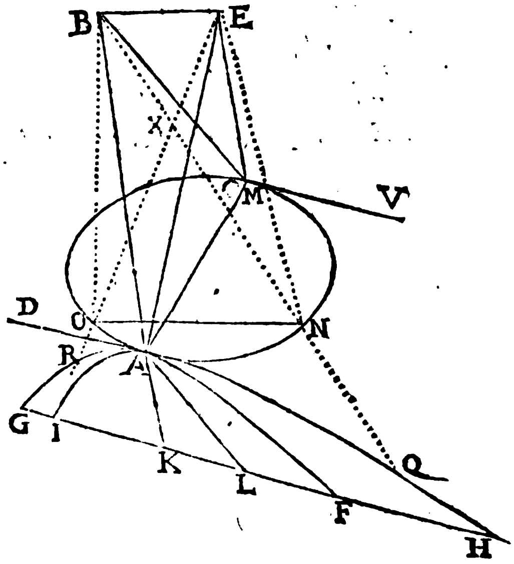
perpendicularis eſt ad circuli diametrum C A, & propterea A D, planorum H A I, & A C M communis ſectio, tanget circulum A C, & ideo ſuperficiem ipſam conicam, & ſectionem in ea exiſtentem continget; & diameter A L non erit perpendicularis ad tangentem, ſeu ordinatim applicatam A D per verticem A, alias A L eſſet axis, quod non ponitur. Deinde in plano D A B ex A ducatur recta linea A E perpendicularis ad A D ſupra, vel infra circulum, & vertice quolibet puncto E ſumpto in recta linea A E, & baſi circulo A C M fiat alter conus E A C, in cuius ſuperficie planũ D A H I deſignet ſectionẽ F A G, & in ea triangulum per axim E A C efficiat diametrum A K: Et quia eadem recta linea D A perpendicularis eſt ad A C, atque ad A E ſe ſecantes in A; ergo D A perpendicularis eſt ad planum C E A, atque planum D A C extenſum per perpendicularem D A, erit quoque perpendiculare ad planum trianguli per axim C E A, quare triangulum per axim efficiet diametrum A K, qua erit

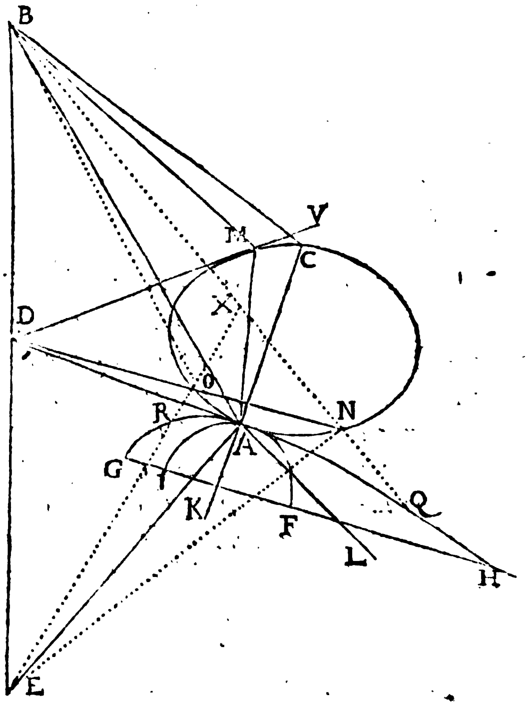


axis ſectionis F A G, atque D A perpendicularis erit ad axim A K exiſtentem in plano C E A, ad quod D A eſt perpendicularis, & cum ea conuenit: quare D A ordinatim ad axim applicata per verticem A tanget ſectionem F A G, qua prius in eodem puncto A tangebat ſectionem H A I in eodem plano exiſtentem; & propterea eadem recta A D vtramque ſectionem tangit in puncto A. Poſtea coniungatur recta linea B E, & quia recta linea B A, A D, A E ſunt in eodem plano tangente vtrumque conum (cum per vertices B, & E, atque per D A contingentem circulum baſis communis ducatur) & E A, & B A angulum conſtituunt, cum E A poſita ſit perpendicularis ad D A, at B A ad eandem ſit inclinata, & exiſtunt in eodem plano; ergo recta B E parallela eſt, aut ſecat contingentem D A extra circulum vt in D. Poterit igitur ex propoſ. 15. additarum duci per rectam B E planum aliud B E M V vtrumq; conum contingens, & per

32.lib. 1.

& per rectam B E extendatur aliud planum E N O B inter duo plana contingentia prope verticem A vbicumq; cadens, quod ſecet vtrumque conum, & circulum baſis in recta linea N O, & ſuperficies duorum conorum in lateribus B N Q, E N, B O, E O R, quarum B N occurret ſemiſectioni A H in quolibet eius puncto Q prope verticem A, eo quod portio A H, & peripheria A N C excepto puncto eius A totæ inter duo plana conos tangentia intercipiuntur; & eadem ratione E O occurret ſemiſectioni A G in quolibet eius puncto R vltra verticem A ad partes G. Et quoniam in eodem plano trianguli E N B (ſcilicet plani B N O E ſecantis vtrumque conum) à puncto E ducitur recta linea E O intra angulum N E B; ergo vlterius producta ſecabit latus B N ſubtendentem angulum N E B inter puncta N, & B, vt in X, & propterea recta linea N X intra triãgulum E N O, & ideo intra conum E A C intercepta erit; ſimiliter recta linea O X intra triangulum B N O, & intra conum B A C intercluſa erit: quare quodlibet aliud punctũ Q lateris conici B N citra, vel vltra intercluſã portionẽ N X cadet neceſſario extra ſuperficiem coni E A C, & ideo quodlibet punctum Q in productione lateris coni B N ſumptum & in ſemiſſe ſectionis conicæ H A prope verticem A cadet extra ſemiſſem ſectionis F A, quæ in ſuperficie coni E A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Pari modo quodlibet aliud punctum R lateris conici E O citra, vel vltra intercluſam portionẽ X O cadet extra ſuperficiem coni B A C, & ideo quodlibet punctũ R ſumptum in medietate ſectionis conicæ A G prope verticem A cadet extra medietatem ſectionis A I, quæ in ſuperficie coni B A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Igitur ſectio H A I abſcindit coniſectionem F A G in vertice communi A, vbi ambo tanguntur ab eadem recta linea A D. Quod erat faciendum.

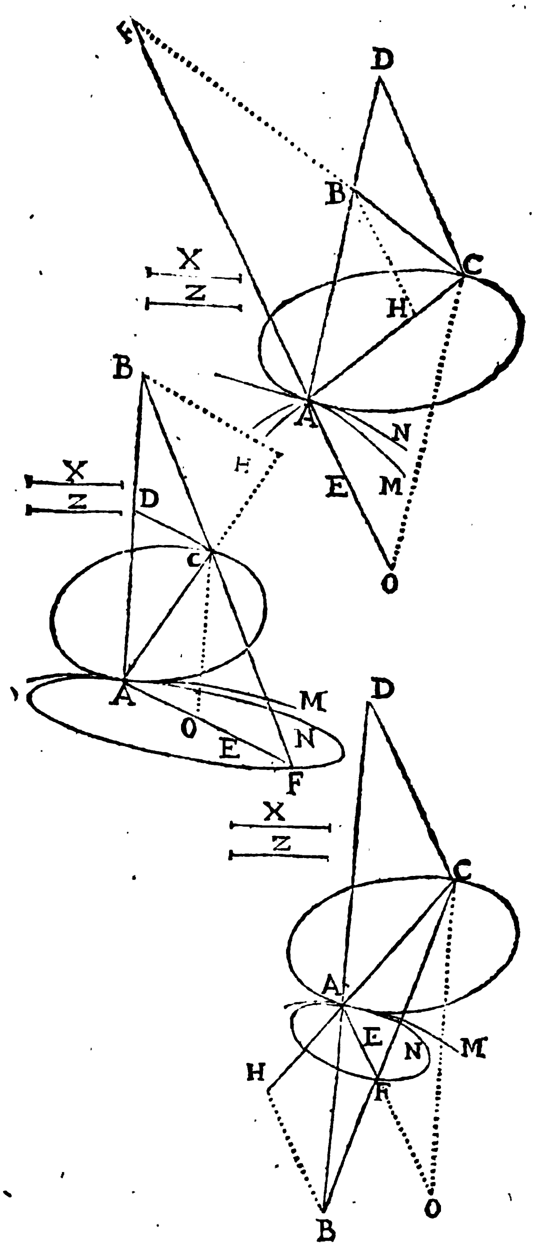




Si

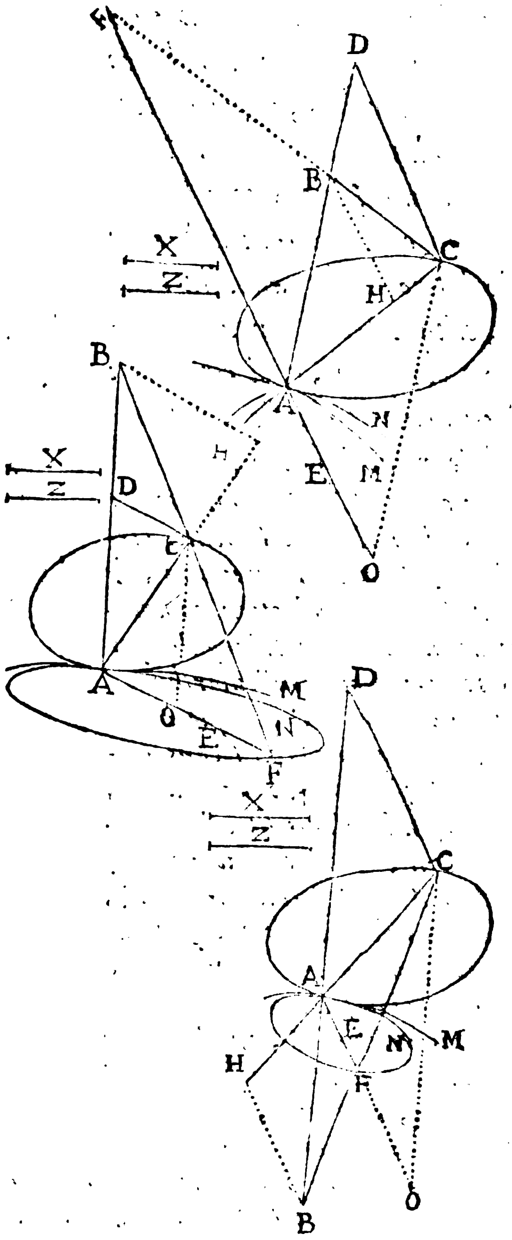
PROP. 17. Addit.

Si fuerint quotcunque coni ſuper circulum communem baſis deſcripti, habentes latus commune indefinitè extenſum in triangulis per axes ad baſes perpendicularibus, atque per terminum lateris communis ducatur planum efficiens coni ſectiones tangentes baſim: habebunt illæ latera recta æqualia inter ſe, eritquè ſectio ſingularis, ſi fuerit parabole, vel circulus: ſi verò fuerit ellipſis, aut hyperbole erunt infinitæ.



Sit conus A D C ſingularis, & A B C ſit multiplex, habentes circulum A C baſeos communem, & latus A B D productum commune ſumptum ſit in triangulis per axes conorum perpendicularibus ad circulum baſis B C, atque à termino A ducatur planũ ſecans circuli A C planum in recta linea, quæ perpendicularis ſit ad diametrum C A, quod efficiat in cono quidem A B C ſectionem A N, cuius latus rectum ſit X, & latus tranſuerſum A F: in cono verò A D C efficiat ſectionem A M, cuius latus rectum Z, & diameter communis A E; ſitque ſectio A N hyperbole, circulus, aut ellipſis circa axim maiorem, aut minorem; Sectio verò ſingularis A M in cono D A C ſit parabole, & ducatur B H parallela diametro ſectionis A E ſecans circuli diametrum A C in H: & ducatur C O parallela [illegible] A ſecans A E in O. Dico latus rectum Z paraboles A M æquale eſſe lateri recto X cuiuſlibet alterius ſectionis A N; & ſupponantur tres parabolæ A M inter ſe æquales earumq; latera recta Z æqualia, quæ in tribus figuris apponētur, vt confuſio euitetur. Quoniam vt latus rectum X ad tranſuerſum A F ſectionis A N, ita eſt rectangulum A H C ad quadratum B H: hæc verò proportio componitur ex ratione C H ad H B, & ex ratione A H ad H B: eſtque C A ad A F, vt C H ad H B (propter parallelas F A, H B, & ſimilitudinem triangulorum) & vt A H ad H B, ita eſt A C ad C D, ſeu ad 12. & 13 lib. 1.

A O (cum C D , & H B ſint parallelæ, atque D O ſit parallelogrammum) componunt verò hæ duæ proportiones rationem quadrati C A ad rectangulum F A O : ergo vt rectangulum A H C ad quadratum H B ; ita eſt quadratum C A ad rectangulum F A O , & propterea vt X ad A F , ita erit quadratum A C ad rectangulum F A O , ſed vt F A ad A D (ſumptis æqualibus altitudinibus A O , C D) ita eſt rectangulum F A O ad rectangulum A D C ; quare ex æquali X ad A D erit vt quadratum A C ad rectangulum A D C ; tandem vt Z latus rectum parabo-
11. lib. 1. *les A M ad D A ita eſt quadratum A C ad rectangulum A D C ; igitur X , & Z ad eandem D A habent eandem proportionem quàm quadratum A C ad rectangulum A D C , & propterea latera recta X , & Z æqualia ſunt inter ſe . Et quoniam in quolibet caſu ſectionis conicæ A N latus rectum X ſemper æquale eſt Z lateri recto vnius eiuſdemq; paraboles A M ; ergo latera recta X reliquarum omnium ſectionum æqualia ſunt inter ſe , licet ſectiones illæ ſint inæquales , & habeant latera trãſuerſa inæqualia , imò neque eiuſdem ſpeciei ſint . Quod erat propoſitum .*



Admiratione dignum præcipuè eſt in hac propoſitione , quod ſi ſectio A N fuerit circulus , vnicus tantummodò erit ; nam circuli latus rectum X æquale erit eius diametro , ſeu axi tranſuerſo A F ; eſtque ſemper latus rectum eiuſdem menſuræ , vt oſtenſum eſt ; igitur circuli diameter F A idem ſemper erit ; & propterea circulus , qui à tali plano generari poteſt ſingularis erit , nimirum ille , qui in vnico cono A B C efficit triangula per axim ſimilia , & ſubcontraria B A C , & B F A . Manifeſtum quoq; eſt parabolem A M ſingularem eſſe , nam ſupponitur idem circulus baſis A C , & in plano per axim coni cõmune latus A D B ſemper eoſdẽ angulos D A E , & D A C efficere conceditur ; igitur vt ſectio A M ſit parabole neceſſariò recta à puncto C duci debet parallela diametro paraboles A E ; cum ergo in triangulo per axim D A C detur baſis A C inuariabilis quia circulus vnicus ſupponitur eiuſ-

què

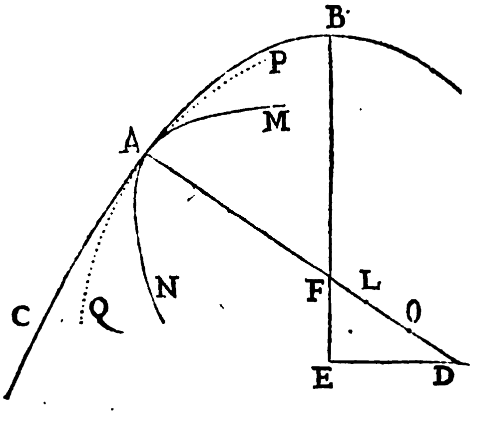
què anguli D, & D A C; dabitur quoq; eius ſpecies ſemper eadem, immo triãgulum per axim inuariabile erit, qui ſemper eodem modo inclinatur ad circulum baſis C A: & propterea conus D A C ſemper idem erit, & eodem modo ſectus, vnde ſectio paraboles A M eadem ſemper omnino erit, habens idem latus rectum Z. In hyperbole verò, aut ellipſi latera C B poſſunt ſupra, vel infra C D parallelam ipſi A E à puncto C ductam, extendi, & ſic efficientur tranſuerſa latera A F inæqualia inter ſe, cumque coni ſectiones A N habeant latera recta X æqualia inter ſe, latera verò tranſuerſa A F inæqualia, & hyperbolarum commune latus rectum habentium illa maior eſt, cuius axis tranſuerſus eſt minor: & duarum ellipſium commune latus rectum habentium, illa maior eſt cuius axis tranſuerſus eſt maior; igitur ellipſes, aut hyperbole, quæ in conis prædicta lege conſtructis deſcribuntur non ſingulares ſed infinitæ eſſe poſſunt. Vbi notandum eſt, quod ellipſes poſſunt eſſe ea quæ ad maiores, aut ad minores axes adiacent. Pari modo conſtat quod ſi in conis ſuperius expoſitis fiant ſectiones conicæ, conſtituentur ad eundem axim quinque ſectiones commune latus rectum habentes ſe ſe in eodem vertice tangentes, & earum intima erit ellipſis, quæ ad axim minorem adiacet, & non erit vnica, ſed multiplex, & omnes cadent intra circulum, circulus verò intra ellipſim ad axim maiorem accomodatam cadet, hæc verò intra parabolen conſtituetur, & inter circulum, & parabolen infinitæ ellipſes ſe in eodem puncto verticis tangentes collocari poſſunt. Tandem parabole comprahendetur ab infinitis alijs hyperbolis ſe ſe in eodem puncto tangentibus.

Maurol. 2. lib. 5. Conic.

Maurol. prop. 28. lib. 5. Conic.

PROP. 18. Addit. ex 51. 52. lib. 5.

Si in qualibet coniſectione B A C ducatur breuiſecans ſingularis D A, tunc quælibet alia coniſectio M A N, cuius axis ſit eadem breuiſecans, & A L ſemiſſis erecti eius minor ſit eadem ſingulari breuiſecante A D. Dico ſectionem M A N interius contingere priorem ſectionem B A C in A.



Quia A L minor eſt, quàm A D ſumi poterit recta A O maior quidem quàm A L, & minor quàm A D, & centro O interuallo O A deſcribatur circulus P A Q. Manifeſtum eſt, quod circulus P A Q ſectionem M A N exterius continget in A, at circulus P A Q interius priorem ſectionem B A C tanget, vt oſtenſum eſt, igitur coni ſectio M A N continget ſectionem B A C interius in A. Quod erat oſtendendum.

Maurol. pr. 4. 7. 10. 14. lib. 5. Conic. Prop. 12. addit. lib. 5.

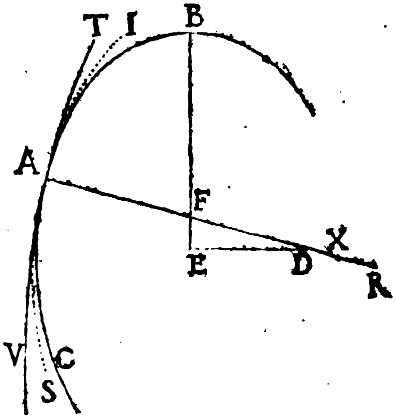
PROP. 19. Add.

Iiſdem poſitis ſi ſectionis T A V, cuius axis A D ſemiſſis eius erecti fuerit A R maior quàm D A, quæ eſt ſingularis breuiſecans ſectionis B A C. Dico, quod T A V exterius contingit ſectionem B A C in A.

Quoniam A R maior ponitur quā A D ſumi poterit recta A X minor quidem, quàm A R, ſed maior quā A D, & centro X interuallo X A deſcribatur circulus I A S. Patet (ex demonſtratis ſuperius) circulum I S extrinſecus tangere coniſectionem B A C; at ſectio T V extrinſecus circulum I S tangit in eodem puncto verticis A, ergo ſectio T V extrinſecus tangit coniſectionem B A C in eodem puncto A. Quod erat oſtendendum.

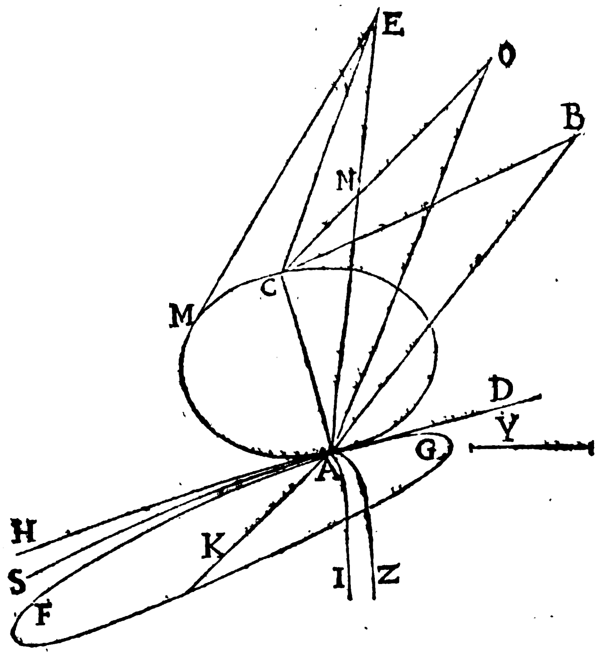
ex pr. 14. addit. lib. 5.

Maurol. pr. 3. 6. 9. 13. lib. 5. Conic.



PROP. 20. Addit. ex 16. addit. huius.

Si in eodem plano circulus F A G ſecuerit coniſectionem H A I in puncto A quod non ſit vertex axis eius, atque eadem recta linea D A contingat circulum, & ſectionem in eodem puncto A; Dico quod quælibet alia coniſectio S A Z in eodem plano cum illis poſita cuius axis ſit idem circuli diameter A K habens Y ſemiſſem lateris recti axis æqualē radio circuli F A G: ſecabit quoque eandem coniſectionem H A I in eodem puncto A, atque continget eandem rectam lineam A D in A.



Deſcribantur (vt in 16. additarum huius libri factum eſt) duo coni A B C, Scalenus comprehendens ſectionem H A I, & conus rectus E A C comprehendens circularem ſubcontrariam ſectionem F A G, quorum baſis communis ſit

circulus

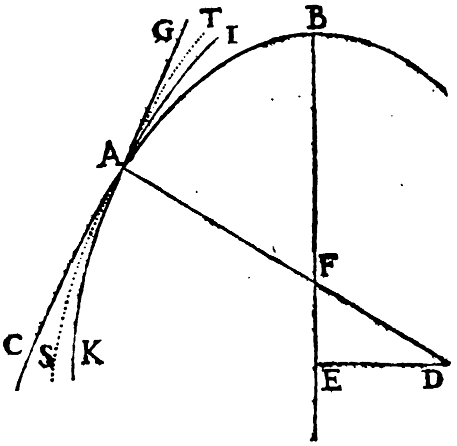
circulus A M C, ita vt idem planum per vertices conorum B, & E, & per A D contingentem eundem circulum baſis extenſum tangat vtrumque conum in lateribus A B, & A E. Poſtea ſi S A Z optatur parabole ducatur in plano A E C ex C recta C N parallela A K axi ſectionis F A G; ſi verò S A Z deſideratur hyperbole, aut ellipſis producatur axis A K in directum extra aut intra ſectionem, & in recta linea K A O ſecetur portio A O æqualis lateri tranſuerſo ſectionis S A Z, coniungaturque recta linea C O, ſecans E A in N (eo quod axis K A in plano A E C erecto ad circulũ A M C, exiſtit) & vertice N fiat alter conus N C A. Manifeſtum eſt in cono recto E A C deſignari ab eodem plano D A K circulum F A G, at in cono recto N A C efficietur alia ſectio conica circa communem axim A K, quæ ſe ſe mutuo, & eandem rectam lineam D A tangent, in communi vertice A, atque circuli F A G, & ſectionis genitæ in cono N A C duo latera recta erunt æqualia, & propterea ſectionis genitæ in cono N A C ſemilatus rectum æquale erit radio circuli Y ſeu dimidio erecti ſectionis H A I, & ſi habuerit latus tranſuerſum erit æquale A O; ergo ſectio genita in cono N A C, & ſectio S A Z circa communem axim A K habent latus rectum cummune duplum ipſius Y, & etiam commune latus tranſuerſum A O: Quare ſectio genita in cono N A C, & S A Z æquales ſunt inter ſe, & congruentes; quapropter idem planum D A K, quod efficit in cono Scaleno B A C ſectionem H A I, deſignat quoque in cono recto N A C ſectionem S A Z: habent verò hi duo coni circulum baſis communem, & idem planum per contingentem A D, & per vertices B, & N ductum vtrumque conum tangit; igitur (vt demonſtratum eſt in 16. Addit. huius) ſectio conica S A Z abſcindet aliam ſectionem H A I, & ambæ tangentur ab eadem recta linea D A in eodem puncto mutuæ abſciſſionis A. Quod erat propoſitum.

Prop. 17. addit. huius.

10. huius.

PROP. 21. Addit.

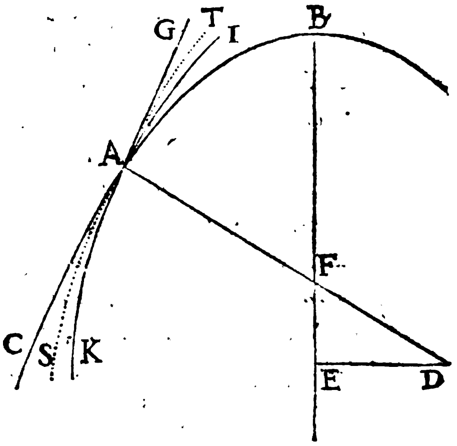
Si in qualibet coniſectione B A C ducatur breuiſecans ſingularis D A, & quælibet alia coniſectio I A K, cuius axis ſit D A, atque ſemiſſis lateris recti axis ſectionis I A K ſit æqualis breuiſecanti D A. Dico, ſectionem I A K contingere eandem rectam lineam G A, quàm tangit ſectio B A C, & abſcindere reliquam coniſectionem in eodem puncto A.



Deſcribatur centro D interuallo D A circulus T A S conſtat (ex prop. 10. additarum libri quinti) circulum T A S ſecare coniſectionem B A C in A, cumque circa eundem axim D A ponantur circulus T A S, atque coniſectio I A K, cuius lateris recti ſemiſſis æqualis eſt D A radio circuli T A S, ergo coniſectio I A K abſcindit coniſectionem B A C in eodem puncto A, in quo ſecatur à circulo T A S, & tanguntur ab eadem contingente G A in puncto A. Quod erat, &c.

20. addit. huius.

PROP. 22. Addit. *Sectionum conicarum circa axim communem poſitarum datam coni ſectionem abſcindentium non in eius vertice, quas omnes eadem recta linea contingat, erunt ſingulares tantummodo parabolæ, & circulus, ellipſes verò, & hyperbole erunt infinitæ.*



*Quoniam circa communem axim D
A conſtitui poſſunt parabolæ, circulus,*
Prop. 17. addit. huius. *infinitæ hyperbolæ, & infinitæ ellipſes
habentes ſemilatus rectum axis æqualẽ
ſingulari breuiſecanti D A in ſectione*
Prop. 21. addit. huius. *conica B A C educto, & hæ omnes abſcindunt
coniſectionem B A C in A.
Ergo patet propoſitum.*

Hinc colligitur dari non poſſe coniſectionem minimam extrinſecus tangentium, neque maximam intrinſecus tãgentium eandem coniſectionem in puncto A extra verticem axis poſito.

Nam quælibet coniſectio, cuius ſemie-
Prop. 18. addit. huius. *rectum axis minus eſt breuiſecante ſingulari D A intrinſecus tangit ſectionem
B A C in A, & ſi ſemierectum maius fuerit eadem D A extrinſecus eandem*
Prop. 19. addit. huius. *ſectionem B A C continget, neque vnquam ceſſant prædicti contactus extrin-
ſeci, vel intrinſeci quouſque ſemierectum axis efficitur æquale breuiſecanti D*
Prop. 21. addit. huius. *A : at tunc non amplius contingit, ſed ſecat eam in A. Quare patet propoſi-
tum.*

Conſtat etiam quod parabolarum vnica tantummodò, & circulorum vnicus etiam abſcindit coniſectionem B A C in A, & contingit eandem contingentem A G in A.

At hyperbolarum, atque ellipſium abſcindentium eandem ſectionem B A C in A, quas omnes eadem recta linea A G tangit in A non poteſt aſſignari maxima, neque minima.

Nam vt dictum eſt ad 17. Additarum huius libri infinitæ hyperbolæ ſe ſe contingentes in vertice axis deſinunt in parabolam vnicam, & poſt parabolam interius ſe ſe ſucceſſiuè contingunt infinitæ ellipſes ad axim maiorem adiacentes, quæ deſinunt in circulum vnicum, ac poſt circulum interius eum contingunt infinitæ ellipſes ad axim minorem adiacentes, quarum omnium ſemierecta latera axium æqualia ſunt breuiſecanti ſingulari D A datæ ſectionis B A C. Quare patet propoſitum.

LIBRI SEXTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VII.

DEFINITIONES.

I.

SI diuidatur inclinatum ſecundum proportionem figuræ, aut addatur vni axium ellipſis linea, earumque differentia, aut aggregatum ad eandem lineam habeat eandem proportionem figuræ: vocabo homologam inclinati PRÆSECTAM.

II.

Et homologam erecti INTERCEPTAM.

III.

Atque punctum, quod eſt extremum ipſius interceptæ, & diametri: vocabo TERMINVM COMMVNEM.

IV.

Reliquum verò TERMINVM DIVIDENTEM.

V.

Et differentiam, vel ſummam lateris, & interceptæ: vocabo INTERCEPTAM COMPARATAM.

VI.

Differentiam verò, aut ſummam lateris, & præſectę: vocabo PRÆSECTAM COMPARATAM: hoc autem latus refertur ad diametrum, quæ biſariam diuidit lineam coniungentem verticem ſectionis, & terminum potentis huius lateris:

reliquæ verò lineæ referuntur ad hoc latus.

VII.

Inſuper vocabo duas diametros coniugatas, & æquales in ellipſi, ÆQVALES.

Et ſi quidem ad vtraſque partes axis ſectionis duæ diametri educantur, quæ ad ſua erecta eandem proportionem habeant, vtique vocabo eas ÆQVALES.

VIII.

Diametros verò æquales ad vtraſque partes duarum axium ellipſis cadentes, voco Homologas illius axis: ſuntque homologæ diametri in ellipſi tranſuerſa ad tranſuerſam, & recta ad rectam.

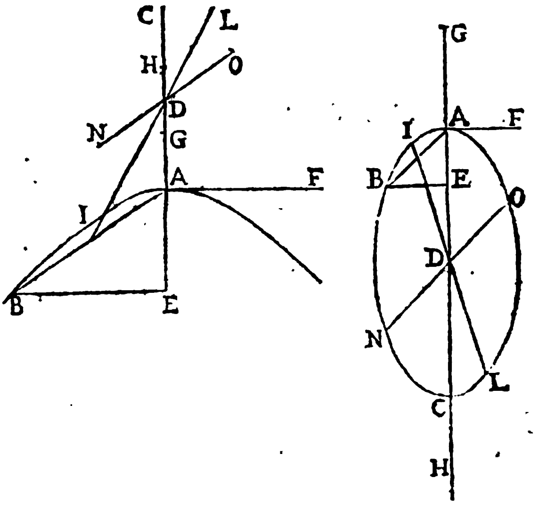
NOTÆ.

I. *Prima definitio breuiſſimè exponi poteſt hac ratione. Si axis tranſuerſus interius in hyperbola diuidatur, aut exterius in ellipſi, ſecundum proportionem figuræ, ſegmentum homologum axis tranſuerſi vocabo Præſectum, vt ſi fuerit hyperbole, vel ellipſis A B, cuius axis tranſuerſus A C, centrum D, latus rectũ A F, & in hyperbola ſecetur C A inter vertices A, & C; in ellipſi verò ſecetur exterius in puncto G, ita vt ſumma, vel differentia ipſarum G A, & axis C A, ideſt C G ad G A habeat proportionem figuræ ſcilicet eandem, quàm habet latus tranſuerſum C A ad latus rectum A F; tunc quidem vocatur recta linea C G Præſecta.*

II. *Atque G A vocatur Intercepta.*

III. *Punctum verò A extremum interceptæ G A, & diametri C A vocabitur terminus communis duarum linearum, ſcilicet axis C A, & additæ, vel ablatæ A G.*

IV. *Punctum verò G, in quo axis A C interius, vel exterius diuiditur ſecundum proportionem figuræ vocatur terminus diuidens; Si verò ſecetur C H æqualis A G vocabitur etiã C H intercepta, & A H præſecta, atque C terminus communis, & H terminus diuidens.*



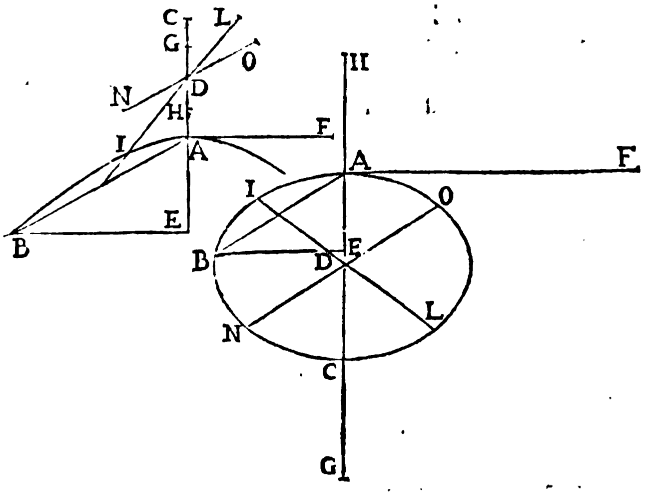
V. *Si diameter I L ſecuerit biſariam ſubtenſam A B à ſectionis vertice A eductam, atque à termino B*

ducatur

ducatur B E perpendicularis ad axim eum ſecans in E, tunc quidem axis ſegmentum C E ab oppoſito vertice C ductum, vocat interpres Latus. Poſtea ſummam in prima ellipſi, & differentiam in reliquis figuris lateris C E, & interceptæ H C, nimirum ipſam lineam H E, vocat Interceptam comparatam.

VI. *Et lateris C E, & præſectæ G C differentia in tribus prioribus figuris, & ſumma in figura quarta, ideſt G E, vocatur Præſecta comparata.*

VII. *Ducantur in ellipſi A B C duæ diametri coniugatæ I L, & N O, quæ inter ſe ſint æquales. Vel tranſuerſa I L ad eius latus rectum eandem proportionem habeat, quàm eius coniugata N O ad ſuum latus rectum; tunc quidem vocat pariter diametros coniugatas I L, N O Æquales.*

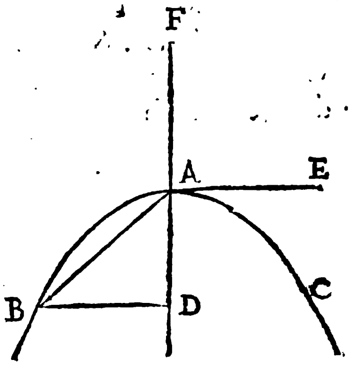


SECTIO PRIMA

Continens Propoſit. I. V. & XXIII. Apollonij.

PROPOSITIO I.

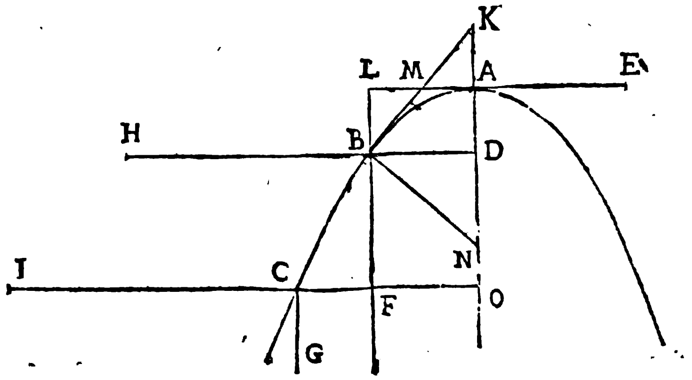
SI in parabola A B à termino axis A D educatur recta linea A B ſubtendens ſegmentum ſectionis A B, & ab eius termino ducatur B D ad axim perpendicularis; vtiquè illa chorda poterit eius abſciſſam D A in aggregatum abſciſſæ, & erecti.



Fiat A F æqualis erecto A E. Quia [a] quadratum A B eſt æquale quadrato D A cum quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A D in A F; igitur eſt æquale ipſi F D in D A. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO V. & XXIII.

IN parabola A B C cuiuſcumque diametri B F erectus B H excedit axis A D erectum A E quadruplo abciſſæ A D potentis
à termino illius diametri ad axim ductæ 23. & diametri C G, re- a
motioris ab axe, erectus C I maior eſt erecto B H diametri propinquioris B F quadruplo differentiæ axis abſciſſarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.

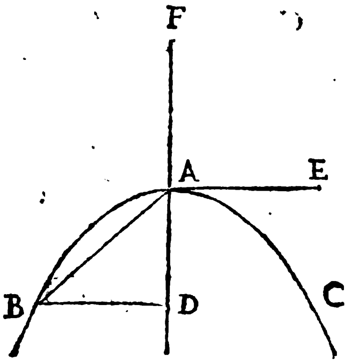


Educamus A L, B K tangentes in A, B, & B N perpendicularem ad
11. lib. 1. B K, erit K D in D N æquale quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A E
in A D; ergo K D ad D A eandem proportionem habet, quàm A E ad
35. lib. 1. D N: eſtque D K dupla ipſius A D (37. ex 1.) igitur A E eſt dupla
ipſius D N; quarè A E cum duplo D K, nempe cum quadruplo A D eſt b
æqualis duplo K N, nempe B H (eo quod N K ad B K tangentem ean-
44. lib. 1. dem proportionem habet, quàm aſſumpta M B ad B L coniugatam (57.
ex 1.) (propter ſimilitudinem duorum triangulorum); ergo B H æqualis
eſt quadruplo A D cum A E; quarè erectus diametri B F excedit A E
quadruplo A D. & A O maior eſt, quàm A D; ergo erectus diametri c
C G remotioris maior eſt, quàm erectus B F proximioris quadruplo D
O differentiæ abſciſſarum. Et hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. I.

QVia quadratum A B eſt æquale quadrato D A, &c. *Quoniam rectangulum F D A æquale eſt rectangulo F A D ſubſegmentis vna cum quadrato reliqui ſegmenti D A; eſtque latus rectum A E æquale A F;* a

A F ; igitur rectangulum F D A aquale eſt rectangulo D A E vna cum quadrato D A ; ſed quadratum ordinatim ad axim applicatæ B D aquale eſt rectangulo D A E ſub abſciſſa & latere recto contento ; igitur rectangulum F D A aquale eſt duobus quadratis B D, & D A : eſtquè quadratum A B ſubtendentis rectum angulum D aquale duobus quadratis B D, & D A ; igitur quadratum ſubtenſæ A B aquale eſt rectangulo A D E ſub abſciſſa D A, & ſub D F, quæ aqualis eſt eidem abſciſſæ cum latere recto. 11. lib. 1.



Notæ in Propoſit. V. & XXIII.

a ET diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior eſt erecto B H diametri propinquioris B F, &c. *Videtur hæc 23. propoſitio deficiens ; cum omnino inueriſimile ſit Apollonium non animaduertiſſe rem adeo facilem ; quod nimirum diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior ſit erecto B H diametri B F proximioris quadruplo differentiæ axis abſciſſarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.*

b Quare A E cum duplo K D, nempe cum quadruplo A D eſt æqualis duplo K N, nempe dimidio B H, &c. *Quoniam B H latus rectum diametri B F ad duplum contingentis B K eſt vt M B ad B L, ſed (propter æquidiſtantes, & ſimilitudinem triangulorum L B M, & K N B) vt M B ad B L, ita eſt duplum N K ad duplum K B ; ergo latus rectum B H aquale eſt duplo K N ; ſed prius oſtenſum eſt quod D A aqualis eſt medietati ipſius D K, & D N aqualis medietati ipſius A E ; igitur duplum K N aquale eſt duplo K D, ſeu quadruplo A D cum duplo D N, ſeu cum A E.* 49. lib. 1. 35. lib. 1.

c Et A O maior eſt, quàm A D ; ergo erectus diametri C G remotioris maior eſt quàm erectus B F proximioris, &c. *Addidi in hac concluſione verba hæc (quadruplo D O differētiæ abſciſſarum) quæ videntur deficere. Manifeſtum enim eſt, quod C I latus rectum diametri C G ab axe remotioris ſuperat latus rectum B H diametri F B axi propinquioris quadruplo D O differentiæ abſciſſarum axis ab ordinatis à verticibus earūdem diametrorum ductis, nam B H aqualis oſtenſa eſt E A vna cum quadruplo A D, eademque ratione C I aqualis eſt eidem axis lateri recto E A cum quadruplo A O ; ergo exceſſus C I ſupra B H erit aqualis quadruplo differentiæ D O.*

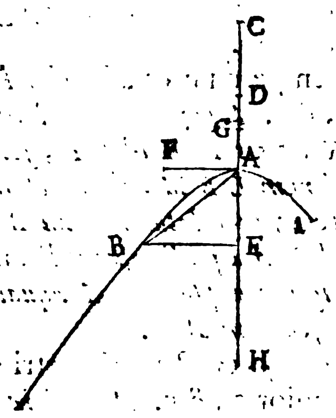
SECTIO SECVNDA

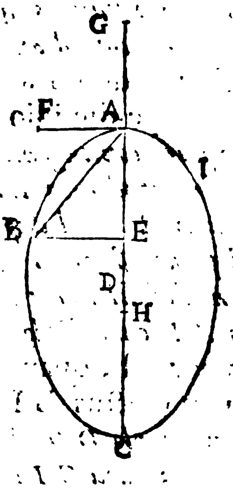
Continens Propoſit. II. III. IV. VI. & VII. Apollonij.

PROPOSITIO II. & III.

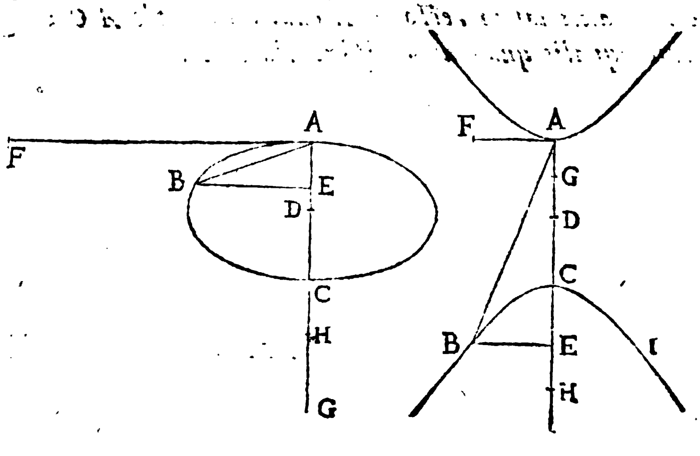
SI in ſectione A B à termino cõmuni A vtriuslibet interceptæ a educatur linea recta A B vſq; ad ſectionem, atquè ab eius termino B ad axim A E ducatur perpendicularis B E; erit quadratum A B ad rectangulum contentum à rectis lineis inter perpendicularis incidentiam, & terminos interceptæ, nempe A E in G E habebit eandem proportionem, quàm habet inclinatus, ſiuè tranſuerſus A C ad præſectam C G.

a





Sit itaque A F erectus A C, & ponamus A E in E H æquale quadrato B E; igitur A E in E H ad A E in E C, nempe H E ad E C eſt vt

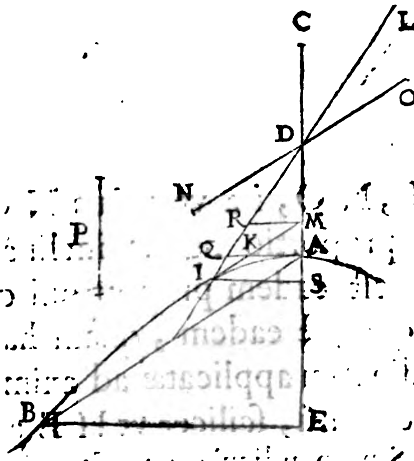


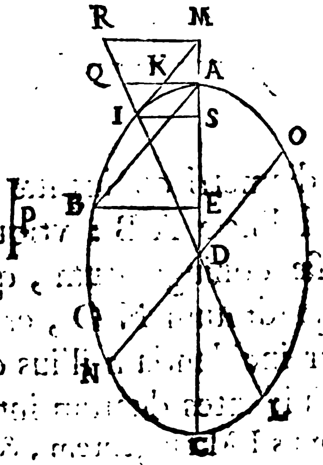
A F

b A F ad A C, & vt A G ad G C; ergo H E ad E C eſt vt A G ad G C; & componendo in hyperbolis, & diuidendo in ellipſibus, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & ſummas homologorum in reliquis, fiet A H ad G E, vt C A ad C G; ergo A H in A E; nempe quadratum A B ad G E in A E eſt vt C A inclinatus, ſiue tranſuerſus ad C G præſectam. Quod fuerat propoſitum.

PROPOSITIO IV.

a SI hyperbolen, aut ellipſin A B tangat recta linea I M in I, & occurrat axi A C in M; vtique ipſius I M quadratum ad quadratum ſemidiametri N D coniugatæ ipſi I L habebit eãdem proportionem, quàm axis contenta M S ad eius inuerſam S D.



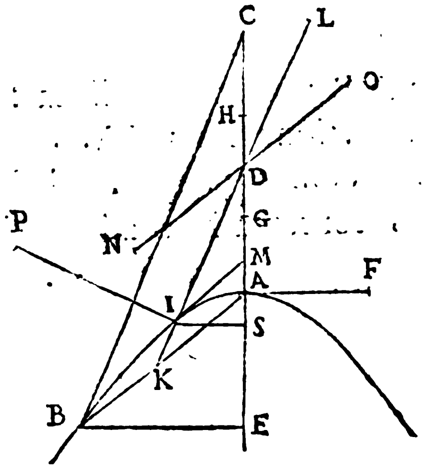


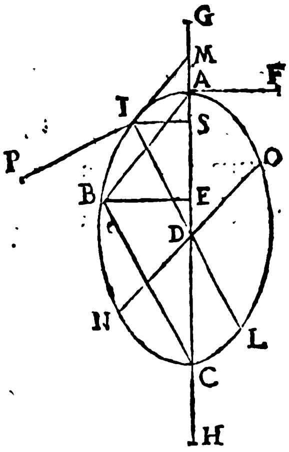
Educantur A Q, M R perpendiculares ad axim vſque ad I L, ponaturque linea P, quæ ad I M eandem proportionem habeat, quàm K I ad Q I, ſeu eandem, quàm habet M I ad I R; Ergo P eſt ſemiſſis erecti diametri I L (52. ex 1.) atque D N dimidium coniugatæ diametri N O poterit P in I D, atque I M poterit P in I R; & ideo I R ad I D, nempe M S contenta ad S D inuerſam eandem proportionem habet, quã quadratum tangentis I M ad quadratum N D ſemiſſis coniugatæ ipſius I L. Et hoc erat propoſitum. 50. lib. 1.

PROP.

PROPOSITIO VI. & VII.

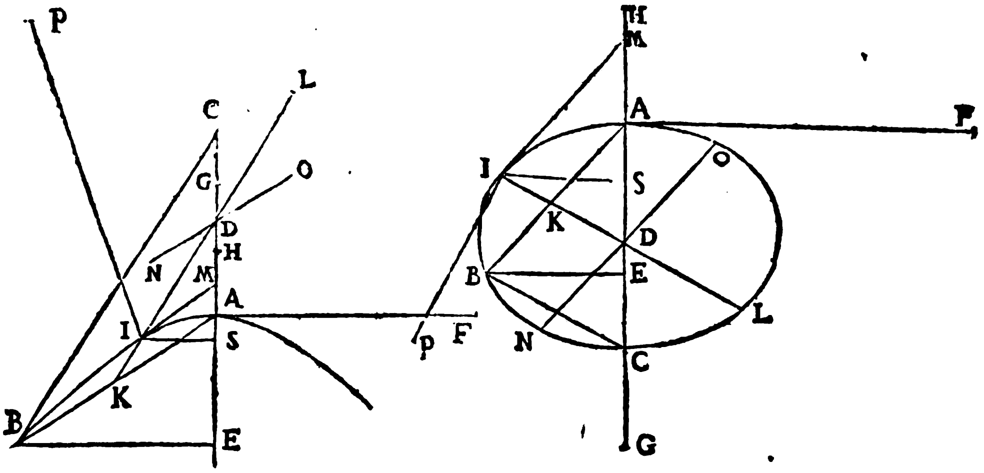
SI in hyperbole, aut ellipſi addantur axi tranſuerſo, vel auferantur ab inclinato duæ interceptæ A G, C H ab eius terminis A, C, atque à vertice ſectionis A educatur recta linea A B ad terminum alicuius potentialis B E, & per centrum D a





ducatur diametri coniugatæ I L, N O, ita vt rectus N O æquidiſtet ipſi lineæ A B: vtiquè proportio figuræ inclinatæ, vel tranſuerſæ coniugatarum, quæ eſt eadem proportioni quadrati I L ad quadratum N O, erit quoquè eadem, quàm habent lineæ inter incidentiam illius ordinatim applicatæ ad axim, & terminos diuidentes duarum interceptarũ, ſcilicet vt H E ad E G.

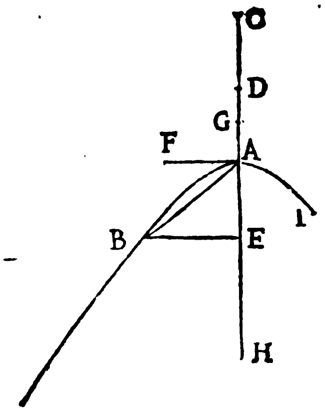
Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D eſt b æqualis D C, & A K æqualis K B (eo quod I L cum ſit coniugata N O bifariam diuidit A B) erit C B parallela ipſi I D, & propterea M S ad S D, nempè A E ad E C (propter ſimilitudinem triangulorum) eſt vt, quadratum I M ad quadratum N D (4. ex 7.) & quadratum I D ad quadratum I M eſt vt quadratum C B ad quadratum B A (propter ſimilitudinem triangulorum); ergo proportio quadrati I D ad quadratum N D eſt compoſita ex ratione A E ad E C, & ex ratione quadrati C B ad quadratum B A; ſed proportio quadrati C B ad quadratum B A eſt compoſita ex ratione quadrati C B ad C E in E H, & ex ratione C E in E H ad A E in E G, & ex ratione A E in E G ad quadratum A B; eſt vero quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H (3. ex 7.) atquè A E in E G ad quadratum A B eſt vt G C ad C A (2. ex 7.), & proportio C E in E H ad A E in E G, componitur ex ratione C E ad A E, & ex

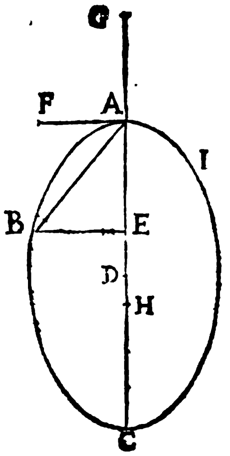


H E ad E G ; igitur proportio quadrati I D ad quadratum N D compoſita eſt ex proportione C A ad A H, & ex G C ad C A, atque ex C E ad E A, & A E ad E C, & tandem ex H E ad E G ; ſed C A ad A H, & G C ad C A componunt proportionem C A ad ei æqualem A C : ſimiliter C E ad E A, & A E ad E C eſt vt E C ad ſe ipſam: quare ſi hæ proportiones auferantur, remanebit E H ad E G, vt quadratum I D ad quadratum N D : nempe erit eadem ac proportio figuræ diametri I L. Quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. II. III.

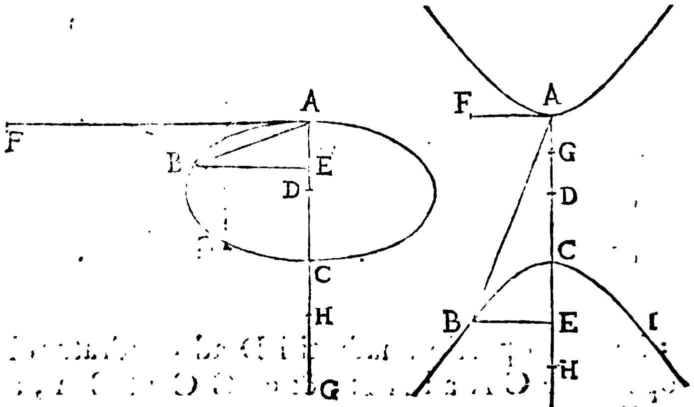
a SI in ſectione A B à termino communi A interceptæ, &c. *Addidi particulam* vtriuslibet *intercepta vt propoſitio efficiatur vniuerſalis comprahen-*





dens quartum caſum in poſtrema figura, quàm ſuperaddidi, vti neceſſariam pro intelligentia octauæ propoſitionis.

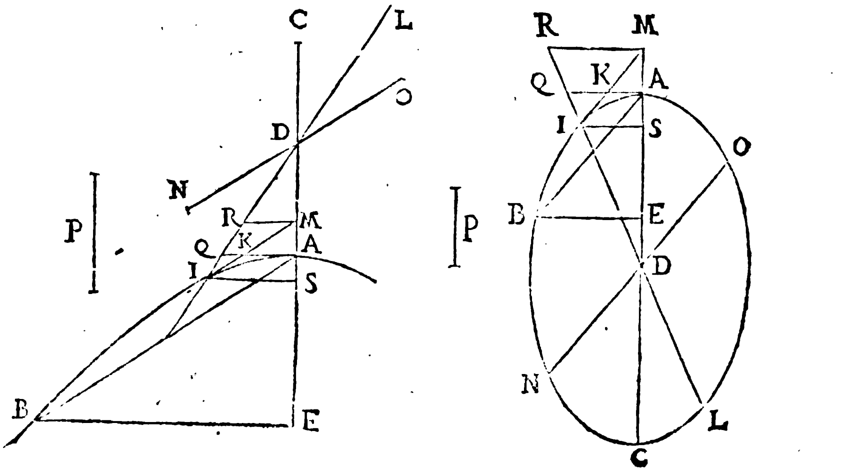
Et componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi prima deindè coniungendo in duabus figuris prioribus, & occurrere faciamus reſpectiuum cum reſpectiuo in reliquis figuris poſt inuerſionem, vt fiat, &c. b



Ideſt componendo in hyperbolis, & in ellipſibus comparando differentias terminorum ad conſequentes, deindè comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & ſumas in reliquis; tunc enim A H ad G E eſt, vt A C ad C G, & ſumpta communi altitudine E A, erit rectangulum H A E ad rectangulum G E A, vt A C ad C G. Sed rectangulum H A E æquale eſt quadrato A E vna cum rectangulo H E A, cui æquale eſt quadratum B E, ergo quadratum A B æquale eſt rectangulo H A E (propterea quod A B ſubtendit angulum rectum E in triangulo B A E) quare quadratū A B ad rectangulum A G E eandem proportionē habet quàm C A ad C G.

Notæ in Propoſit. IV.

SI hyperbolen, aut ellipſim A B tangat recta linea I M, & occurrat axi A C in M, vtique ipſius I M quadratum, &c. *Suppleri debet* a

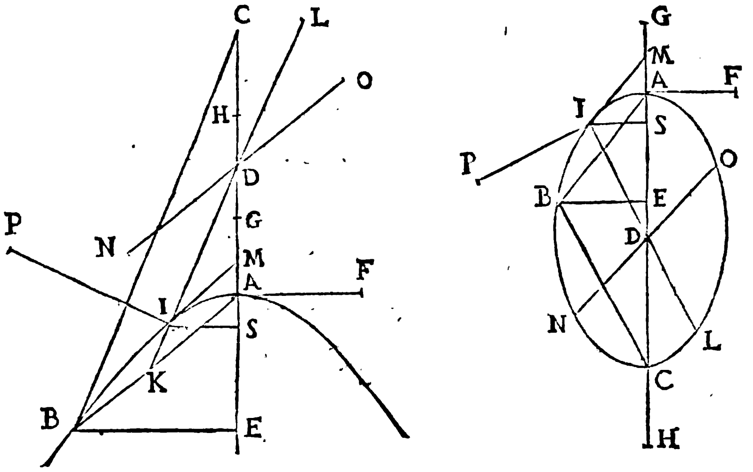


conſtru-

conſtructio, quæ deficit in hac propoſitione, vt nimirum ſenſus continuatus ſit à punctis M, A, I educatur ad axim perpẽdiculares M R, A Q, & I S ſecãtes diametros in R, Q, & S, & A Q, I M ſe mutuò ſecent in K, erit I S ordinatim ad axim applicata, & A Q, ſicuti etiam I M contingit ſectionem. vocat autem Interpres rectam lineam M S, quæ inter tangentem, & ordinatam interijcitur Contentam, atque D S vocat Inuerſam.

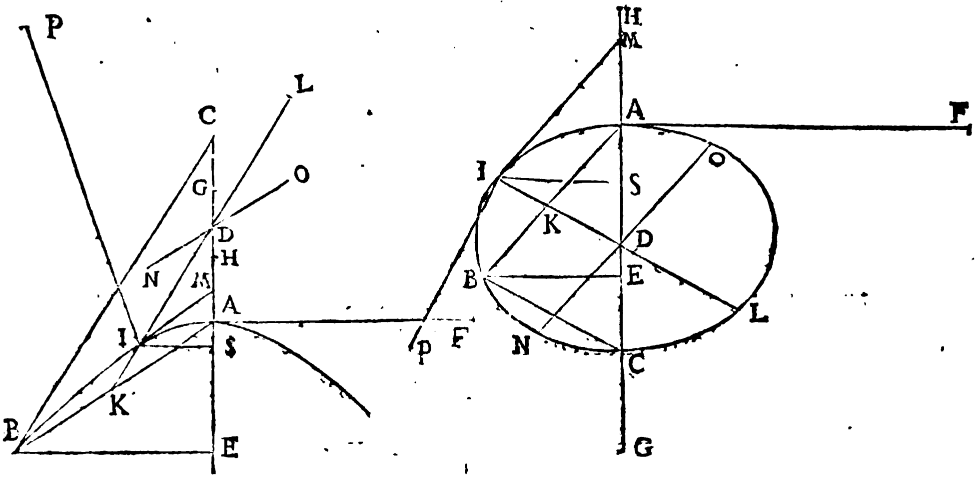
Notæ in Propoſit. VI. & VII.

a SI addatur duabus extremitatibus tranſuerſæ, aut inſiſtant ad duas extremitates recti, aut diminuatur à duabus extremitatibus inclinati A,

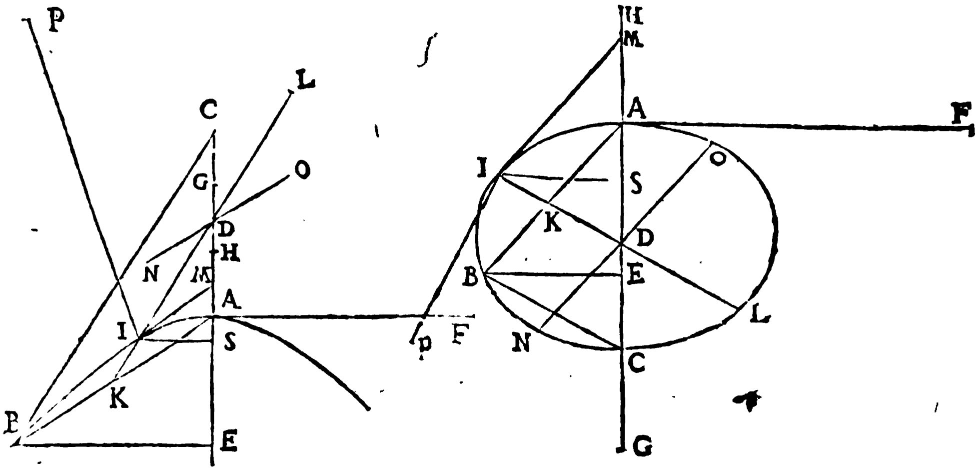


& C duo intercepta, &c. *Expungo verba appoſititia. Aut inſiſtat ad duas extremitates recti; quæ ſenſum perturbant.*

b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D eſt æqualis D C, &c. *Ideſt Educamus I M contingentem ſectionem in I, quæ*



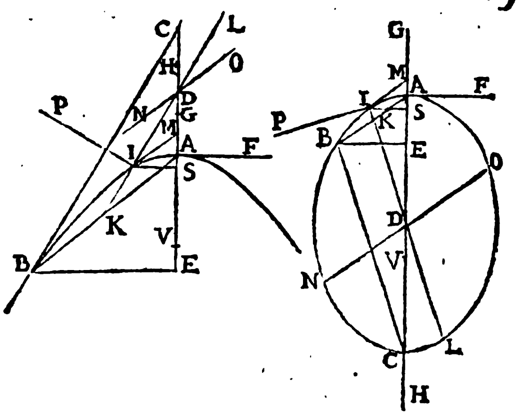
ſecet axim in M, & I S ad axim perpendicularem, ſeu ordinatim applicatam, eum ſecans in S. Et quia trianguli A C B duo latera A C, A B ſecantur proportionaliter, ſcilicet bifariam in D, & K; ergo I D parallela eſt baſi Prop. 5. lib. 2. *C B: eſtquè tangens I M parallela ipſi B A, cum ambo ad diametrum I L ſint ordinatim applicatæ; pariterquè I S parallela eſt B E (cum ſint ad axim perpendiculares) igitur triangula M I S, A B E ſimilia erunt; pariterquè triangula D I S, C B E erunt ſimilia: & ideo M S ad S I erit vt A E ad E B, & S I ad S D erit, vt B E ad E C: quarè ex æquali ordinata M S ad S D eandem proportionem habebit, quàm A E ad E C: eſtquè quadratum I M ad quadratum* Prop. 4. huius. *N D, vt M S ad S D; ergo quadratum I M ad quadratum N D eſt, vt A E ad E C, &c.*



SECTIO TERTIA

Continens Propoſit. Apollonij VIII. IX. X. XI. XV. XIX. XVI. XVIII. XVII. & XX.

VIII. In hyperbola, vel ellipſi quadratum axis inclinati, ſiue tranſuerſi ad quadratum ſummæ duarum diametrorum coniugatarum eiuſdem ſectionis habebit eandem proportionem, quàm productum præſectæ axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſummæ ſuæ interceptæ, & potentis comparatarum.



IX. Vel ad quadratum differẽtiæ coniugatarum eãdem proportionem habet, quàm productum præſectæ in ſuam interceptam comparatam ad quadratum differentiæ interceptæ, & potentis comparatarum.

X. Vel ad rectangulum ſub duabus coniugatis contentum eandem proportionem habet, quàm præſecta axis ad ſuam potentem comparatam.

XI. Ad ſummam verò duorum quadratorum ex coniugatis eandem proportionem habet, quàm præſecta ad ſummam præſectæ, & interceptæ comparatarum.

XV. Sed ad quadratum erecti vnius coniugatæ eandem proportionem habet, quàm præſecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſuæ præſectæ comparatæ.

XIX. Sed ad quadratum differentiæ vnius coniugatarum, & ejus erecti eandem proportionem habet, quàm productum præſectę axis illi diametro homologę in ſuam interceptam comparatam ad quadratum exceſſus præſectæ, & interceptæ comparatarum.

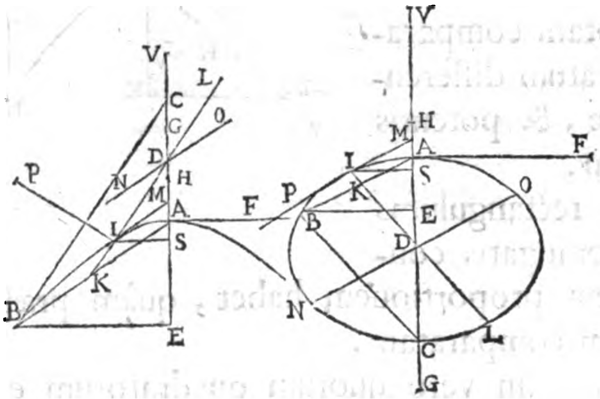
XVI. Ad quadratum verò ſummæ inclinatæ diametri, & eius erecti eandem proportionem habet, qnàm præſecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſummæ interceptæ, & præſectæ comparatarum.

XVIII. Sed ad figuram inclinatæ vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm axis præſecta ad præſectam comparatam.

XVII. Et ad ſummam duorum quadratorum inclinatæ, & erecti vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præſecta in interceptam comparatam ad duo quadrata præſectæ, & interceptæ comparatarum.

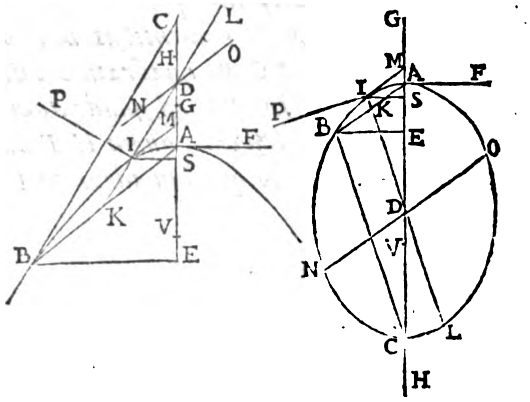
XX. Et tandem ad exceſſum duorum quadratorum laterum figuræ inclinatæ duarum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm productum præſectæ in interceptam comparatã ad exceſſum quadratorum præſectæ, & interceptæ comparatarum.

Iiſdem figuris manentibus ſit H V potens comparata, & I P ſit erectũ ipſius I L. Dico quod quadratum A C ad quadratum ſummæ I L, & N O eſt vt C G in E H ad quadratum E H V. Quia quadratũ A D æquale a



37.lib.1. eſt S D in D M (39. ex 1.) ergo S D in D M ad quadratum I D, nempe E C in C A ad quadratum C B (propter ſimilitudinem triangulorũ) eſt vt quadratum A D ad quadratum I D, nempe vt quadratum A C ad quadratum I L: eſtque quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H; ſeu ad C G (2. 3. ex 7.) ideſt vt A C in C E ad C G in C E, & permutando; igitur A C in C E ad quadratum C B, quod habebat (vt oſtenſum eſt) eandem proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum I L, erit vt G C in C E ad C E in E H, nempe vt C G ad E H, ſeu C G in E H ad quadratum E H; igitur quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in E H ad quadratum E H. Et quadratum I L ad quadratum N O, ſeu L I ad I P eſt vt H E ad E G (6. 7. ex 7.) ſcilicet vt quadratum E H ad H E in E G, quod æquale ſuppoſitum fuit quadrato H V; Ideoque I L ad N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad H V; quapropter quadratum I L, ſiue ad quadratum ſummæ ipſarum I L, N O eſt vt quadratum H E ad quadratum E H V; ſiue ad quadratum differentiæ I L, & N O erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & H V, ſiue ad I L in N O habebit eandem proportionem, quàm E H ad H V; ſiue ad duo quadrata I L, N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad ſummam E H, E G; eo quod quadratum I L ad quadratum N O eſt vt E H ad E G; ſiue inſuper ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratum E G; vel potius ad quadratum differentiæ I L, & I P erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & E G, vel rurſus ad quadratum rectæ lineæ ex L I, & I P compoſitæ, erit vt quadratum H E ad quadratum ſummæ duarum H E, E G, atque ad L I in I P eandem proportionem habebit, quàm H E ad E G; vel ad quadratum ipſius L I cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad duo quadrata b

drata H E, & ipſius E G, ſiue ad differentiam duorum quadratorum L
I, & ipſius I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E
ad differentiam duorum quadratorum H E, & E G. Et iam oſtenſum eſt
quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet,
quàm C G in H E ad quadratum H E; 8. ergo ex æqualitate quadratum
A C, ſiue ad quadratum ſummæ I L, N O eſt, vt C G in H E ad qua-
c dratum E H V; 9. ſiue ad quadratum differentiæ eius, quæ eſt inter I
d L, N O eſt vt C G in H E ad quadratum exceſſus E H ſupra H V: 10.
ſiue ad I L in N O erit, vt C G ad H V: 11. ſiue ad duorum quadrato-
e rum I L, N O ſummam, erit vt
f C G ad ſummam G E, E H; 12.
ſiue ad quadratum I P erit, vt
C G in H E ad quadratum E G:
g 13. ſiue ad quadratum differen-
tiæ L I, I P erit, vt C G in E
H ad quadratum differentiæ H
h E, E G: 14. ſiue ad quadratum
ex recta linea æquali ſūmæ dua-
rum L I, I P, erit vt C G in
E H ad quadratum ex recta li-
nea compoſita ex H E, E G:
i 15. ſiue ad L I in I P erit vt C G ad G E: 16. ſiue ad duo quadrata ex
k L I, & ex I P erit vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H: 17.
l ſiue ad differentiam duorum quadratorum ex L I, & ex I P erit vt C G
in E H ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G. Et
hoc erat propoſitum.



Notæ in Propoſit. VIII.

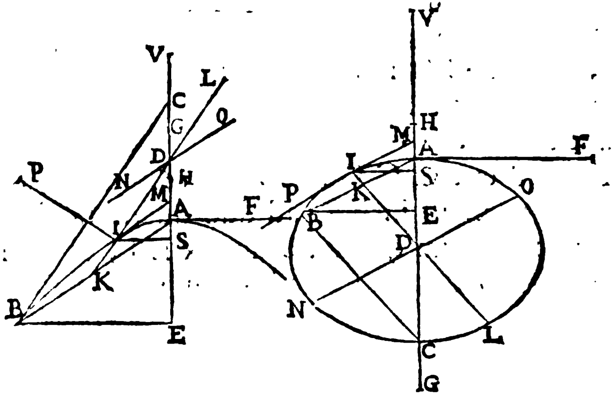
a Iſdem figuris manentibus ſit H V potens comparata, &c. *Præter definitiones ſuperius expoſitas hic duæ aliæ declarari debent, ignotum enim eſt quid nam nomine Figuræ comparatæ, & Potentis comparatæ intelligi debeat. Itaq; rectangulum ſub præſecta comparata, & intercepta comparata contentum, ideſt rectangulum H E G vocatur Figura comparata: & ſi quadratum rectæ lineæ H V æquale fuerit rectangulo H E G vocatur H V Potens comparata.*

b Ergo S D in D M ad quadratum D I, nempe E C in C A ad quadratū C E, &c. *AEqualia enim ſpatia, ſcilicet rectangulū S D M, & quadratū D A ad idem quadratum I D habent eandem proportionem; ſed quia triangula M I D, & A B C ſimilia ſunt, propterea quod latera homologa ſunt parallela inter ſe; pariterquè triangula D S I, & C E B ſunt ſimilia, vt oſtenſum eſt in 6. & 7. huius; ergo S D ad D I erit vt E C ad C B, atquè M D ad D I eſt vt A C ad C B erunt compoſitæ proportiones eadem inter ſe, ſcilicet rectangulum S D M ad quadratum D I eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E C A ad quadratum C B; quare vt quadratum A D ad quadratum D I, ſeu vt quadruplum ad quadruplum, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum I L, eo quod A D, & I D ſemiſſes ſunt diametrorum A C, I L.* 37. lib. 1.

Notæ

Notæ in Propoſit. IX.

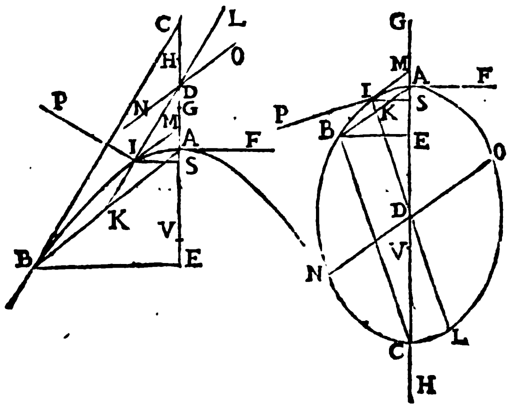
SIue ad quadratum differentiæ eius, quæ eſt inter I L, N O eſt vt C G in H E ad quadratum E H, H V, &c. C *Licet nouem ſubſequentes propoſitiones facile ex octaua deducantur, nequeunt tamen omnes ſimul conglobata vnico hauſtu deuorari; itaque operę pretium erit aliquantiſper breuitatem nimiam Arabici Interpretis relinquere. Tria demonſtrata ſunt in propoſitione octaua, quæ in ſequentibus nouem propoſitionibus vſum habent. Primò quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habeat, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum H E. Secundò quod I L ad N O eandem proportionem habeat, quàm H E intercepta comparata ad H V potentem comparatam.* 15. & 16. lib. 1. *Tertio quod quadratum I L ad quadratum N O, ſeu L I ad eius*



latus rectum I P, ſit vt H E ad E G, vel vt quadratum H E ad rectangulum H E G, vel ad quadratũ H V. Modo propoſitio nona ſic demonſtrabitur. Quia I L ad N O eandem rationem habet quàm H E ad H V, erunt antecedentes ad differentias terminorum proportionales, ideſt I L ad differentiam ipſarum I L, & N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad differentiam ipſarum E H, & H V: atquè quadratum I L ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V deſcriptum: erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G in H E ad quadratum E H; 8. huius. *ergo ex æquali ordinata quadratum A C ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V.*

Notæ in Propoſit. X.

d Siue ad I L in N O erit vt C G ad H V, &c. *Quia I L ad N O habebat eandem proportionem, quàm E H ad H V poſitis communibus altitudinibus I L, & E H habebit quadratum I L ad rectangulum I L in N O eandē proportionem, quàm quadratum E H ad rectangulum E H in H V; ſed quadratum A C ad quadratum I L habebat eandem proportionem, quàm rectangulum C G in E H ad quadratum E H; ergo ex aqualitate quadratum A C ad rectangulum ſub I L in N O eandem proportionem habet, quàm rectangulum C G in H E ad rectangulum E H in H V, ſiue quàm habet C G, ad H V.* ex prop. 8. huius.



Notæ in Propoſit. XI.

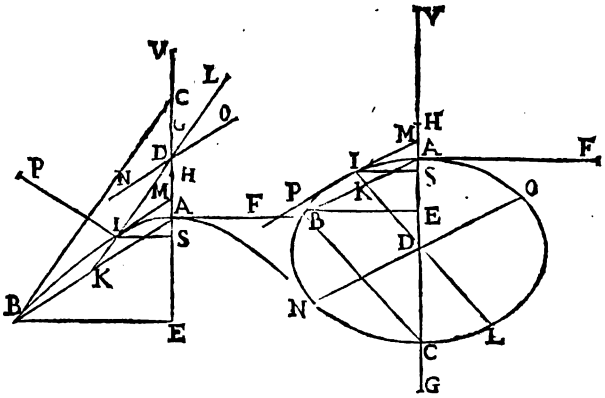
e Siue ad duorum quadratorum I L, N O ſummam erit vt C G ad ſummam G E, & E H, &c. *Quia quadratum I L ad quadratum N O erat, vt H E ad E G, antecedentes ad ſummas terminorum erunt proportionales, ſcilicet quadratum I L ad quadratum I L ſimul cum quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ſummam ipſarum H E, & E G; erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt C G ad E H; ergo ex aqualitate quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex N O ſimul ſumpta eandem proportionem habebit, quàm C G, vel H A ad ſummam ipſarum H E, & G E.* Prop. 8. huius.

Notæ in Propoſit. XV.

Siue ad quadratum I P erit vt C G in E H ad quadratum E G; &c. f *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G; ergo quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G; erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G, ſeu A H in H E ad quadratum E H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum G E.*

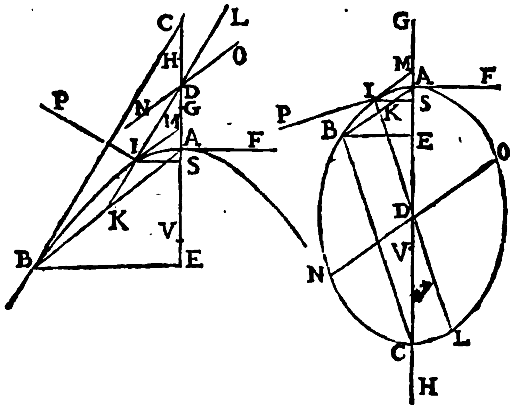
Notæ in Propoſit. XIX.

Siue ad quadratum differentiæ I. I, & I P erit vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G, &c. g *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G, comparando antecedentes ad terminorum differentias, ſcilicet I L ad differentiam ipſarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm E H ad differentiam ipſarum E H, & E G, & quadratum I L ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & I P deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipſarum H E, & G E deſcriptũ: erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex differentia ipſarum H E, & E G.*



Notæ in Propoſit. XVI.

h SIue ad quadratum ex recta linea æquali ſummæ duarum I L, & I P erit, vt C G in H E ad quadratum ex recta linea compoſita ex H E, E G, &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G comparando, antecedentes ad ſummas terminorum, erit I L ad I L, & I P ſimul ſumptas, vt H E ad H E, & E G ſimul ſumptas, & quadratum I L ad quadratum ex ſumma ipſarum I L, & I P deſcriptum, erit vt quadratum H E ad quadratum ex ſumma duarum H E, & E G deſcriptum; & erat prius quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex ſumma ipſarum I L, & I P deſcriptum eãdem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex ſumma ipſarum H E, & E G deſcriptum.*

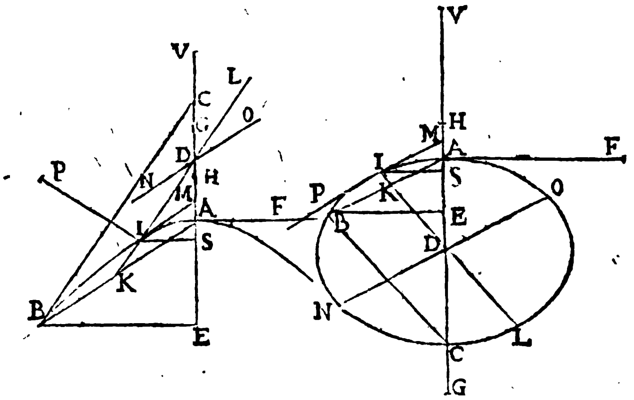


Notæ in Propoſit. XVIII.

i SIue ad I L in I P erit, vt C G in G E, &c. *Quia I L ad I P eſt vt H E ad G E poſitis communibus altitudinibus I L, H E habebit quadratum I L ad rectangulum ſub I L, & I P eandem proportionem, quàm quadratum H E ad rectangulum H E G: ſed quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habebat, quàm rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum L I P eandem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad rectangulum H E G, ſeu vt A H, vel C G ad G E.*

Notæ in Propoſit. XVII.

SIue ad duo quadrata ex I L, & I P erit, vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H, &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G, & quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G: & comparando antecedentes ad terminorũ ſummas quadratum I L ad quadratum I L vna cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad ſummam quadrati H E cum quadrato E G: ſed prius quadratum A C ad quadratum I L erat vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur quadratum A C ad ſummam quadrati I L cum quadrato I P eãdem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad quadratum E G vna cum quadrato E H.* k



Notæ in Propoſit. XX.

SIue ad differentiam duorum quadratorum I L, I P erit, vt C G in H E ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G, &c. *Quoniam vt dictum eſt quadratum I L ad quadratum I P eandem proportionẽ habet, quàm quadratum H E ad quadratum G E, & comparando antecedentes ad terminorum differentias quadratum I P ad differentiam quadrati I L à quadrato I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam inter quadratum H E, & quadratum E G: eſtque quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratũ H E; ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex I P differentiam eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratorum ex E G, & ex E H differentiam.* l

SECTIO QVARTA

Continens Propoſit. Apollonij XII. XIII. XXIX. XVII. XXII. XXX. XIV. &XXV.

XII. XIII. XXV. Differentia quadratorum duorum axium hyperboles æqualis eſt differentiæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

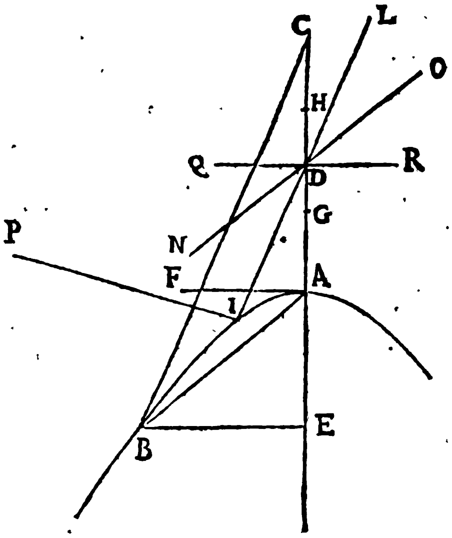
XXVIIII. Nempe differẽtiæ inter quadrata, à figuris earumdẽ diametrorum æquales ſunt.

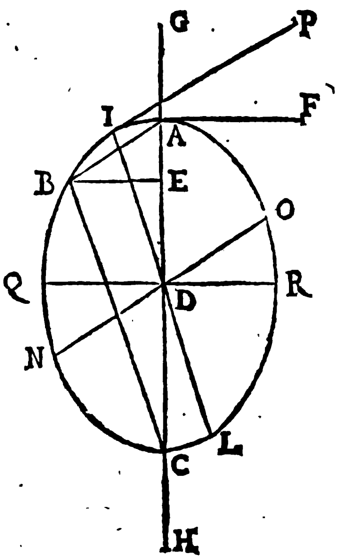
XXVII. Et differentia duorum axium maior eſt differentia quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

XXII. Et ſumma quadratorũ duorum axium ellipſis æqualis eſt ſummæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

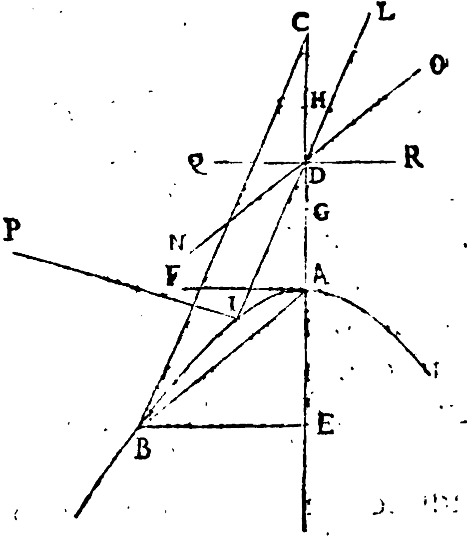
XXX. Nempe ſummæ quadratorum, & figurarum earundem diametrorum homologarum ſunt æquales.

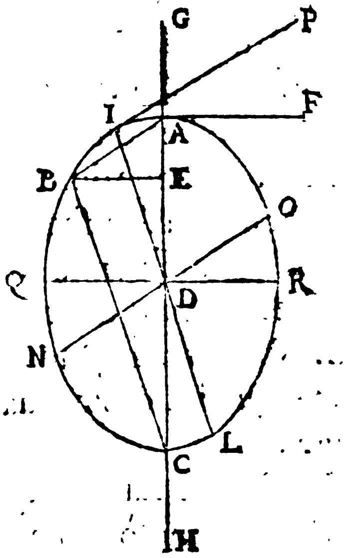
XIIII. Axis verò tranſuerſi quadratũ ad differentiam quadratorum duarum diametrorum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præſecta ad duplam inuerſæ.





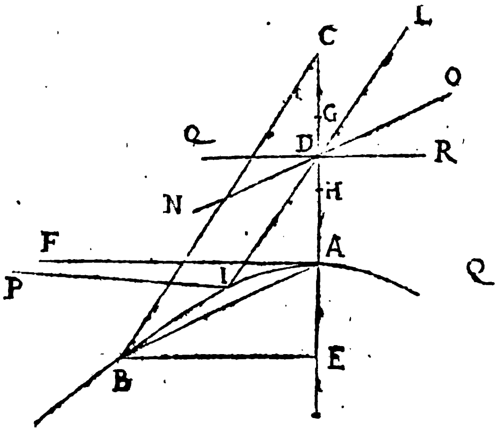
In eiſdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum ſui coniugati a ex Def. 1. & 2. (in propoſitione 12. 13. 25.) nempe C A ad A F erectum ipſius eſt, vt Præſecta C G ad Interceptam G A, ſiue ad C H; ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipſius, & in ellipſi ad eorundem ſummam eandem proportionem habet, quàm C G ad H G. Demonſtratum autem prius fuit, quadratum C A ad quadratum b I L eandem proportionem habere, quàm C G ad H E, & quadratum

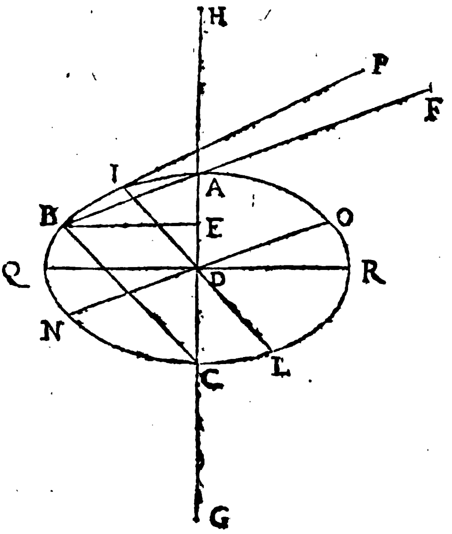




6. & 7. huius. I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; Inſuper quudratum I L ad ſummam quadratorum I L, N O in ellipſi, aut ad eorundem differentiam in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm H E ad H G; & in propoſitione 14. vt H E ad exceſſum H E, E G, quod eſt duplum D G; igitur ex æqualitate quadratum A C, ſiue ad ſummam duorum quadratorum I L, N O, quemadmodum habetur in propoſitione 22. & 30. ſiue ad eorundem differentiam, veluti habetur in propoſitionibus 12. 13. 14. eandem proportionem habebit, quàm C G ad H G, ſiue ad duplum D G, vt in propoſitione 14. & demonſtratum fuit in eadem proportione eſſe quadratum A C ad ſummam quadratorum A C, & eius coniugati, & eſt propoſitio 25. aut ad eorundem differentiam, & eſt propoſitio 12. quapropter ſumma quadratorum I L, N O coniugatarum in ellipſi, nempe quadratum I L vna cum eius figura eſt æquale aggregato quadrati A C vna cum quadrato eius coniugati 30. nempe quadrato A C, & illius figuræ, & in hyperbola differentia quadratorum I L, N O nempe exceſſus quadrati I L ſuper illius figuram æqualis eſt differentiæ duorum quadratorum A C, & recti illius nempe quadrato A C, & illius figuræ 27. & oſtenſum iam eſt, quod I c L in hyperbola maior eſt, quàm A C; ergo differentia A C & illius coniugati maior quàm differentia I L, & N O: atquè ſic oſtendetur, quod dif-

differentia I L, & N O maior ſit, quàm differentia quarumlibet duarum coniugatarum ab axi remotiorum. Et hoc erat oſtendendum.





Notæ in Propoſit. XII.

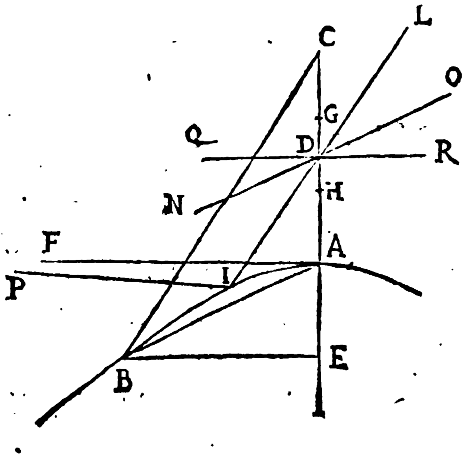
a IN eiſdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum ſui coniugati in propoſitione 12. & 25. nempe A C ad A F erectum ipſius eſt vt præſecta C G ad Interceptam G A, ſeu C H: ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipſius, & in ellipſi ad illorum ſnmmam eſt, vt C G ad H G, &c. *Ideſt. Quia quadratum A C ad quadratum axis ei coniugati Q R, ſiue C A ad eius erectum A F eandem proportionem habet, quàm præſecta C G ad Interceptam G A, vel ad C H, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in hyperbola, & ad terminorum ſummas in ellipſi, quadratum C A ad differentiam quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R habebit in hyperbola eandem proportionem, quàm C G ad differentiam inter C G, & C H: in ellipſi verò quadratum A C ad ſummam quadratorum ex A C, & ex Q R eandem proportionem habebit, quàm C G ad ſummam ipſius C G cum C H.* Defin. 1. & 2. huius.

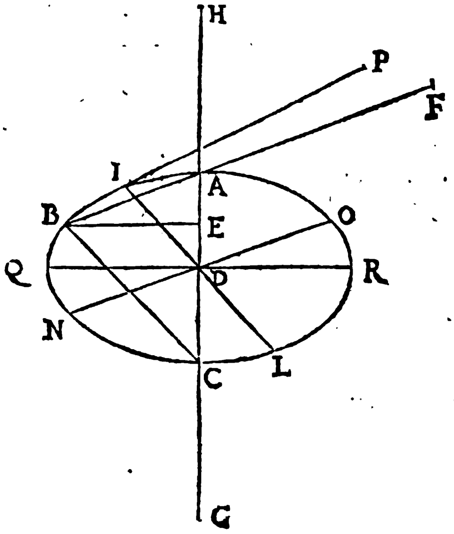
b Et quia iam demonſtratum eſt, quod quadratum C A ad quadratum I L ſit, vt C G ad E H, &c. *Relicta abſtruſa complicatione propoſitionum Arabici Interpretis diſtinctiori methodo, ſicuti in præcedenti ſectione factum eſt propoſitiones declarabimus. Quoniam in hyperbola quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G comparando antecedentes ad terminorum differentias, quadratum I L ad differentiam quadrati I L à quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipſarum H E, & E G differentiam; ſed quadratum A C ad quadratum I L eſt vt C G ad H E (veluti in propoſitione 8. oſtenſum eſt) ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit,* 6. huius.

habebit, quàm C G ad ipſarum H E, & E G differentiam, ſeu ad H G: ſed in eadem hyperbola quadratum A C ad quadratorum A C, & Q R differentiam eandem proportionem habet, quàm C G ad ipſarum C G, & C H differentiam, ſeu ad H G (veluti in principio huius propoſitionis dictum eſt) ergo quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R differentiam, eandem proportionem habebit, quàm ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam; & ideo in hyperbola differentiæ quadratorum axium A C, & Q R æqualis eſt differentiæ quadratorum I L, & N O coniugatarum.

Notæ in Propoſit. XIII.

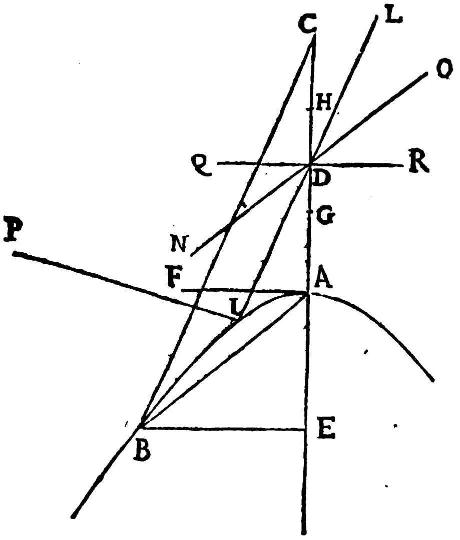
7. huius. *QVoniam in ellipſi quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad G E; comparando antecedentes ad terminorũ ſummas quadratum I L ad quadratorum ex I L, & ex N O ſummam eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipſarum H E, & E G ſummam: ſed quadratum A C ad quadratum I L eſt, vt C G ad H E (vt in octaua propoſitione dictum eſt) ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O ſummam eandem proportionem habebit, quàm C G ad ſummam ipſarum H E, & E G, ſeu ad G H: ſed in principio præcedentis notæ oſtenſum eſt, quod in ellipſi quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R ſummam eandem proportionem habet, quàm C G ad ſummam ipſarum C G, & C H, ſeu ad G H: quarè quadratum A C eãdem proportionem habet ad ſummam quadratorum ex C A, & ex Q R, quàm ad ſummam quadratorum ex I L, & ex N O; & propterea in ellipſi quadrata duorum axium A C, & Q R ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis duarum coniugatarum diametrorum I L, & N O ſimul ſumptis.*

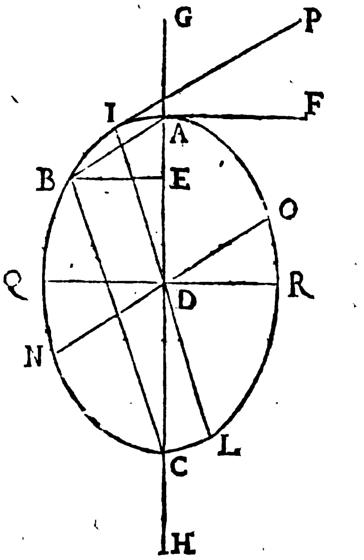




Notæ in Propoſit. XXIX.

QVoniam in hyperbola differentia quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R æqualis eſt differentia inter quadratum I L à quadrato eius coniugatæ N O; 12. huius. *eſtque Q R media proportionalis inter figuræ latera A C, & A F;* 16. lib. 1. *ergo rectangulum C A F ſub extremis contentum æquale eſt quadrato intermediæ Q R: Et propterea differentia inter quadratum A C, & rectangulum C A F æqualis erit differentia inter quadratum A C à quadrato Q R.*





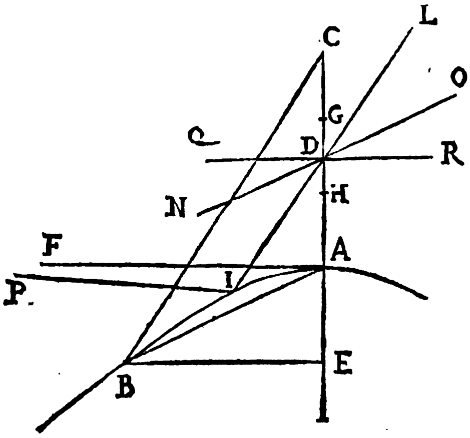
Pari ratione erit differentia quadrati I L à rectangulo L I P æqualis differentiæ quadrati I L à quadrato N O; & propterea in hyperbole differentia quadrati axis A C à rectangulo ſub figuræ lateribus contentum C A F æqualis eſt differentia quadrati diametri I L à rectangulo L I P ſub lateribus figuræ eius.

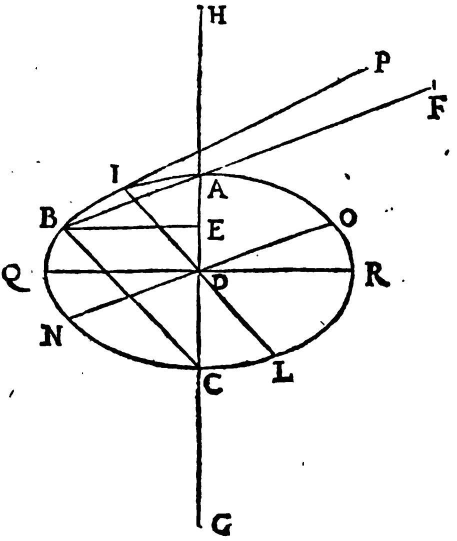
Notæ in Propoſit. XXX.

QVoniam in ellipſi quadratorum ex A C, & ex Q R ſumma æqualis eſt ſumma quadratorum ex I L, & ex N O: eſtque rectangulum C A F æquale quadrato Q R, & rectangulum L I P æquale quadrato N O Prop. 13. huius. ex 15. lib. 1. *(vt in præcedenti nota dictum eſt) igitur in ellipſi quadratum axis A C, & rectangulum C A F ſub eius lateribus cõtentum ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato ex I L cum rectangulo figuræ eius L I P.*

Notæ in Propoſit. XIV. & XXV.

QVoniam nedum in hyperbola, ſed etiam in ellipſi quadratum A C ad ſummam quadratorum ex I L, & ex N O eandem proportionem habet, quã A H ad ſummam ipſarum H E, & E G, atque quadratorum ex I L, & ex N O ſumma ad eorundem quadratorum differentiam eandem proportionem habet, quàm ipſarum H E, & E G ſumma ad earundem differentiam;



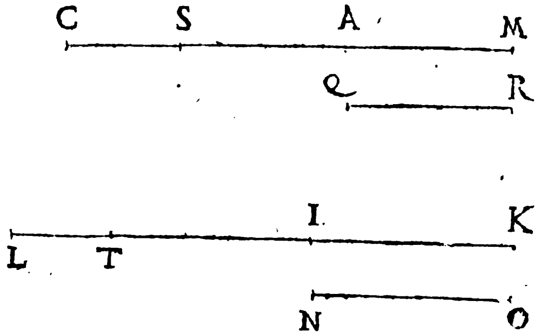


ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habet, quàm C G, ſiue H A ad ipſarum H E, & E G differentiam; ſed in ellipſi ipſarum H E, & E G differentia æqualis eſt duplo E D; igitur in ellipſi quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit, quàm præſecta C G ad duplum inuerſæ E D.

Notæ in Propoſit. XXVII.

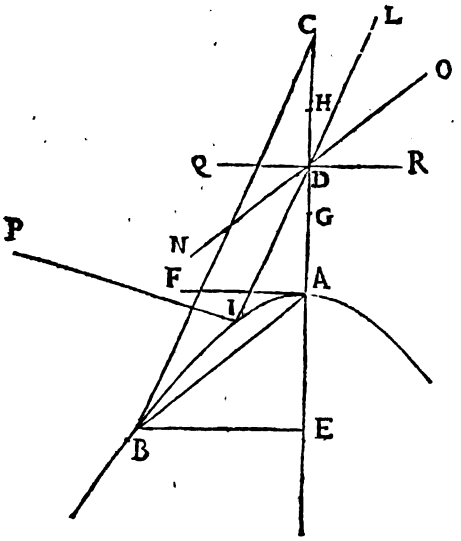
ET oſtenſum iam eſt, quod I L in hyperbola maior eſt, quàm A C; C ergo differentia A C, & illius coniugati maior eſt, quàm differentia homologorum ſuorum à ſuis coniugatis, & differentia proximioris homologi ad ſuam coniugatam maior eſt differentia remotioris à ſua coniugata, &c. *Hoc autem ſic demonſtrabitur. In diametris A C, & I L producatur A M æqualis Q R, & I K æqualis N O, & ab ijſdem ſecentur A S æqualis Q R, & I T æqualis N O. Quoniam M S biſariam ſecatur in A, & ei*

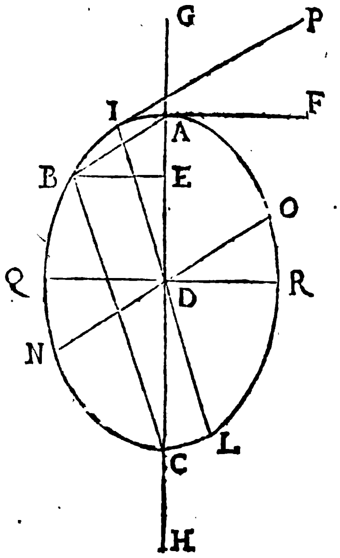
indirectum



indirectum additur S C, erit rectangulum M C S cum quadrato ex A S, ſeu ex Q R æquale quadrato ipſius A C; ergo rectangulum M C S æquale eſt differentiæ quadrati A C à quadrato Q R: pari ratione rectangulum K L T vna cum quadrato N O æquale erit quadrato I L: ergo ſimiliter rectangulum K L T æquale eſt differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; eſtquè quadratum I L maius quadrato A C, cum diameter I L in hyperbola maior ſit, quàm axis C A; igitur rectangulum K L T vna cum quadrato N O maius erit rectangulo M C S vna cum quadrato Q R: eſt verò rectangulum M C S æquale rectangulo K L T (cum ſint differentiæ quadratorum ex coniugatis diametris, quæ in hyperbola oſtenſæ ſunt æquales); ergo quadratum N O, ſcilicet reſiduum maioris ſummæ, maius erit quadrato Q R, quod eſt reſiduum ſummæ minoris: & propterea N O maior erit, quàm Q R: erat autem I L maior quàm C A; igitur I L cum N O, ſeu K L maior erit, quàm A C, & Q R ſimul, ſiue quàm M C: ſed in rectangulis M C S, & K L T æqualibus, vt K L ad M C, ita reciprocè C S ad L T; igitur C S, ſeu differentia ipſarum A C, & Q R maior eſt, quàm L T, ſeu differentia ipſarum I L, & N O in hyperbola.

Prop. 12. huius.



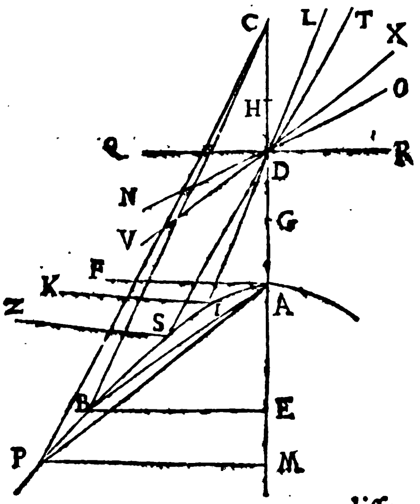


Si poſtea præter I L ponatur alia diameter ab axe remotior cum ſua coniugata erit ſimiliter differentia quadratorum ex diametris coniugatis remotioribus ab axi æqualis differentiæ quadratorum axium A C, & Q R, & ideo *æqualis erit differentia quadratorum ex I L, & ex N O; eſtque pariter diameter illa remotior ab axe maior quàm I L; ergo ſimili ratiocinio oſtendetur, quod differentia coniugatarum diametrorum ab axe remotiorum minor eſt, quàm differentia propinquiorum I L, & N O.*

SECTIO QVINTA

Continens Propoſit. XXI. XXVIII. XXXXII. XXXXIII. XXIV. & XXXVII.

AXes hyperboles ſi fuerint æquales, tunc quælibet diametri coniugatæ in illa ſectione æquales ſunt 21. ſi verò fuerit 28. vnus duorum axium in hyperbola, aut ellipſi maior, a
tunc eius diameter homologa maior erit ſua coniugata; quouſquè ad duas æquales diametros coniugatas in ellipſi perueniatur, & axis maior ad ſuum coniugatum, ſiuè ad erectum eius maiorem proportionem habet, quàm quælibet alia diameter eiuſdem ſectionis ad ſibi coniugatam, ſiue ad eius erectum; eritque proportio maioris diametri axi proximioris ad ſibi coniugatam, ſiue ad eius erectum maior proportione maioris coniugatarum ab illo remotioris ad minorem, ſiue ad eius erectũ. Et minima figurarum diametrorum erit figura axis inclinati, ſiue tranſuerſi, & maxima erit figura recti in ellipſi: atque figuræ reliquarum diametrorum (ſiue diametri ſint inclinatæ, vel tranſuerſæ) maiores ſunt, quã figuræ diametrorũ ab axi remotiorũ 24. Et in ellipſi erectus axis tranſuerſi minor eſt, quã erectus cuiuslibet alterius diametri, & erectus proximioris diametri minor eſt erecto cuiuslibet remotioris 37. Et exceſſus axis tranſuerſi ſuper eius coniugatum maior eſt, quã exceſſus homologarum diametrorum, ſuper ſuas coniugatas, & exceſſus proximioris homologæ ſuper ſuam coniugatam maior eſt, quàm exceſſus remotioris ſuper eius coniugatã. Et differentia duorum laterum figuræ axis maior eſt, quàm diffe-



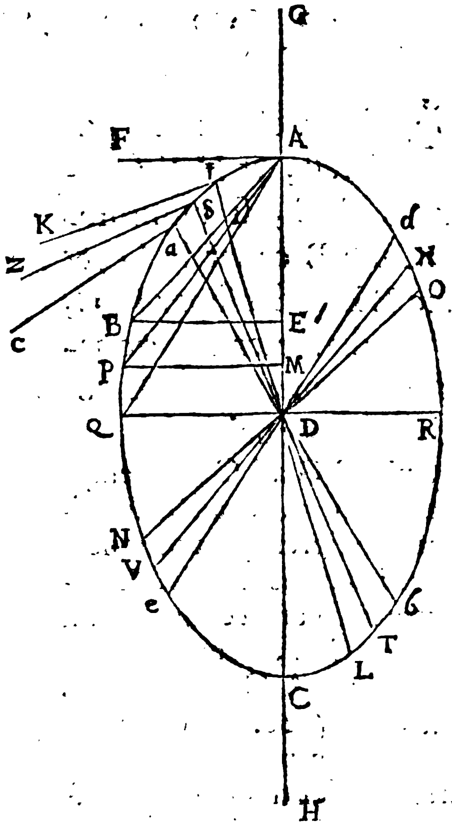
differentia duorum laterum figuræ ſui homologi; pariterque proximioris axi homologi differentia duorum laterum figuræ eius maior eſt, quàm differentia duorum laterum figuræ remotioris.

PROPOSITIO XXI. & XXVIII.

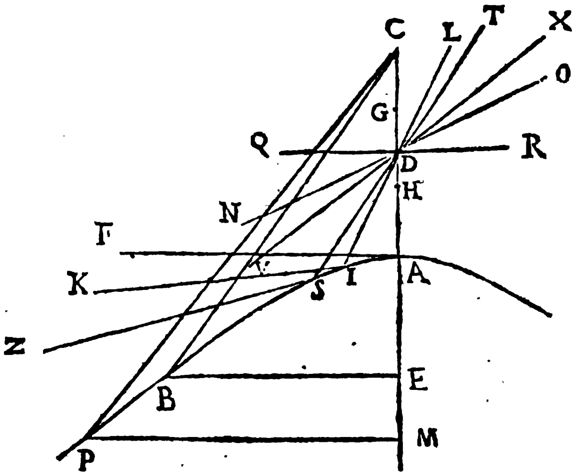
SIt itaque ſectio A B P, & duo axes coniugati eius A C, Q R, centrum D; ſintque I L, N O duæ aliæ diametri coniugatæ; pariterque S T, V X, & educamus ad axim C A M perpendiculares B E, P M. Dico quod ſi fuerit A C æqualis Q R; erit quoque I L æqualis ipſi N O, & S T ipſi V X. Si verò fuerit eorum aliquis reliquo maior, vtique eius homologa diameter maior quoque erit ſua coniugata, & ſimiliter in reliquis propoſitionibus.

Sit prius alter axis A C maior in prima figura, ſed Q R in ſecunda; ſintque A G, C H duæ interceptæ diametri A C. Et quia quadratum A C ad quadratum Q R, nempe A C ad eius erectum eſt vt A H ad H C, ſeu ad A G; & habet H A ad A G maiorem proportionem in prima figura, & minorem in ſecunda, quàm H E ad E G, quæ oſtenſa eſt (6. 7. ex 7.) vt quadratum I L ad quadratum N O, nempe I L ad eius erectum. Et ſimiliter proportio illa maior, aut minor eſt, quàm H M ad M G, quæ eſt vt quadratum S T ad quadratum V X; igitur A C ad Q R, ſiue ad erectum ipſius A C in prima maiorem proportionem habet, & in ſecunda minorem, quàm I L ad N O, ſiue ad erectum ipſius I L, ſiue quàm S T ad V X, vel ad erectum ipſius S T; ſed quia H E ad E G in prima figura maiorem proportionem, & in ſecunda minorem, quàm H M ad M G habebit I L ad N O maiorem proportionem in prima, & minorem in ſecunda, quàm S T ad V X, cumque H E in prima figura ſit maior, & in ſecunda minor, quàm E G, pariterque H M, quàm M G, erit I L in prima maior, & in ſecunda minor, quàm N O, ſimiliterque S T, quàm V X.

ex Def. 1. huius.



XXI. Deinde ſit A C æqualis Q R in hyperbola fiet A C æqualis erecto, & conuenient duo puncta H, & G in puncto D, eritque A C ad b



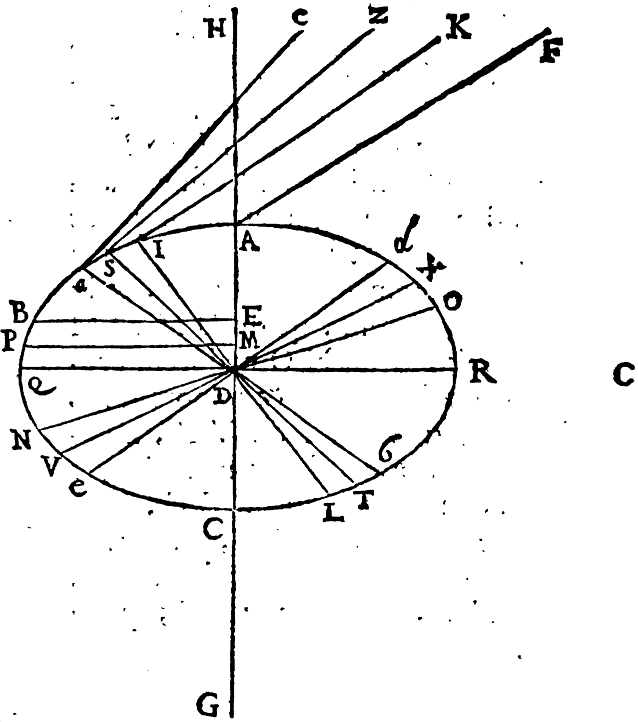
Q R vt A D ad ſe ipſam, ſiue vt A C ad ſe ipſam, quæ eſt vt D E ad ſe ipſam, & hæc oſtenſa eſt, vt quadratum I L ad quadratum N O; igitur I L, & N O ſunt æquales, & ſic demonſtrabitur, quod S T, V X ſunt æquales, & hoc erat propoſitum.

Prop.6. huius.

PROPOSITIO XXVI.

AT in ellipſi fieri poteſt, vt H E ſit æqualis E G, ſi nimirum punctum B cadat in Q, & tunc B E cadet ſuper Q D, & erit diameter I L æqualis ſuæ coniugatæ; & vocabo eas æquales.

Quia C G ad C H, nempe quadratum A C ad ſuam figuram maiorem proportionem habet in primis figuris, & minorem in ſecunda ellipſi, quàm C G ad G E, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipſius I L (18. ex 7.) & C G ad G E in primis figuris maiorem proportionem habet, & in

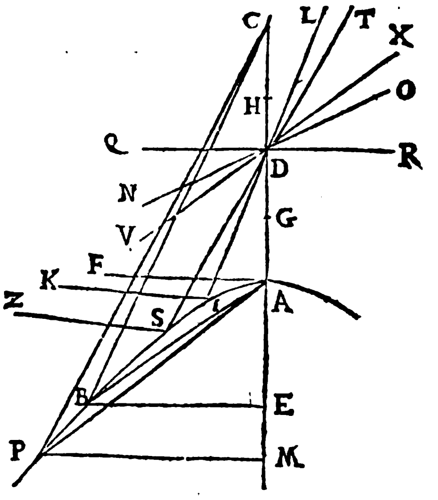


in ſecunda ellipſi minorem, quàm C G ad G M, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipſius S T (18. ex 7.) ergo figura ipſius A C eſt minor; in ſecunda verò maior quàm figura ipſius I L; & ſimiliter figura ipſius I L maior, aut minor eſt figura S T. Et hoc eſt propoſitum.

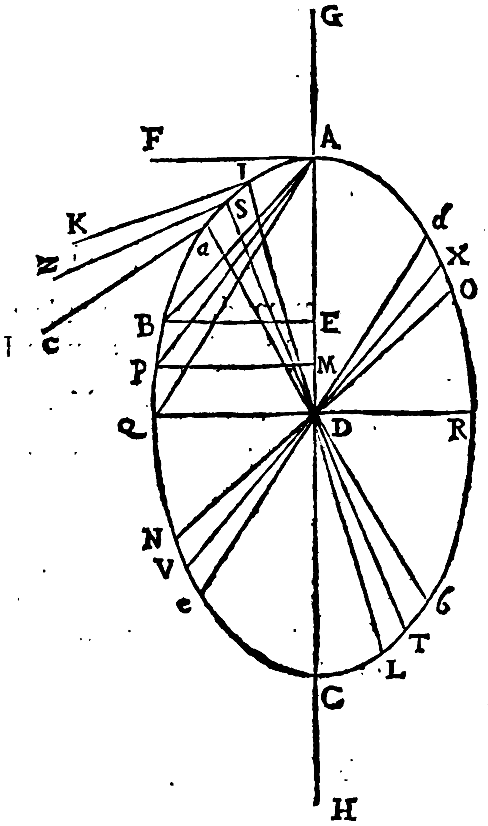
PROPOSITIO XXXXII.

IN hyperbole, & ellipſi sũma duorum axium minor eſt ſumma quarumlibet duarum cõiugatarum diametrorum eiuſdẽ ſectionis.

XXXXIII. Et planum ab eis contentũ minus eſt plano à duabus coniugatis contento, & planum à proximioribus axi coniugatis contentum minus eſt plano à remotioribus contento.



Iiſdem figuris manentibus, quia in hyperbole A C minor eſt quàm I
L, & I L, quàm S T; & ſiquidem
A C æqualis fuerit Q R, erit quo-
que I L æqualis N O, & S T æqua-
lis V X (21. ex 7.) ergo ſumma
ipſorum A C, Q R minor eſt, quã
ſumma I L, N O, & quàm S T,
V X: ſi verò A C non fuerit æqua-
lis ipſi Q R, vtique differentia duo- 12. 13. huius.
rum quadratorum A C, Q R æqua-
lis erit differentiæ quadratorum I L,
d N O: & propterea ſumma ipſorum
A C, Q R minor erit, quàm ſum-
ma I L, N O: & hæc ſumma ex
hac eadem demonſtratione minor
etiam erit, quàm ſumma duarum
S T, V X. At in ellipſi; quia A
e C ad Q R maiorem proportionem
habet, quàm I L ad N O (28. ex
7.) habebit quadratum ex ſumma
A C, Q R ad earundem duarum
ſummam quadratorum maiorem
proportionem, quàm quadratum
ſummæ I L, N O ad quadratorum

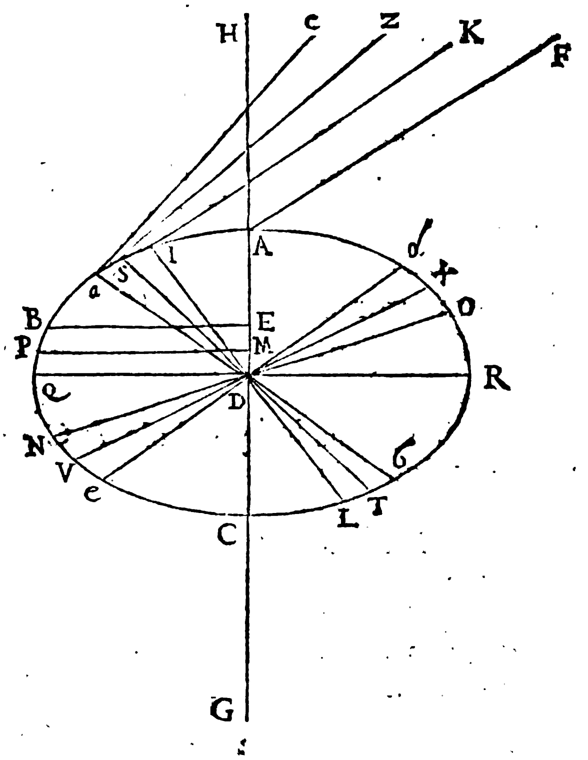


ſum-

ſummam earundem: & ſumma duorum quadratorum ipſarum æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum A C, Q R (22. ex 7.) ergo ſumma A C, Q R minor eſt, quàm ſumma I L, N O, atque ſic oſtendetur, quod ſũma I L, N O minor eſt, quàm ſumma S T, V X. Quod erat propoſitũ.

PROPOSITIO XXXXIII.

Deinde in ellipſi quadratum ſummæ A C, Q R minus eſt quadrato ſummæ I L, N O; & ſumma duorum quadratorum A C, Q R

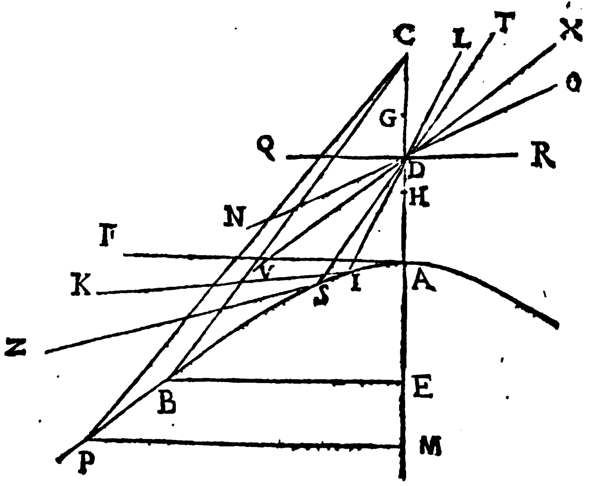


æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum I L, N O (22. ex 7.) igitur
remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & ſimiliter I L in N O f
minus erit, quàm S T in V X.

Sed in hyperbola, quia quilibet axium minor eſt homologa diametro coniugatarum; igitur planum rectangulum ab axibus contentum minus eſt eo quod à duabus coniugatis continetur hoc igitur in hyperbole manifeſtum eſt.

In ellipſi autem, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, g
quàm I L ad N O per conuerſionem rationis, & permutando maior A C
ad minorem I L minorem proportionem habebit, quàm differentia ipſarum A C, Q R ad differentiam ipſarum I L & N O; & propterea differentia ipſarum A C, & Q R maior erit differentia reliquarum I L, & N O. Et ſimiliter oſtendetur, quod exceſſus I L ſuper N O maior ſit, quàm exceſſus S T ſuper V X.

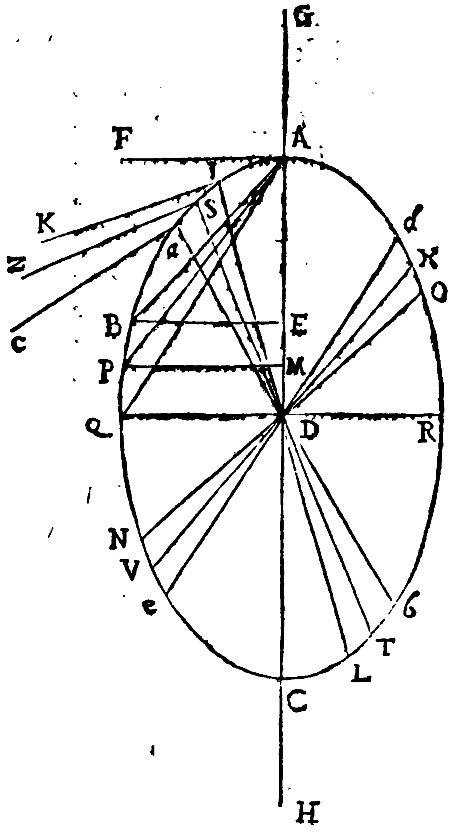
PROP.



PROPOSITIO XXIV.

ET quia in ellipſi quadratum Q R, nempe figura axis A C minor eſt in prima, & maior in ſecunda ellipſi, qdàm quadratum N O, nempe quã figura I L (28. ex 7.) eſtque A C maior in prima, & minor in ſecunda h figura quàm I L; igitur erectum ipſius A C minus eſt in prima figura, & maius in ſecunda, quàm erectum I L. Et ſic oſtendetur, quod ereæum ipſius I L maius ſit, ſiue minus, quàm erectum S T.

Et quia erectum ipſius A C minus eſt in prima ellipſi, & maius in ſecunda, quàm erectum ipſius I L, & A C maior eſt in prima, & minor in ſecunda figura quàm I L, igitur differentia A C, eiuſq; erecti, quæ ſunt duo latera figuræ A C, in quo-



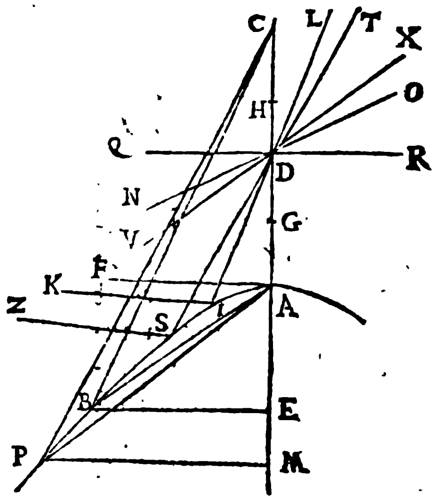
libet

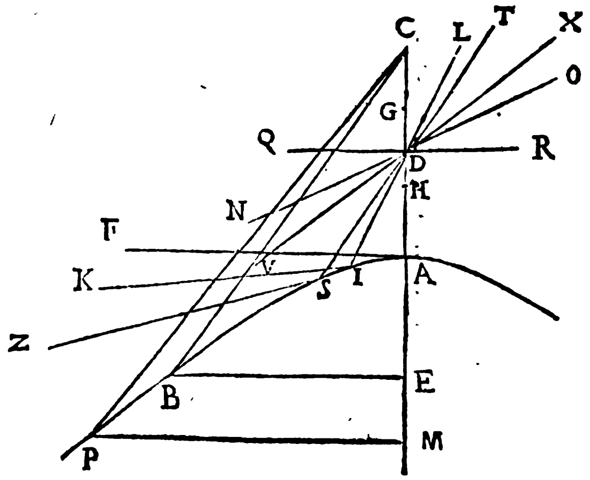
libet caſu maior erit differentia I L, eiuſque erecti. Pari modo oſtendetur quod differentia ipſius I L, & eius erecti maior ſit differentia ipſius S T, eiuſque erecti. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXVII.

IN hyperbole differentia laterum figuræ axis inclinati maior eſt differentia laterũ figurę ſui homologi eiuſdẽ ſectionis: & differẽtia laterum figuræ inclinati proximioris axi maior eſt differentia laterum figuræ inclinati ab illo remotioris.

In hyperbole A B P ſit axis C A, & I L, S T ſit duæ aliæ diametri, & centrum D; atque erectus ipſius A C ſit A F, & ipſius I L ſit I K, atque ipſius S T ſit S Z: & educamus C B, C P, parallelas duabus homologis diametris I L, S T, & duas ad axim perpendiculares B E, P M, ſecemuſque duas interceptas C H, A G, & ſit inclinatus A C in prima figura maior, quàm A F, in ſecũda verò minor. Et quoniam A C ad A F ſupponitur vt H A ad A G



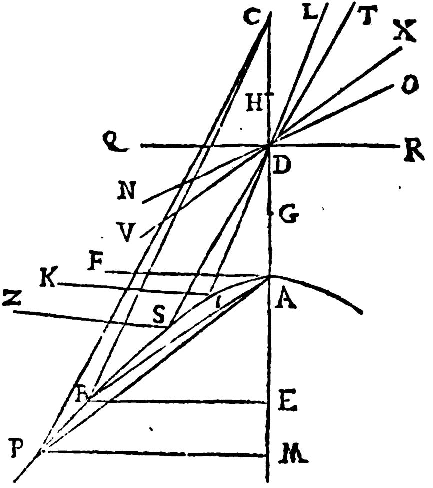


erit

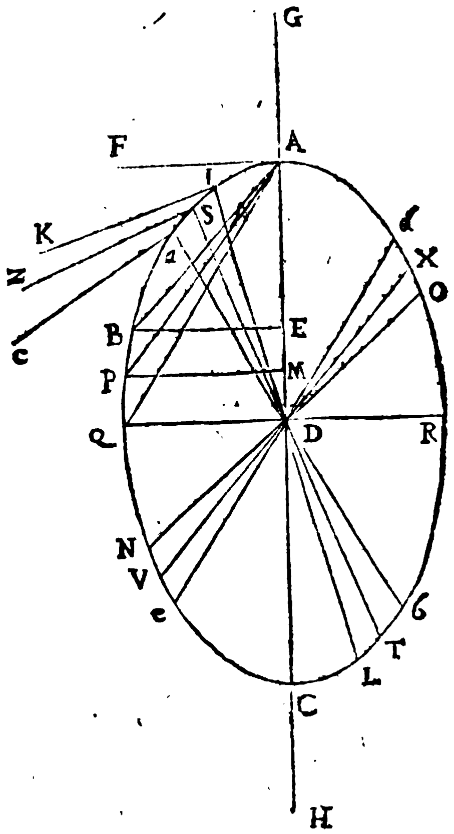
erit quadratum A C ad quadratum differentiæ ipſarum A C, A F, vt quadratum H A ad quadratum H G, at ad quadratum differentiæ ipſarum I L, I K eſt, vt E H in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) ad quadratum verò differentiæ S T, S Z eſt, vt H M in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) eſt verò M H in H A maius quàm E H in H A, atque E H in H A maius quàm quadratum H A; igitur A C ad differentiam ipſarum A C, A F minorem proportionem habet, quàm ad differentiam ipſarum I L, I K, & ad differentiam earundem I L, I K minorem proportionem habet, quam ad differentiam ipſarum S T, S Z; igitur differentia ipſarum A C, A F maior eſt, quàm differentia ipſarum I L, I K, atquè differentia earundem I L, I K maior eſt quàm differentia S T, S Z. Quod erat propoſitum.

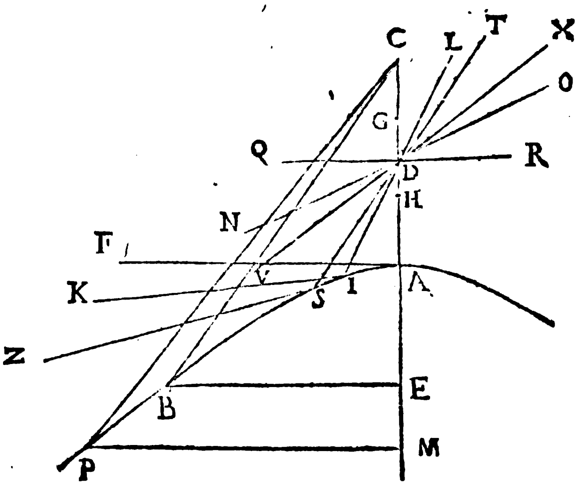
Notæ in Propoſit. XXVIII.

Sit in primis figuris axis A C maior, quàm axis Q R. Quia quadratum ex 15. 16. lib. 1. *A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G: eſtque G A minor quàm G E; ergo H G ad G A maiorem proportionem habet* Defin. 1. huius. *quàm ad G E: & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi H A ad A G maiorem proportionem habet, quàm H E ad E G; ſed H E ad E G eandem* 6. & 7. huius. *proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; ergo quadratum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O: & propterea A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O: & ſunt quoquè earundem proportionum duplicatæ pariter inæquales, nimirum axis* ex 15. 16. huius. *A C ad eius latus rectum A F maiorem proportionem habebit, quàm diameter I L ad eius latus rectum I K. Secundò quia G E minor eſt, quàm G M; ergo H G ad G E maiorem proportionem habet, quàm ad G M; & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi H E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm H M ad M G, & quadratum I L ad quadratum N O habet eandem proportionem, quàm H E ad E G;* 6. & 7. huius. *nec non quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; ergo quadratum I L ad quadratum N O maiorem proportionem habet, quàm quadratum S T ad quadratum V X, & I L ad N O maiorem proportionem habebit, quàm S T ad V X, & earundem proportionum duplicatæ inæquales quoque erunt, ſcilicet I L ad eius latus rectum maiorem proportionem habebit, quàm S T ad eius latus rectum. Deinde in ſecundis figuris ſit axis A C minor quàm Q R. Quia H A minor eſt, quàm H E;*



nec non H E minor quàm H M ergo H
A ad eandem H G minorem proportionem habebit, quàm H E, & comparando antecedentes, ad terminorum
Lem. 2. lib. 5. ſummas vel ad differentias H A ad A
G minorem proportionem habet, quàm
H E ad E G, & ſimiliter H E ad E G
minorem proportionem habet, quàm H
ex 15. 16. lib. 1. M ad M G: eſt verò quadratum A C
ad quadratum Q R, vt H A ad A G,
Defin. 1. huius. & quadratum I L ad quadratum N O,
Prop. 7. huius. vt H E ad E G; pariterquè quadratum
S T ad quadratum V X eſt, vt H M
ad M G; & ideo A C ad Q R minorem proportionem habebit, quàm I L ad
N O, & I L ad N O minorem proportionem habebit, quàm S T ad V X; &
ex 15. 16. lib. 1. ſimiliter earundem proportionum duplicatæ eodem ordine inæquales erunt, ſcilicet AC ad eius latus rectum minorem proportionem habebit quàm I L ad eius rectum latus, &c. Ad perfectionem partis ſecundæ propoſitionis 28. requiritur hoc.



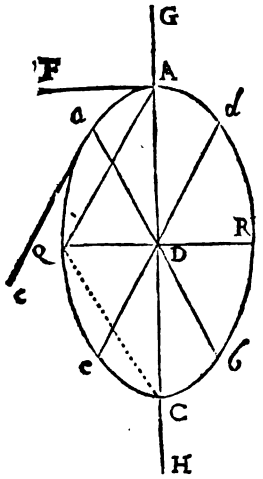


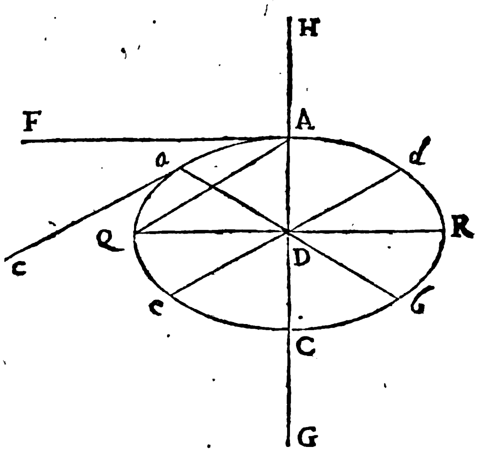
LEMMA I.

IN ellipſi cuius axes inæquales ſunt, duas diametros coniugatas inter ſe æquales reperire.

In

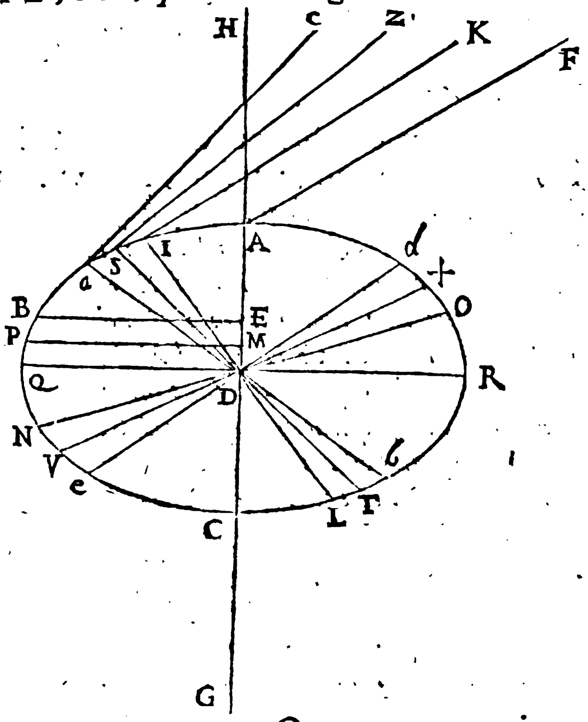
In eadem figura coniungatur recta linea A Q terminos axium coniungens, & per centrum huic parallela ſit e d, *perq; idem centrum, & ſemipartitionem*

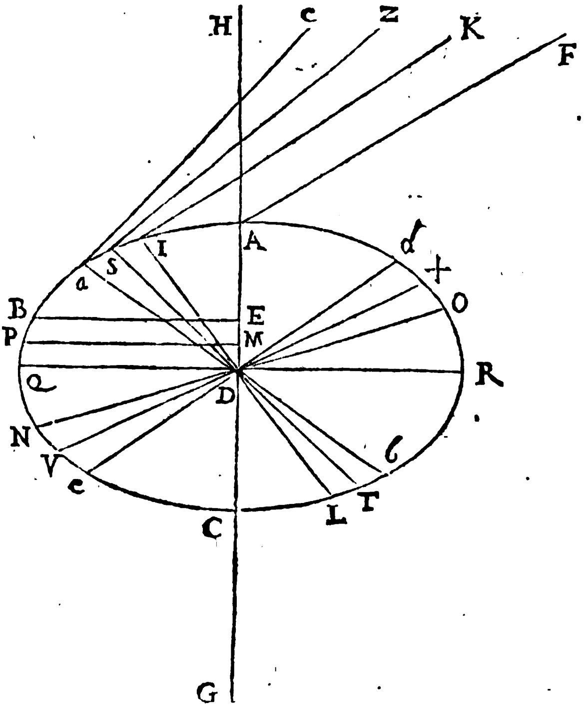




applicatæ A Q ducatur diameter a b: *Dico diametros coniugatas* a b, *&* e d *æquales eſſe inter ſe. Quoniam à termino Q ordinatim applicatæ A Q ad diametrum* a b *ducitur ad axim perpendicularis Q D cadens in centrum D; ergo* Prop.7. huius. *H D ad D G eandem proportionem habet, quàm quadratum diametri* a b *ad quadratum eius coniugatæ* c d; *ſuntque H D, & G D æquales inter ſe, cum ſemiaxes, atque interceptæ ſint æquales inter ſe; ergo diametri coniugatæ* a b, *&* c d *æquales erunt inter ſe hoc præmiſſo.*

Reperiantur in ellipſi duæ diametri coniugatæ inter ſe æquales a b, e d, *& inter* a, *& A ponantur diametri I L, S T, quarum coniugatæ N O, & V X, & ducatur reliqua recta linea, vt prius factum eſt, & ponatur primo loco axis A C maior quàm Q R: Dico I L maiorem eſſe ipſa N O, & S T maiorem V X. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G,* Defin. 1. huius. *& quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G;* Prop.7. huius. *ſed in prima hyperbola, & prima ellipſi H A maior eſt, quàm A G, & H E maior, quā E G, atquè H M maior, quàm M G; igitnr quadratum I L ma-*





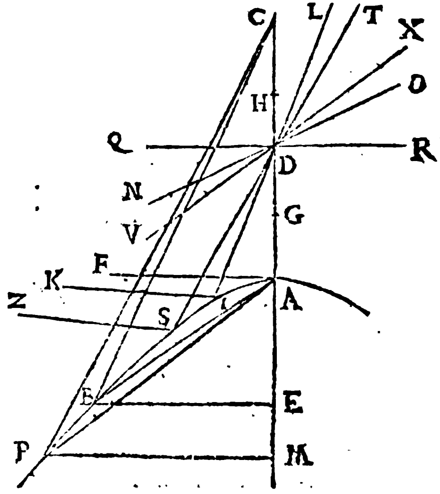
ius eſt quadrato N O ; & quadratum S T maius quadrato V X ; ideoquè quando axis A C maior eſt, quàm Q R, erit diameter I L maior eius coniugata N O, & S T maior quàm V X. Pari ratione, quandò axis A C minor eſt, quàm Q R erit H A minor, quàm A G, & H E minor, quàm E G, atque H M minor, quàm M G : & propterea in ſecunda hyperbola, & ſecunda ellipſi etiam diameter I L minor erit, quàm N O, & S T minor erit quàm V X. Idem contingit in reliquis diametris, dummodò in ellipſi cadant inter A, & a, nam a b *eſt æqualis ſuæ coniugatæ* e d *: & vltra pũctum* a *ad partes Q diametri cadentes minores ſunt ſuis coniugatis in prima ellipſi, & maiores in ſecunda, cum propinquiores ſint axi Q R.*

Si verò fuerit vnus duorum axium in hyperbola aut ellipſi maior, tunc a
eius homologa diameter coniugata maior eſt, &c. *Non nulla in hoc textu deficiunt; non enim omnes diametri in ellipſi ſunt inæquales vt in Lemmate 1. oſtenſum eſt, & ideo textus corrigi debuit.*

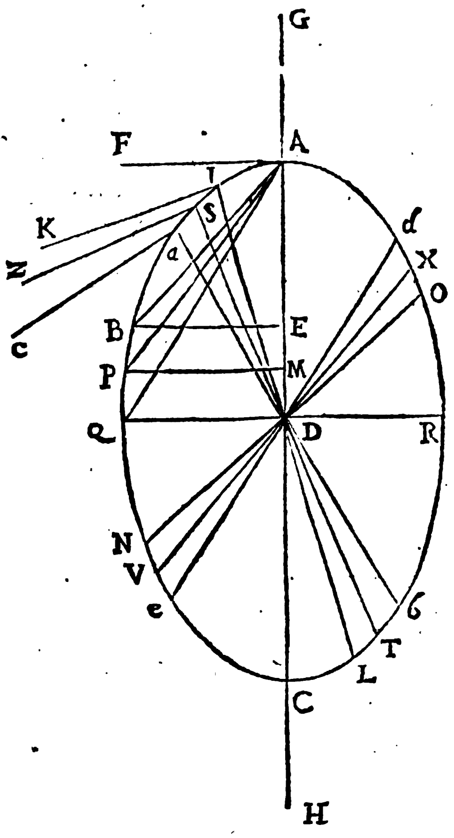
Notæ in Propoſit. XXI.

ET conuenient duo puncta H, & G in puncto D ; eritque A C ad Q b
R, vt A D ad ſe ipſam, ſiue vt A C ad ſe ipſam, &c. *Quia quadratum A C ad quadratum Q R eſt vt C G ad G A, & vt quadratum I L ad quadratum N O, ita eſt H E ad E G, nec non quadratum S T ad quadratum V X eſt vt H M ad M G; ſed quandò axium quadrata ſunt inter ſe æqualia, tunc quidem præſecta C G, ſeu H A æqualis eſt interceptæ G A, & terminus G, ſeu H cadit in cẽtro D; & ideo H E vel D E æqualis eſt E G vel E D : pariterq; H M æqualis eſt M G : quarè coniugatarũ diametrorũ quadrata æqualia ſunt inter ſe; & etiã tranſuerſa latera ſuis erectis æqualia erunt.*

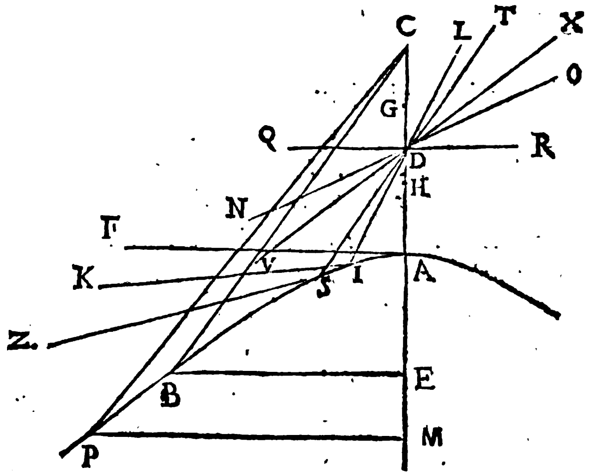
Defin. 1. Prop. 7. huius.



C Quia C G ad A G, nempe quadratum A C ad ſuam figuram in maiori, & in figura ſecunda ellipſi in minori proportione, &c. *Ideſt. In prima, & ſecunda figura hyperboles, & in prima figura ellipſis habet C G ad G A maiorem proportionem, quàm ad G E, eo quod G E maior eſt, quàm G A: at in ſecunda figura ellipſis proportio minor eſt; quia G E minor eſt, quã A G. Propoſitum verò aliter oſtendetur hac ratione.*



Quoniam ex demonſtratis in nota propoſit. 27. in hyperbola, atquè ex propoſitione 11. libri quinti in ellipſi erit axis minor, & rectus Q R minor diametro recta N O, & N O minor remotiore V X, ideoquè quadratum Q R minus erit quadrato N O, & quadratum N O minus quàm quadratum V X: eſt verò figura, ſeu rectangulum C A F ſub extremis contentum æquale quadrato Q R ex media proportionali inter illas deſcriptum: 15. lib. 1. *pariterquè rectangulum L I K æquale eſt quadrato diametri ei coniugatæ N O, nec non rectangulum T S Z æquale erit quadrato V X, ergo rectangulum C A F minus eſt rectangulo L I K, atque rectangulum L I K minus eſt rectangulo T S Z. E contra in ellipſi ſecunda. Quia Q R maior eſt, quàm N O; & hæc maior, quàm V X; ergo rectangulum C A F maius eſt rectangulo L I K, & hoc maius erit rectangulo T S Z.*

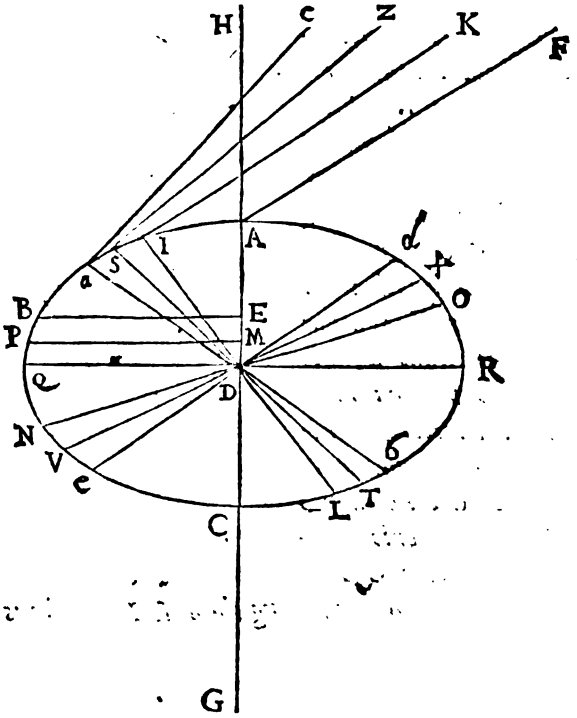


Notæ

Notæ in Propoſit. XXXXII.

ERit igitur aggregatum A C, Q R minus quàm aggregatum I L, N O, &c. *Hoc oſtenſum eſt in nota propoſit. 27. huius.* d

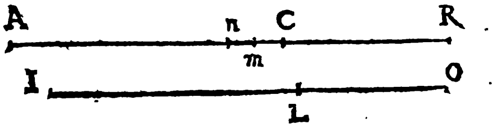
At in ellipſi, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, erit quadratum aggregati A C, Q R ad ſummam duorum e

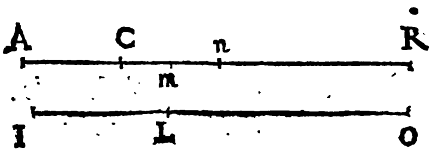


quadratorum ipſarum in maiori proportione, quàm quadratum aggregati I L, N O ad ſummam duorum quadratorum earundem, & ſumma duorum quadratorum ipſarum, &c. *Fiat A R æqualis duabus A C & Q R, I O fiat æqualis duabus I L, & N O; atquè ſecetur A R in* m, *vt ſit A* m *ad* m *R, vt I L ad L O. Quia in prima ellipſi A C ad Q R, vel ad C R (in hac figura) maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, ſeu ad L O (in præſenti figura); Ergo A C ad C R maiorem proportionem habet, quàm A* m *ad* m *R; ideoq; A C ad eandem A R maiorem proportionem habebit quàm A* m; *& propterea A* m *minor erit, quàm A C: ſed A* m *maior eſt quàm M R, eo quod I L priori homologa maior eſt, quàm L O: at in ſecunda ellipſi A C ad C R minorem proportionem habet, quàm*

Prop. 21. huius.

Lem. 2. lib. 5.





I L

I L ad L O, ſeu quàm A m ad m R; & A C ad eandem A R minorem proportionem habet quàm A m; ideoque A C minor erit, quàm A m, & A m minor quàm m R, ſicuti I L minor eſt, quàm L O; & propterea ſecta A R bifariam in n in vtroq; caſu C n ſemidifferentia maximè, & minimè ſcilicet A C, & C R maior erit, quàm m n ſemidifferentia inæqualium intermediarum A m, & R m: ſuntque duo quadrata ex A C, & ex C R æqualia quadratis ex R n, & ex C n bis ſumptis, atquè quadrata ex A m, & ex R m æqualia ſunt quadratis ex R n, & ex m n bis ſumptis, ſed duplum quadrati n C cum duplo quadrati n R maiora ſunt duplo quadrati n m cum duplo quadrati n R (cum n R ſit communis, & n C maior ſit n m); igitur in vtroque caſu duo quadrata ex maxima, & ex minima, ſcilicet quadratum A C vna cum quadrato C R maiora ſunt quadrato A m, & quadrato m R ſimul ſumptis: & quadratum A R minorem proportionem habet ad ſummam quadratorum ex A C, & ex C R, quàm ad ſummam quadrati A m, & quadrati m R; ſed quadratum I O ad quadratum I L vna cum quadrato L O eandem proportionem habet, quàm quadratum A R ad ſummam duorum quadratorum ex A m, & ex m R (propterea quod A R, & I O diuiduntur proportionaliter in m, & L): igitur quadratum A R ad ſummam quadrati A C vna cum quadrato C R minorem proportionem habet, quàm quadratum I O ad ſummam quadrati I L cum quadrato L O.

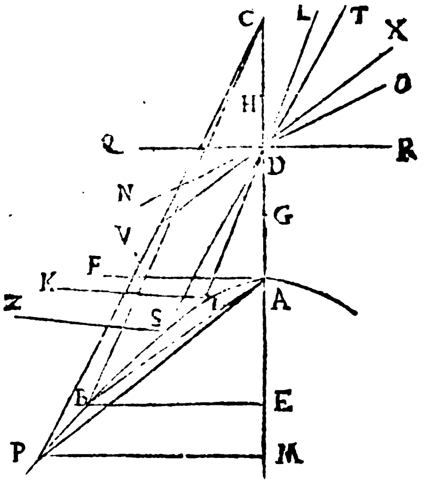
Lem. 2. lib. 5.

Non ſecus oſtendetur, quod quadratum ſummæ I L, & N O ad quadrati ex I L, & quadrati ex N O ſummam habet minorem proportionem, quàm quadratum ſummæ S T, & V X ad quadratorum ex S T, atquè ex V X ſummam: & ideo I L cum N O minores erunt, quàm S T cum V X.

ex 22. huius.

Notæ in Propoſit. XXXXIII.

f Remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & pariter I L in N O minus quàm S T in V X, &c. Quia ſi ex quadrato ſummæ A C, & Q R auferantur duo quadrata ex C A, & ex Q R ſimul ſumpta, remanent duo rectangula ſub C A, & Q R contenta: pariterque duplum rectanguli ex I L in N O eſt reſiduum quadrati ex ſumma ipſarum I L, & N O deſcripti, poſtquàm ablata ſunt quadratum ex I L, & quadratum ex N O ſimul; ſed bina quadrata vtrinq; ablata ſunt æqualia inter ſe in ellipſi; & ſumma A C, Q R minor eſt quàm ſumma I L, N O; Ergo duplum rectanguli ſub C A & ſub Q R minus eſt duplo rectanguli I L in N O, & rectangulum ſub A C, & Q R minus eſt rectangulo ſub I L, & N O.

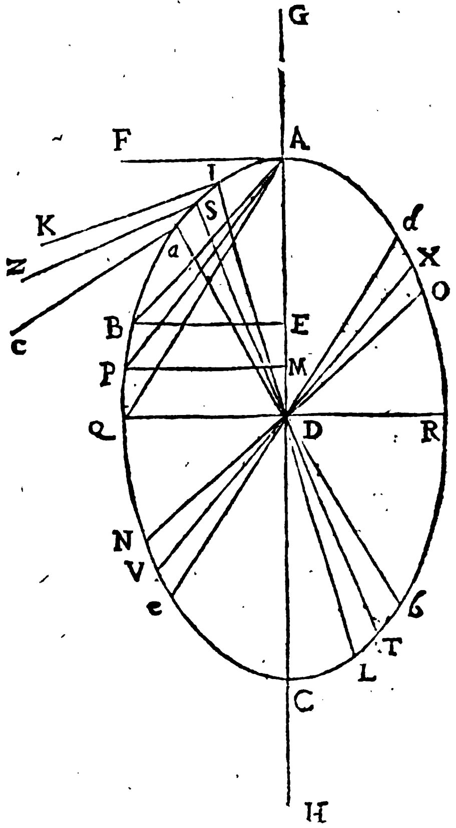


Prop. 22. huius.

Prop 42. huius.

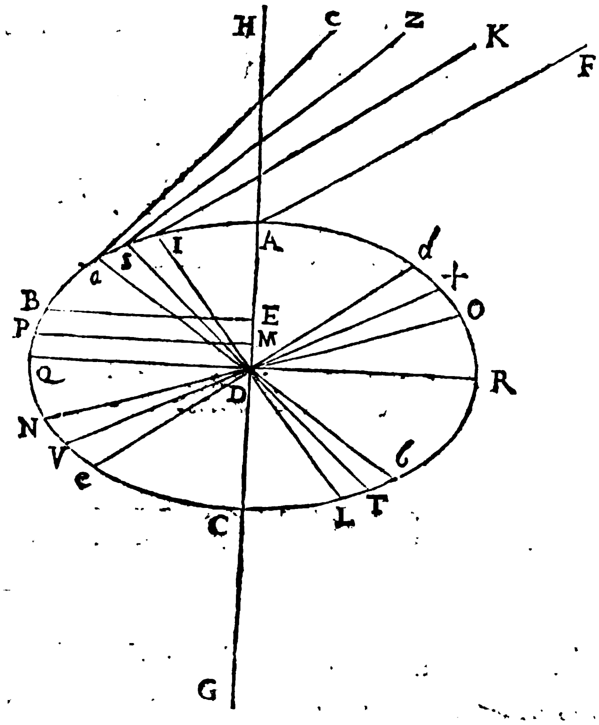
g

QVia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O poſt cōuerſionem rationis, & permutationem A C maior ad I L, minorem, habebit proportionem minorem, quàm exceſſus A C ſuper Q R ad exceſſum I L ſuper N O, &c. *Hoc quidem verum eſt in ellipſi, (veluti dictum eſt ad propoſ. 28. huius) quandò maior axis eſt A C, ſed quandò A C eſt minor, atque A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O, opere pratium erit, demonſtrare, quod tunc etiam differentia axium A C, & Q R maior ſit differentia diametrorum I L, & N O. Quoniam exiſtente C A minore, quàm Q R (ex 28. huius) A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O; & inuertendo Q R ad A C maiorem proportionem habebit, quàm N O ad I L, & per conuerſionē rationis Q R ad differentiam ipſarum Q R, & A C minorem proportionem habebit, quàm N O ad differentiam ipſarum N O, & I L; & permutando Q R maior ad minorem N O habebit proportionem minorem, quàm differentia ipſarum Q R, & A C ad differentiam ipſarum N O, & I L: & propterea differentia ipſarum Q R, & A C maior erit, quàm differentia ipſarum N O, & I L.*

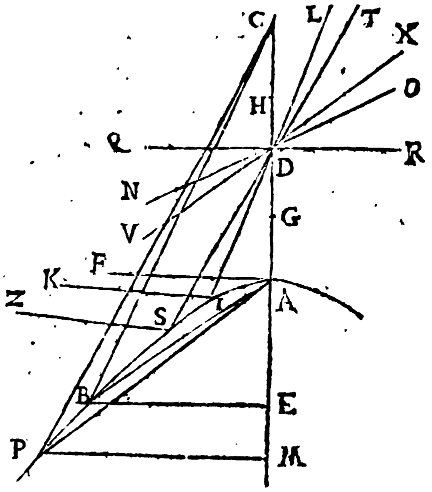


28. huius. *Poſtea quandò C A eſt maior axis, tunc I L ad N O maiorem proportionem habet, quàm S T ad V X; & ſimiliter per conuerſionem rationis, & permutando maior I L ad minorem S D habebit minorem proportionem, quàm differentia coniugatarum diametrorum I L, & N O ad differentiam coniugatarum S T, & V X, quapropter axi propinquiorum diametrorum I L, & N O differentia maior erit, quàm remotiorum coniugatarum S T, & V X differentia.*

E contra quandò C A eſt axis minor idem concludetur, vti paulo ante factum eſt.



Notæ in Propoſit. XXIV.



h IGitur erectum ipſius A C minus eſt in prima, & maius in ſecunda, quàm I L,, & ſic oſtendetur, quod erectum ipſius I L maius ſit, ſiue minus quàm erectum S T, &c. *Quoniam in prima ellipſi rectangulum C A F minus eſt rectangulo L I K; ergo A C ad I L minorem proportionem habet reciproce, quã I K ad A F; quare I K ad aliquam aliam quantitatem maiorem, quàm A F eandem proportionem habebit, quàm A C ad I L; eſtquè A C maior quàm I L in prima ellipſi; ergo multò magis I K maior erit quàm A F. Pari ratione in eadem prima ellipſi rectangulum L I K minus eſt rectangulo T S Z, & I L axi maiori propinquior maior eſt, quàm S T; ergo S Z maior erit, quàm I K.* Pro p. 28. huius.

E contra in ſecunda ellipſi rectangulum L I K minus erit rectangulo C A F; & rectangulum T S Z minus erit rectangulo L I K; eſtquè T S maior quàm I L, & I L maior, quàm A C; igitur reciprocè A F maior erit, quàm I K, & I K maior, quàm S Z. Ibidem.

SECTIO SEXTA

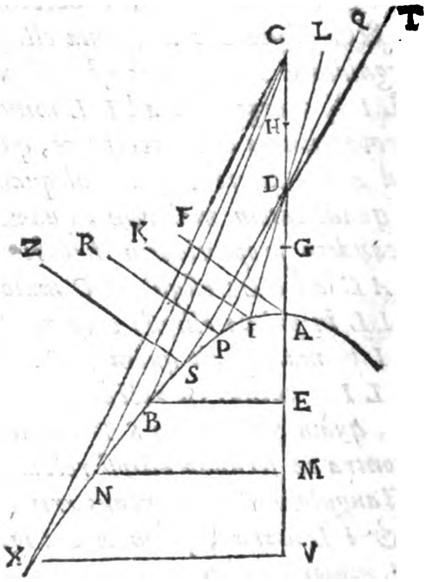
Continens Propoſit. XXXIII. XXXIV. XXXV. & XXXVI.

* * *

PROPOSITIO XXXIII.

AXis inclinatus ſi non fuerit minor dimidio ſui erecti, vtique eius erectus minor eſt erecto cæterarum diametrorum inclinatarum eiuſdem ſectionis, & axi proximioris inclinati erectus minor eſt, quàm erectus remotioris.

XXXV. Et ſi fuerit axis inclinatus minor dimidio erecti, vtique ad vtraſque eius partes cadent duæ inclinatæ, quarum quælibet æqualis eſt ſemiſſi erecti ipſius, atque eius erectus minor eſt erecto cuiuslibet inclinati ad vtraſque partes eius poſitæ, & erectus proximioris minor eſt erecto remotioris.

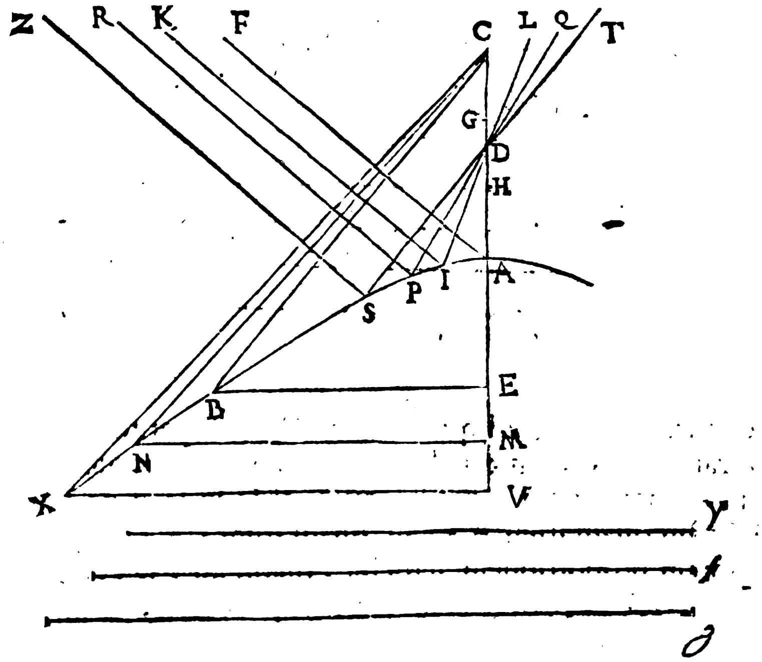


In hyperbole A B N ſint A C, I L, P Q, S T diametri inclinatæ, & A F ſit erectus ipſius A C, I K ipſius I L, P R ipſius P Q, & S Z ipſius S T: ſitquè axis A C non minor medietate ipſius A F. Dico, quod A F minor eſt, quàm I K, & I K minor quàm P R, & P R minor quàm S Z. Educantur C B parallela I L, & C N ipſi P Q, & C X ipſi S T: & ducantur B E, N M, X V perpendiculares ad axim C A E. Quoniam ſi A C æqualis eſt ipſi A F, etiam I L æqualis eſt ipſi I K (21. ex 7.) & P Q ipſi P R; eſtque A C minor
ex 38. lib. 5. quam I L, & I L, quàm P Q; ergo

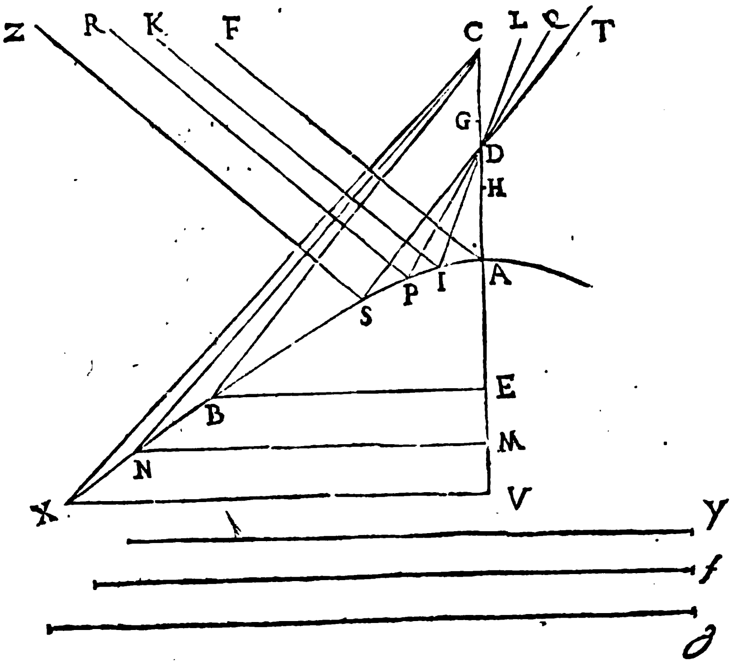
ergo A F minor eſt , quàm I K , & I K minor quàm P R. Si verò A C maior eſt , quàm A F eſſet I L maior , quàm I K : & I L ad I K minorem proportionem habebit , quàm A C ad A F (28. ex 7.) & I L maior eſt quàm A C ; igitur A F minor eſt , quàm I K : atquè ſimiliter patebit I K minorem eſſe quàm P R , & P R , quàm S Z. 21. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

DEinde ſit A C minor , quàm A F , dummodò minor non ſit dimidio eius : & ſecentur duæ præſectæ A H , C G , quæ erunt æquales ; pariterque A G , C H interceptæ æquales ; ponaturque linea y æqualis ſummæ G E , G A . Et quia A G non eſt maior duplo A H , & y maior eſt duplo A G , erit y in A H maius , quàm quadratũ A G ; igitur y in A E ad y in A H , nempe E A ad A H minorem proportionẽ habebit , quã y in A E ad quadratum A G ; ideoquè E H ad H A , nẽpe E H in H A ad quadratum A H minorẽ proportionẽ habebit , quàm y , ſeu eidem æquales E G , G A in A E , cum quadrato A G (quæ ſunt æqualia quadrato G E) ad quadratum A G ; ergo E H in H A ad quadratum E G , ſeu (vt oſtenſum eſt in 15. ex 7.) quadratum A C ad quadratum I K minorem proportionem habebit , quàm quadratum A H ad quadratũ A G , ſeu quã quadratum A C ad quadratum A F . Igitur A C ad I K minorem proportionem habet , quàm ad A F ; & propterea A F minor eſt quàm I K .



Simili modo oſtendetur quod I K minor ſit, quàm P R: etenim ſi ponatur linea *f* æqualis ſummæ M G, G E: cum G E non ſit maior duplo E H, & *f* maior ſit duplo G E; igitur *f* in E H maius eſt quadrato G E. Poſtea oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod M H ad H E, nempe M H in H A ad E H in H A minorem proportionem habet quàm quadratum M G ad quadratum G E; & permutando M H in H A ad quadratum M G, ſeu quadratum A C ad quadratum P R (15. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum G E, nempe quàm quadratum A C ad quadratum I K: & propterea A C ad P R minorem proportionem habebit, quàm ad I K; ideoquè I K minor eſt, quàm P R: & pariter P R minor, quàm S Z.

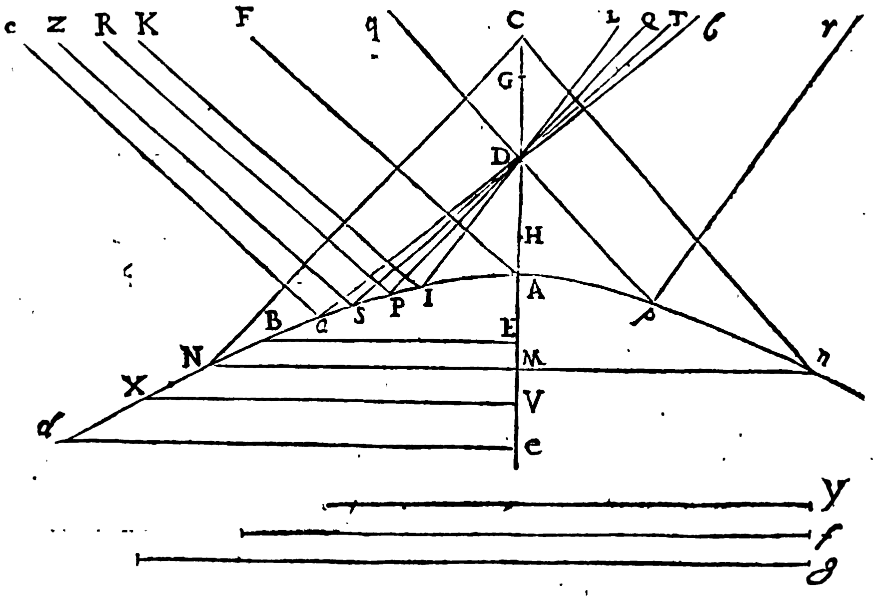


PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

SIt poſtea A C minor dimidio A F; erit A G maior duplo A H, & ideo H G maior eſt, quàm H A: ponatur iam H M æqualis H G, ducaturque ad axim perpendicularis N M; iungaturque N C, & educatur diameter P Q parallela N C. Et quia M H medietas eſt ipſius M G, erit P Q dimidium ipſius P R (6. ex 7.) Inter duas diametros P Q, A C ducatur diameter I L, & C B ei parallela, & ad axim perpendicularis B E. Quoniam M H in H E minus eſt quadrato H G; addito communi

producto

producto ex G E, & G H in E H, erit M H in H E cum E G, atquè G H in H E, nempe ſumma M G, G E, quæ eſt æqualis ipſi f in E H minus erit, quàm quadratum H G cum aggregato E G, G H in E H, quæ ſunt æqualia quadrato G E; igitur f in E H minus eſt quadrato E G. Poſtea vti prius dictum eſt oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum P R maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum I K: & propterea P R minor eſt, quàm I K. Non aliter oſtendetur quod I K minor ſit, quàm A F. Ponatur poſtea diameter S T extra locum inter P Q, A C compræhenſum, ducaturque C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V. Igitur V H M maius erit quàm quadratum H G,



& eodem modo procedendo, tandem oſtendetur quod quadratum A C ad quadratum S Z minorem proportionem habet, quàm ad quadratum P R, & ideo P R minor erit quàm S Z. Non ſecus oſtendetur quod S Z minor eſt erecto cuiuslibet inclinati cadentis ad partem S T extra illam. Itaque demonſtratum eſt, quod P R minor ſit erecto cuiuslibet diametri ſectionis cadentis ad vtraſque partes ipſius P Q verſus A, & X, & erecti proximiores diametro P Q minores ſunt remotioribus. Et hoc erat propoſitum.

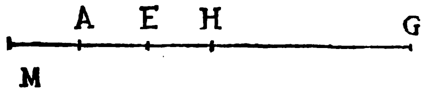
In Sectionem VI.

IN Expoſitione ſequentium Propoſitionum difficultas, quæ à nimia prolixitate oritur, ineuitabilis eſt, niſi Methodus in textu ſeruata aliquantiſper relinquatur: propterea non nulla lemmata præmittam, ex quibus ſemel demonſtratis caſus omnes ſequentium propoſitionum facillime, & breuiſſime deducuntur.

Lemma

LEMMA II.

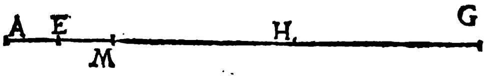
SI recta linea H G producatur in A & E, ita vt A H, pariterque E H, non maior ſit H G: Dico rectangulum ex A G E ſumma inæqualium ſegmentorum in E H intermediam ſectionem, minus eſſe quadrato ex ſegmento intermedio minore E G.



Fiat H M æqualis H G, & quia A E æqualis, aut minor eſt, quàm M E; & E G maior, quàm E H, ergo A E ad M E minorem proportionem habet, quàm E G ad E H, & permutando A E ad E G minorem proportionem habebit, quàm M E ad E H, & componendo A G ad G E minorem proportionem habebit, quàm M H, ſeu ei æqualis G H ad H E, & iterum componendo A G E ad G E minorem proportionem habebit, quàm G E ad E H: quare Rectangulum ex ſumma A G E in H E minus erit quadrato ex intermedia G E, vt propoſitum fuerat.

LEMMA III.

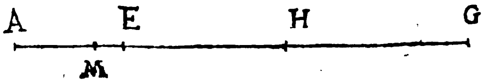
IIſdem poſitis ſint A H, & E H non minores quàm G H, vel H M: Dico rectangulum ex A G E in E H maius eſſe quadrato ex E G.



Quia A G maior eſt quàm E G, & G H non maior ipſa H E, ergo A G ad G E maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, & componendo A G E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo rectangulum ex A G E in E H maius erit quadrato ex G E.

LEMMA IV.

IIſdem poſitis ſit A H maior, ſed E H minor eadem M H ſemiſſe totius M G: Dico quod ſi proportio ipſius A G ad G E fuerit eadem rationi G H ad H E, erit



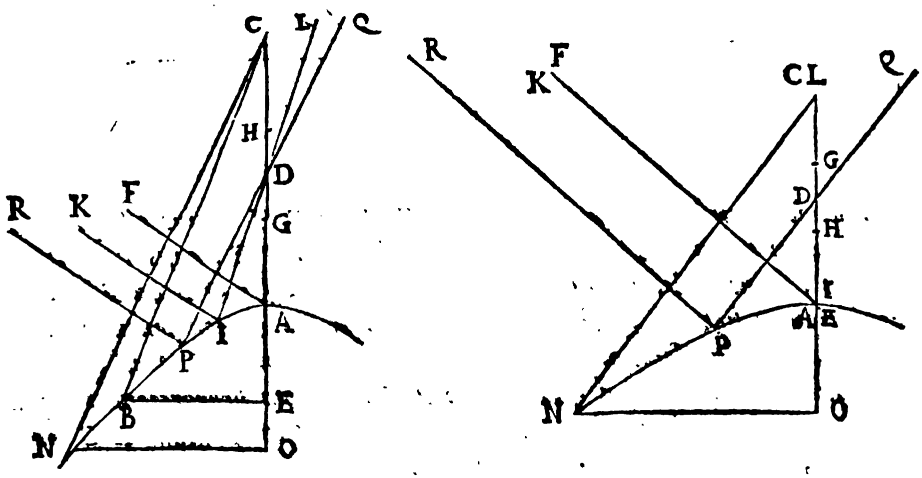
rectangulum ſub A G E in E H æquale quadrato ex G E, & ſi proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadrato; & ſi illa proportio minor fuerit, Rectangulum quadrato minus erit.

Et primo, quia A G ad G E ponitur vt G H ad H E; componendo A G E ad G E, erit vt G E ad E H, & rectangulum ſub extremis contentum, nimirum ſub A G E in E H, æquale erit quadrato ex intermedia G E.

Secundo, ſi A G ad G E maiorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, componendo A G E ad G E maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo Rectangulum ſub A G E in E H maius erit quadrato ex G E. pari ratione ſi A G ad G E minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, oſtendetur Rectangulum ex A G E in E H minus quadrato G E.

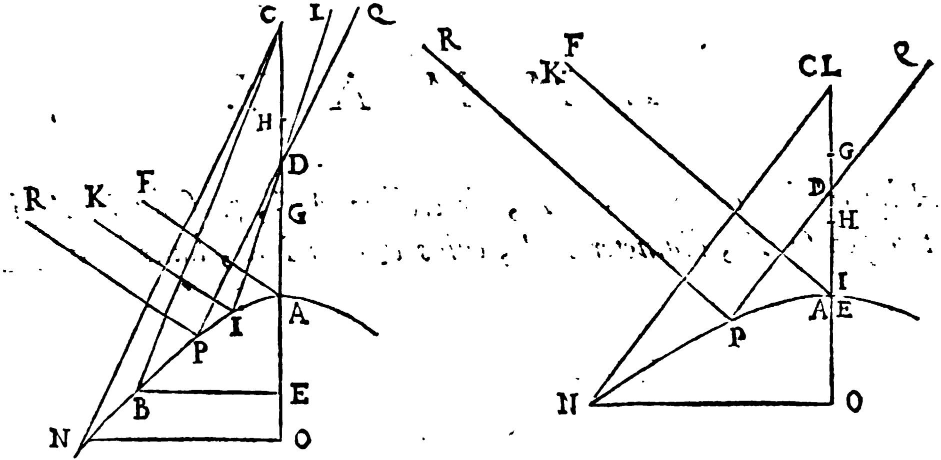
L E M M A V.

IN hyperbola, cuius axis C A, & erectus A F, præſecta H A, intercepta G A, diameter L I, cuius erectus I K, latus C E, &



diameter Q P, cuius erectus P R, latus C O: Dico quod erectus P R ab ipſo erecto I K, vel ab A F atque rectangulum ſub O G E in G H ab ipſo quadrato G E, vel rectangulum ex O G A in A H ab ipſo quadrato G A, vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, aut vna excedunt.

Et primo ponatur rectangulum ſub O G E in E H æquale quadrato E G, ergo idem rectangulum ſub O G E in E O ad rectangulum ſub E G O in E H, ſeu E O ad E H eandem proportionem habet, quàm ad quadratum G E; & propterea E O ad E H erit vt rectangulum ſub E G O in E O ad quadratum E G, *G E , & componendo O H ad E H , ſeu rectangulum O H A ad rectangulum E H A , erit vt rectangulum ſub G E , & G O in O E vna cum quadrato E G , ſeu vt quadratum ex O G ad quadratum ex G E , & permutando rectangulum A H O ad quadratum O G , erit vt rectangulum E H A ad quadratum G E ,* 15. huius. *ſed vt rectangulum O H A ad quadratum O G , ita eſt quadratum A C ad quadratum P K ,* ex Def. & 15. huius. *& vt rectangulum E H A ad quadratnm ex G E ; ſeu vt quadratum A C ad quadratum A F , vel ex I K ; quapropter idem quadratum A C ad quadratum ex P K , atque ad quadratum ex A F vel I K eandem proportionem habet , & ideo quadrata ipſa æqualia ſunt , & eorum latera P K ; & A F , vel I K pariter æqualia erunt.*



Eodem modo quando rectangulum ſub O G E in E H maius eſt quadrato G E , tunc quidem idem rectangulum , cuius altitudo O G E , baſis vero O E , ad rectangulum , cuius altitudo O G E , baſis verò E H , ſeu O E ad E H , minorem proportionem habebit , quàm ad quadratum E G , & componendo , atque permutando , vt prius factum eſt , habebit rectangulum O H A ad quadratum O G , ſiue quadratum A C ad quadratum P K minorem proportionem , quàm 15. huius. *rectangulum E H A ad quadratum G E , ſeu quàm quadratum A C ad quadratum A F , vel I K , & propterea P K maior erit , quàm A F , vel I K .*

Quando verò rectangulum ſub E G O in E H minus eſt quadrato E G , tunc quidem oſtendetur eodem progreſſu quadratum P K minus eſſe quadrato A F , vel I K , quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſ. XXXIII. & XXXIV.

Def. 2. huius. Q*Voniam ex hypoteſi C A minor non eſt medietate ipſius A F , eſtque A H ad A G , vt C A , ad A F , ergo A H maior , aut æqualis eſt medietati ipſius A G , & ideo A H maior , aut æqualis eſt reſiduo H G , quare E H ,* *E H , atque eius portio A H non minores ſunt eadem G H ; ergo rectangulum ſub B G A in A H maius erit quadrato A G , atque I K maior erit quàm A F .*

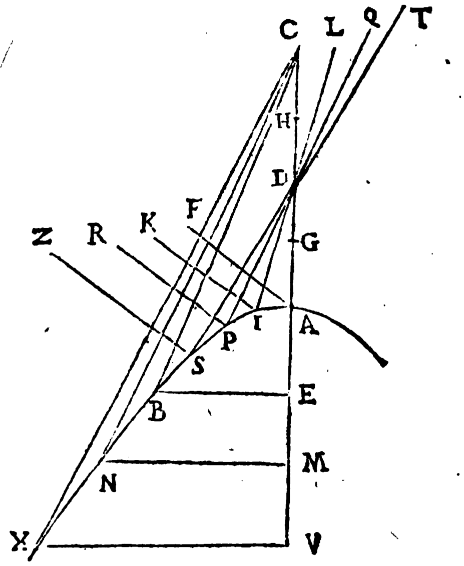
Simili modo , quia tam M H , quam E H excedunt ipſam G H , erit rectangulum ſub M G E in E H maius quadrato A G , atque P R maior , quam I K .

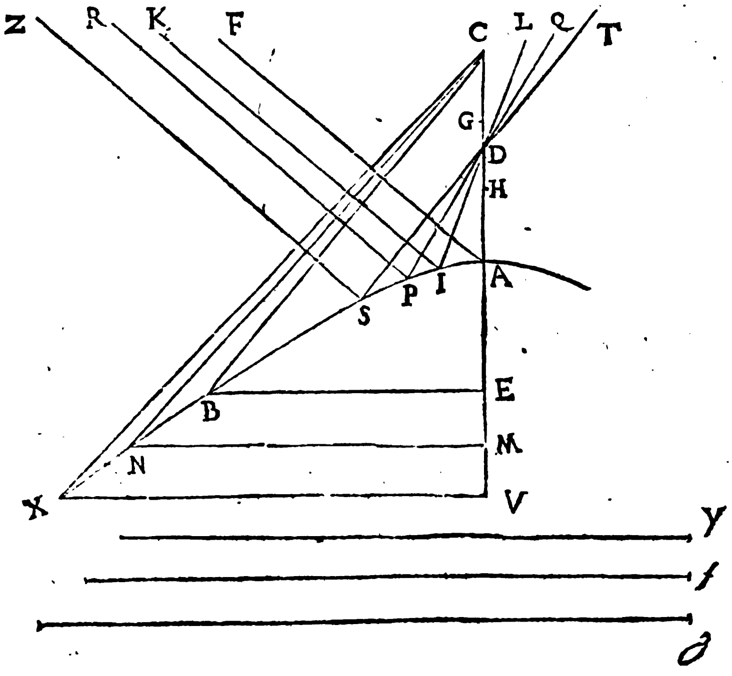
Lem. 3. huius.

Lem. 5.

Lem. 3. huius.

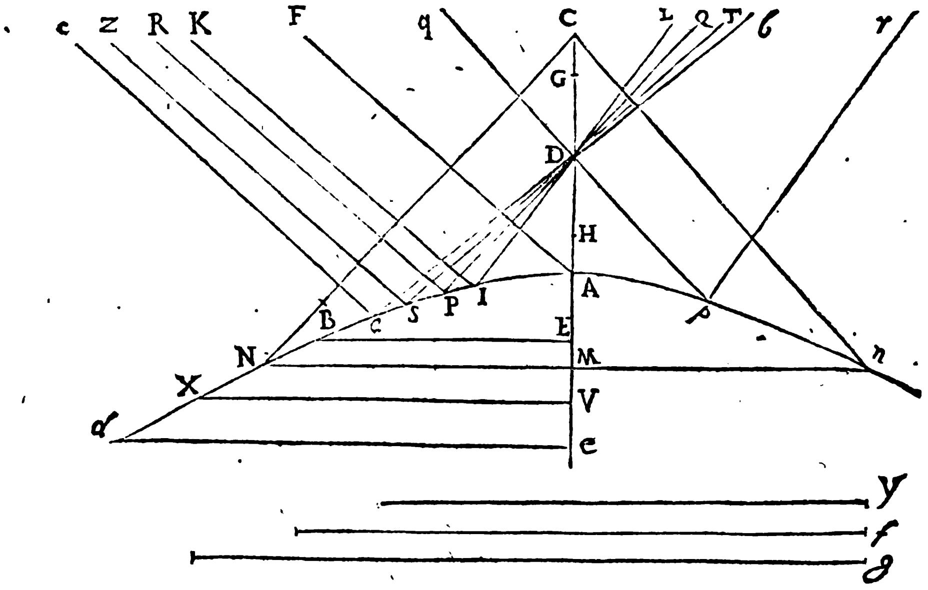
Lem. 5. huius.





Notæ in Propoſit. XXXV.

QVia ex hypoteſi axis A C minor eſt ſemi A F , erit A H minor medietate ipſius A G , & ideo A H minor erit H G : fiat igitur M H æqualis H G , & per M (quæ intra ſuctionē cadet) ad axim ordinatim applicata *ducatur N n occurrens ſectioni in N, & n, à quibus iungantur N C, n C, & eis æquidiſtantes diametri P Q, & p q extendantur, quarũ erecta P R, & p r. Oſtendendum eſt P Q ſubduplam eſſe ipſius P R, atq; P R, & p r æquales eſſe inter ſe, & minima eſſe erectorum quarumlibet Diametrorum eiuſdem ſectionis.* Prop. 6. huius. *Quoniam vt H M ad M G ita eſt P Q ad P R, & p q ad p r, erat autem H M ſubdupla ipſius M G, ergo Diameter P Q ſubdupla eſt erecti eius P R, pariterque p q ſubdupla eſt ipſius p r: atque Diametri P Q, & p q æquales ſunt inter ſe, cum æque recedant ab axi A C, atque earum commune latus ſit C M. Poſtea quia tam E H, quàm M H maiores non ſunt eadem H M, vel G H,* Lem. 2. huius. *ergo rectangulum ſub M G E in E H minus eſt quadrato E G, & ex lem. 5. P R minor eſt I K.*



Lem. 2. & 5. hui. *Similiter quia tam E H, quàm A H minor eſt eadem H M, ergo rectangulum ſub E G A in A H minus eſt quadrato A G, & I K minor erit, quàm A F. tandem, quia tam V H, quàm M H non eſt minor eadem G H,* Lem. 3. *ergo rectangulum V G M in M H maius erit quadrato G M, & ideo S Z maior erit,* Lem. 5. *quàm P R, & ſic vlterius: quare P R minimum eſt laterum rectorum quarumlibet Diametrorum eiuſdem hyperboles.*

PROP. 1. Addit. *In hyperbole latus rectum alicuius Diametri reperire, quod æquale ſit lateri recto axis; ſed oportet, vt axis tranſuerſus A C minor ſit medietate eius erecti A F.*

ex 35. hu. *Reperiatur Diameter P Q, quæ ſubdupla ſit eius erecti P R, ſitque C M latus, & fiat* e G *ad G A, vt M H ad H A, & ducatur ordinatim applicata ad axim* e d, *coniungaturque recta* d C, *& extendatur diameter* a b *parallela ipſi* d C, *cuius latus rectum ſit* a c. *Dico* a c *æquale eſſe A F: quia* e G *ad G A facta fuit vt M H, ſiue G H ad H A,* Lem. 4. huius. *ergo rectangulum ſub* e G A *in A H æquale eſt quadrato G A,* Lem. 5. huius. *ideoque erectum* a c *æquale erit erecto A F, quod erat propoſitum.*

Dato

PROP. 2. Addit.

Dato latere recto I K diametri hyperboles I L reperire latus rectum alterius Diametri, quod æquale ſit lateri recto I K: oportet autem, vt Diameter I L cadat inter axim, & aliam Diametrum, quæ ſubdupla ſit ſui erecti.

Reperiatur Diameter Q P, quæ ſubdupla ſit ſui erecti P R, eiuſque latus ex 35. hu. *ſit M C; ergo ex hypotheſi I L cadet inter axim A C, & Diametrum P Q, & propterea terminus E lateris C E cadet inter A, & M, igitur reperiri poterit V G, quæ ad G E eandem proportionem habeat, quàm maior M H ad minorem H E, & vt prius, lateris C V ducatur diameter S T, cuius latus rectum S Z: dico S Z æquale eſſe I K: quia V G ad G E eſt, vt M H, ſeu* Lem. 4. huius. *G H ad H E, ergo rectangulum ſub V G E in E H æquale eſt quadrato G E,* Lem. 5. huius. *ideoque S Z æquale I K; quod erat propoſitum.*

Deducitur ex prima propoſitione additarum quod in aliqua hyperbola reperiri poſſunt tria diametrorum latera recta æqualia inter ſe; ſi nimirum in hyperbola, cuius axis C A minor ſit medietate eius lateris recti, reperiantur vtrinque duæ diametri b a, *quarum latera recta* a c *æqualia ſint ipſi A F; tunc quidem tria illa latera recta æqualia erunt inter ſe: reliqua verò latera recta diametrorum cadentium inter A, &* a *maiora erunt latere recto A F; & latera recta diametrorum cadentium vltra punctum* a *ad partes B maiora ſunt* ex 35. huius. *latere recto* a c, *propterea quod magis recedunt ab omnium minimo latere recto P R.*

Simili modo in eadem hyperbola reperiri poſſunt quatuor diametrorum latera recta æqualia inter ſe, ſi nimirum ex ſecunda propoſitione additarum dato latere recto I K diametri I L reperiatur æquale latus rectum S Z alterius diametri S T, & ex altera parte axis ducantur duæ aliæ diametri æquè ab axi remotæ ac illæ, erunt quatuor recta latera earum æqualia inter ſe, & maiora quolibet latere recto diametri cadentis inter I, & S ad vtraſque partes axis: minora verò erunt quolibet latere recto diametri cadentis vltra punctum I ad partes verticis A, vel infra puncta S ad partes a, *vt deducitur ex 35. huius.*

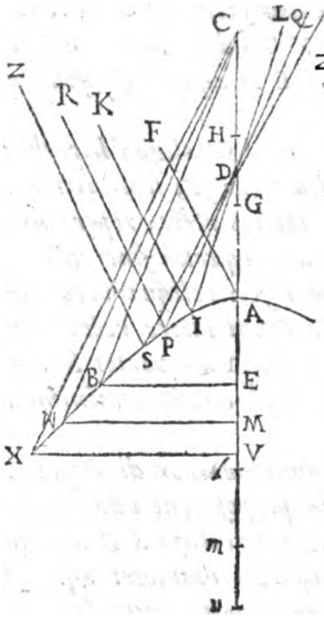
SECTIO SEPTIMA

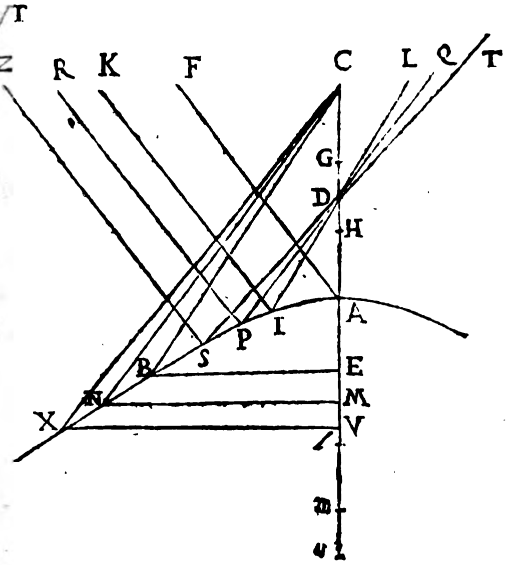
Continens Propoſit. XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

PROPOSITIO XXXVIII.

IN hyperbole axis inclinatus ſi non fuerit minor triente erecti ipſius, erunt duo latera figuræ axis minora, quàm duo latera figuræ cuiuslibet inclinatæ coniugatarum, quæ in eadem ſectione conſiſtunt, & duo latera figuræ inclinati proximioris axi minora ſunt, quàm duo latera figuræ remotioris inclinati.

Si verò fuerit axis minor parte tertia ſui erecti aſſignari poterunt ad vtraſque eius partes duo æquales diametri, quarum quælibet pars tertia ſit ſui erecti, atque duo latera figuræ eiuſdem minora ſunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri ad vtraſque eius partes in eadem ſectione cadentis: & duo latera figuræ diametri ei propinquiores minora ſunt duobus lateribus figuræ remotioris.





In eadem figura ſupponatur prius hyperboles axis A C non minor ſuo erecto, erit P Q maior quàm A C, & S T maior quàm P Q: ideoquè erectus ipſius A C minor erit erecto ipſius P Q (33. ex 7.), & erectus ipſius P Q minor eſt erecto ipſius S T; igitur duo latera figuræ A C minora ſunt, quàm duo latera figuræ P Q, & duo latera figuræ P Q minora, quàm duo latera figuræ S T.

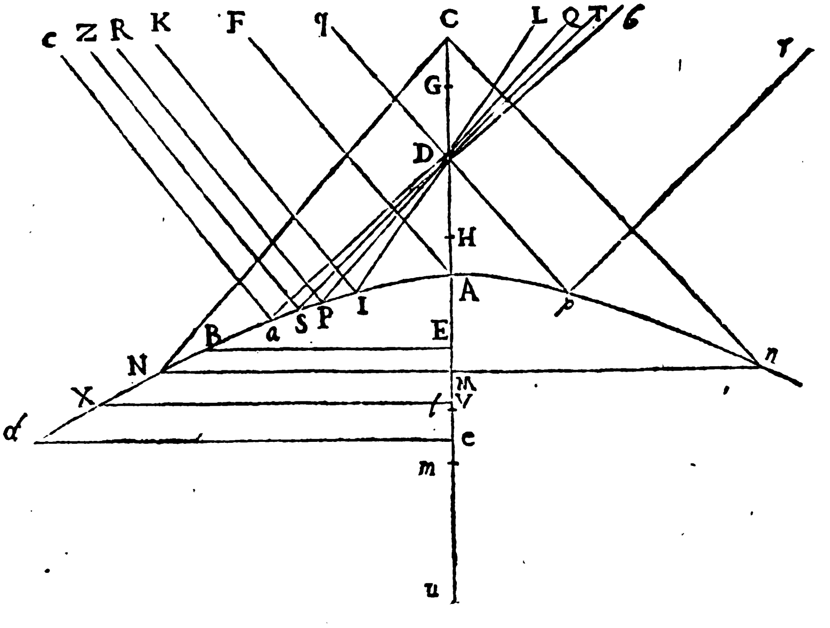
PROPOSITIO XXXIX.

Deindè ſit A C minor quàm A F, ſed non ſit minor tertia parte a eius; igitur A H non erit minor tertia parte ipſius H C: & propterea non eſt minor quadrante ipſius A C; ideoque C A in A H non eſt minus quarta parte quadrati A C; quare C A in A M quater ſumptum ad C A in A H quater, nempe M A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm quadruplum ipſius A C in A M ad quadratum A C. Et ponamus M *m* æqualem M A, componendo M H, ad H A, nempe M H in H A ad quadratum H A non habebit maiorem proportionem,

tionem, quàm C M in M A quater ſumptum vna cum quadrato C A, nempe quàm quadratum C *m* ad quadratum A C; ideoque M H in H A ad quadratum H A minorem proportionem habet quàm quadratum C *n* ad quadratum A C. Et permutando M H in H A ad quadratum C *n*, ſeu ad quadratum ex ſumma ipſarum G M; & M H, ad quod habet eandem proportionem quàm quadratum C A ad quadratum ſummæ P Q, & P R (17. ex 7.) habebit minorem proportionem, quàm quadratum A H ad quadratum A C, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum A C, & A F; igitur ſumma ipſarum A C, & A F minor eſt quàm ſumma ipſarum P Q, & P R. Et, quia M H maior eſt quarta parte ſummæ ipſarum M G, & M H; ergo quadruplum C *m* in M H maius eſt quadrato C *m*, & ponatur V *u* æqualis A V; igitur quadruplũ V M in C *m* ad quadruplum M H in C *m*, ſcilicet V M ad M H minorem proportionem habebit, quàm quadruplum V M in C *m* ad quadratum C *m*: & componendo V H ad H M, nempe V H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm V M in C *m* quater ſumptum, vel *u m* in *m* C bis ſumptum cum quadrato C *m* (eo quod *u m* dupla eſt ipſius V M quæ omnia ſimul ad idem quadratum C *m* minorem proportionem habet, quàm quadratum C *u*. Ergo V H in H A ad quadratum C *u*, ſcilicet quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum S T, & S Z (17. ex 7.) minorem proportionem habet quàm M H in H A ad quadratum C *m*, ſeu qnàm quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum P Q, P R (17. ex 7.) quapropter P Q, & P R ſimul ſumptæ minores ſunt, quàm S T, & S Z ſimul ſumptæ.

PROPOSITIO XXXX.

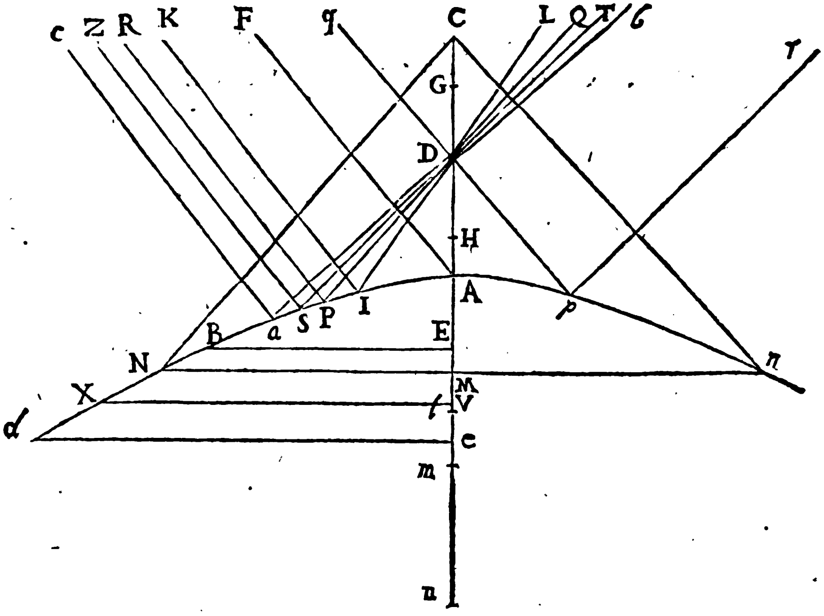
Sit A C minor triente ipſius A F, erit A H minor dimidio ipſius H G, & ponatur M H æqualis dimidio H G, & du-



camus

camus perpendicularem , & diametrum. Dico , quod P Q æqualis eſt trienti ipſius P R.

Educamus inter P Q, A C diametrum I L , & educamus C B ei æquidiſtantem , & perpendicularem B E , & ſecemus E *l* æqualem E A erit ſumma ipſarum G E , & E H æqualis C *l*; eſtque H E minor quàm M H , quæ quarta pars eſt ipſius C *m* ; ergo ſumma ipſarum M G, H E in M H quater ſumptum minus eſt quadrato C *m* : auferatur communiter M G , H E in M E quater ſumptum remanebit quadruplum ſummæ M G , H E in H E minus quàm quadratum C *l* (quia M G , H E ſimul ſumptæ , nempe M C vna cum A E in M E quater ſumptum æquale eſt quadrato *l m* ; quod eſt duplum M E , & aggregatum C E , A E, nempe C *l* in *l m* bis ſumptum) igitur aggregatum M G , & H E in M E quater ſumptum ad aggregatum M G , H E in H E quater ſumptum nẽpe G E ad H E maiorem proportionem habebit , quàm ad quadratum *l* C . & componendo M H ad H E , ſeu M H in H A ad E H in H A habebit maiorem proportionem , quàm M G , H E in M E quater ſumptum cum quadrato *l* C (quæ æqualia ſunt quadrato C *m*) ad quadratum *l* C : & permutando erit M H in H A ad quadratum C *m* , nempe ad quadratum ſummæ ipſarum M G , & M H , ſeu quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum P Q, P R (17. ex 7.) maiorem proportionem habebit , quàm E H in H A ad quadratum *l* C (quod eſt æquale quadrato ſummæ ipſarum G E , E H) quod erit vt quadratum A C ad quadratum aggregati ipſarum I L , I K : quapropter A C ad duo latera figuræ P Q maiorem proportionem habet , quàm ad duo latera figuræ I L . Et propterea duo latera figuræ P Q minora ſunt , quàm duo latera



figuræ

figuræ I L. Simili modo eſtendetur, quod duo latera figuræ I L minora ſunt, quàm duo latera figuræ A C.

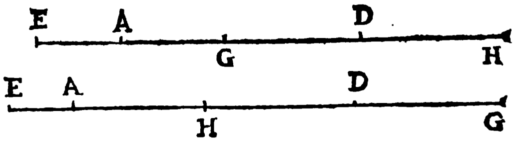
Educamus poſtea C X extra ſegmentum A N; & educamus diametrũ S T ei parallelam, & ad axim perpendicularem X V, erit aggregatum G V, M H in M H quater ſumptum maius quàm quadratum C *m*; & addamus communiter aggregatum M H, G V in M H quater ſumptum; oſtendetur vt antea, quod duo latera figuræ S T maiora ſunt, quàm duo latera figuræ P Q.

Oſtendetur quoque in reliquis diametris cadentibus ad vtraſque partes ipſius P Q in eadem ſectione, quod duo latera figuræ diametri ipſi P Q proximioris minora ſunt, quàm duo latera figuræ remotioris.

In Sectionem VII. Propoſit: XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

LEMMA VI.

SI recta linea HG biſariam ſecta in D producatur vtcumque ad A, & E, ita vt D H non maior ſit quàm H E, vel H A, & E D maior ſit, quàm D A: dico rectangulum ſub E D A in H A maius eſſe quadrato D A.



Quia E D maior ad minorem D A habet maiorem proportionem, quàm D H non maior ipſa H A, ad H A, ergo componendo E D A ad D A maiorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum ſub extremis contentum, ſcilicet ſub E D A in A H, maius eſt quadrato D A.

LEMMA VII.

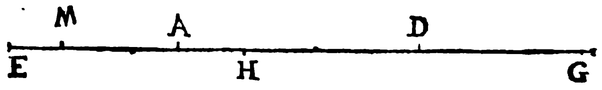
ISdem poſitis, ſi D H non minor fuerit quàm H A, vel H E, ſitque H E maior, quàm H A: dico rectangulam ſub E D A in A H minus eſſe quadrato D A.

Fiat

Fiat H M æqualis maiori H D, erit E A differentia minima H A; & intermedia H E minor, quàm M A, quæ eſt differentia maxima M H, & minima H A, & A D maior eſt quàm A H, ergo E A ad M A minorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & permutando E A ad A D habebit minorem proportionem, quàm M A ad A H, & componendo E D ad D A mino proportionem habebit, quàm M H, ſiue D H ad A H, & iterum componendo E D A ad D A minorem proportionem habebit, quàm eadem D A ad A H, & propterea rectangulum ſub E D A in A H minus erit quadrato D A.

L E M M A VIII.

Iſdem poſitis ſi D H maior fuerit, quàm A H ſed minor quàm E H, fueritque proportio E A ad A D eadem proportioni M A ad A H, dico rectangulum ſub E D A in A H æquale eſſe quadrato D A: ſi verò proportio illa maior fuerit, vel minor rectangulum ſimiliter quadrato maius, vel minus erit.



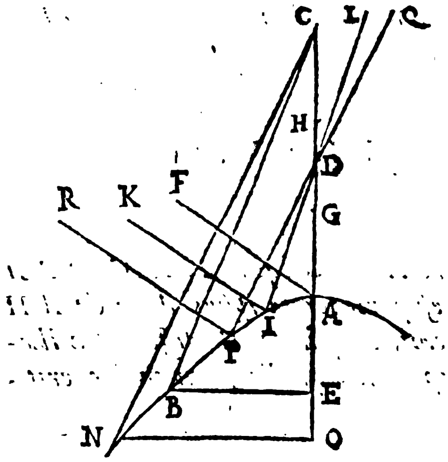
Quia E A ad A D ponitur vt M A ad A H, componendo E D ad D A, erit vt M H, ſeu D H ad H A, & iterum componendo E D A ad D A, erit vt D A ad A H, & propterea rectangulum ſub E D A in A H æquale erit quadrato D A.

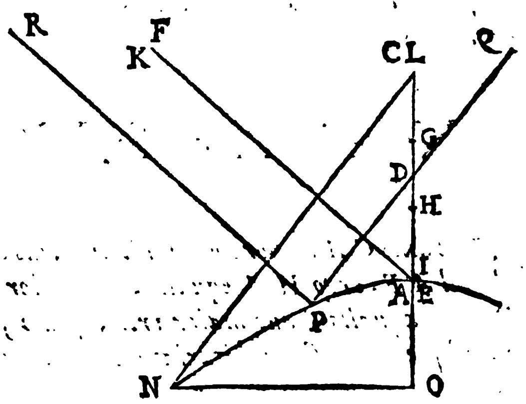
Quando verò E A ad A D maiorem proportionem habet, quàm M A ad A H, tunc bis componendo E D A ad D A maiorem proportionem habebit, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum ſub extremis; ſcilicet ſub E D A in A H maius erit quadrato intermediæ D A: non ſecus quando E A ad A D minorem peoportionem habet, quàm M A ad A H, oſtendetur rectangulum ſub E D A in A H minus quadrato ex D A.

L E M M A IX.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præſecta H A, intercepta G A, centrum D, diameter I L, eiuſque erectus I K, & C E ſit latus eiuſdem, ſitque diameter Q P, cuius erectus P R, & latus L O: dico quod rectangulum ſub O D E in E H ab ipſo quadrato D E, atque Q P R ſumma laterum figuræ Diametri P Q ab L I K ſumma laterum figuræ I L, vel ab ipſa C A F ſumma laterum figuræ axis, vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, aut vna excedunt.

Et





Et primo rectangulum ſub O D E in E H æquale ſit quadrato D E, ergo ad hæc duo ſpatia æqualia eandem proportionem habebit idem rectangulum ſub E D O in O E, ſed vt rectangulum ſub E D O in O E ad rectangulum ſub E D O in E H, ita eſt O E ad E H, (propterea quod æquales altitudines habent), igitur vt O E ad E H, ita eſt rectangulum ſub E D O in O E ad quadratum D E, & componendo O H ad E H, ſiue rectangulum O H A ad rectangulum E H A eandem proportionē habebit, quàm rectangulum ſub E D O in O E vna cum quadrato D E, ſeu quàm quadratum D O ad quadratum D E, vel potius vt quadratum ex dupla D O ad quadratum ex dupla D E, nempe vt quadratum ex G O H ad quadratum ex G E H, quare permutando rectangulum O H A ad quadratum ex G O H eandem proportionem habebit, quàm rectangulum ex E H A ad quadratum ex G E H, ſeu vt quadratum ex A C ad quadratum ex C A F, vel ex L I K; ſed vt rectangulum A H O ad quadratum ex G O H, ita eſt quadratum ex A C ad quadratum ex Q P R: quare idem quadratum A C eandem proportionem habet ad quadratum ex Q P R, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex I K L, & propterea quadrata ipſa æqualia ſunt, & ſumma laterum Q P R æqualis eſt ſumma laterum C A F, vel I L K.

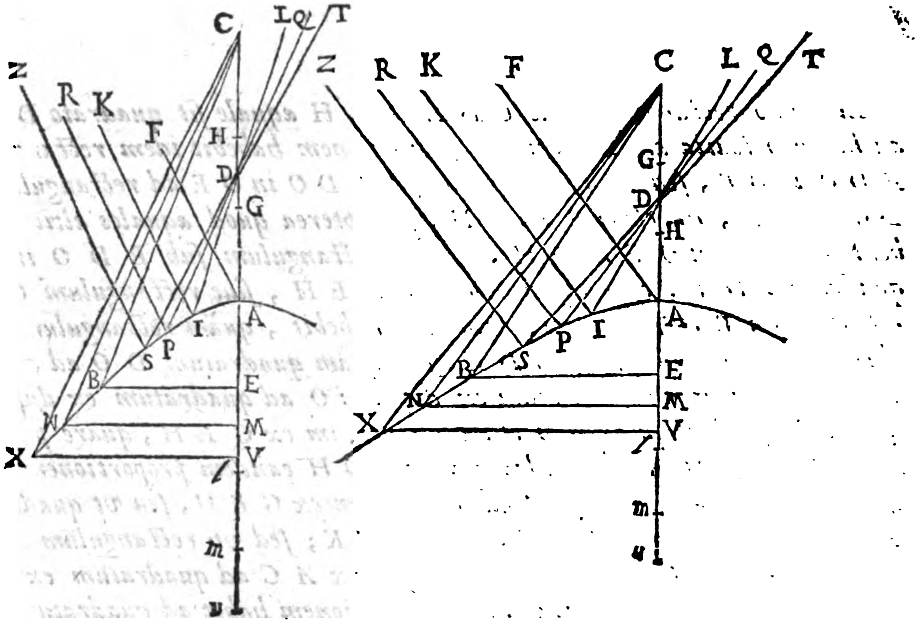
Prop. 16. huius.
Ibidem.

Secundo ſit rectangulū ſub E D O in E H maius quadrato D E, tunc quidem idem rectangulum ſub E D O in O E ad rectangulum ſub O D E in E H minorem proportionē habebit, quàm ad quadratum ex D E, ſeu O E ad E H minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex D E; & componendo ſumpta eadem altitudine H A, quadruplicando poſtrema quadrata, & permutando, & ex 16. huius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex L I K, & propterea ſumma Q P R maior erit, quàm C A F, ſeu quàm L I K.

Tertio ſit rectangulum ſub E D O in E H minus quadrato D E, patet quod idem rectangulum ſub E D O in O E ad rectangulum ſub E D O in E H, ſeu O E ad E H maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum D E, & componendo ductis prioribus terminis in A H, quadruplicando poſtrema quadrata, *permutando vt prius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R, maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, ſeu ex L I K, & propterea ſumma Q P R minor erit, quàm C A F, vel L I K, quæ erat oſtendenda.*

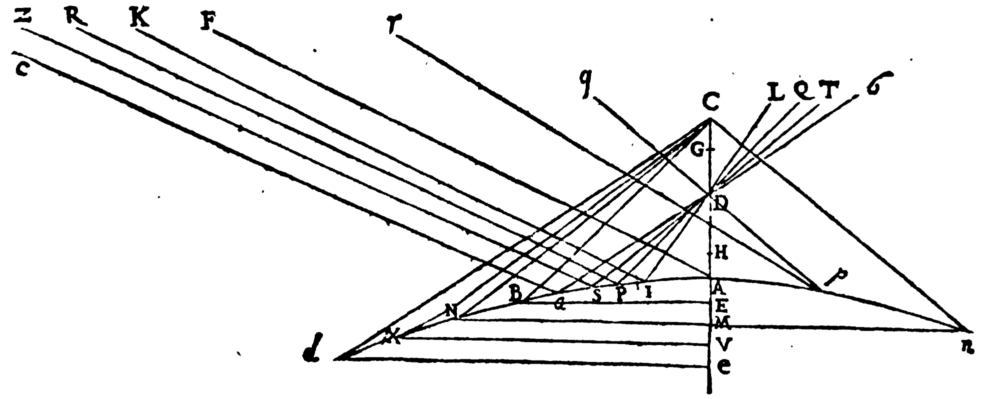
Notæ in Propoſit. XXXVIII. XXXIX.

QVia axis C A minor non eſt triente eius erecti A F, eſtq; H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A æqualis, aut maior eſt parte tertia ipſius A G; & A H æqualis, aut maior erit, quàm ſemiſſis ipſius H G differentiæ illarum, eſtque G H ſecta biſariam in D, ergo H A æqualis, aut maior erit,
Lem. 6. *quàm D H, eſtque H E maior quàm H A, ergo pariter H E maior eſt, quàm D H, quare rectangulum ſub E D A in A H maius erit quadrato D A, atque*
Lem. 9. *ſumma laterum figuræ L I K maior, quàm ſumma laterum figuræ axis C A F.*
Similiter quia H M maior eſt, quàm H E, erit quoque H M maior, quàm D H, & propterea ex lemma 6. & 9. ſumma Q P R maior erit, quàm ſumma L I K.



Notæ in Propoſit. XXXX.

QVia C A minor eſt triente ipſius A F, eſtque H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A minor eſt tertia parte ipſius A G, & minor ſemiſſe differentiæ rentia H G ; & ideo H A minor erit , quàm H D : ſecarè ergo poterit H M æqualis D H , quæ maior erit , quàm A H , ducaturq; per M ad axim ordinatim applicata N M n occurrens ſectioni in punctis N n , à quibus iungātur C N , & C



n , ijſdemque æquidiſtantes ducantur duæ diametri P Q , & p q , quarum latera recta P R , & p r . Oſtendendum eſt P Q ſui erecti P R , atque p q ſui erecti p r ſubtriplam eſſe , ſed duo figuræ latera P Q , P R æqualia eſſe alterius figuræ lateribus p q , p r , & inſuper P Q , P R minima eſſe laterum figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ſectionis , & latera figurarum minimis proximiora , eſſe minora lateribus figurarum remotiorum .

Quia H M ad M G eandem proportionem habet , quàm P Q ad P R , vel p Prop. 6. huius.
q ad p r , eſtque H M ſubtripla ipſius M G (cum M H facta ſit æqualis H D) ergo P Q ipſius P R , pariterque p q ipſius p r ſubtripla eſt : & ſunt latera figuræ Q P R æqualia lateribus q p r alterius figuræ , cum diametri Q P , & q p æquè recedant ab axi , & habeant latus commune C M .

Quod verò ſumma laterum figuræ Q P R minima ſit reliquarum ſummarū laterum figuræ cuiuſlibet diametri ſic oſtendetur .

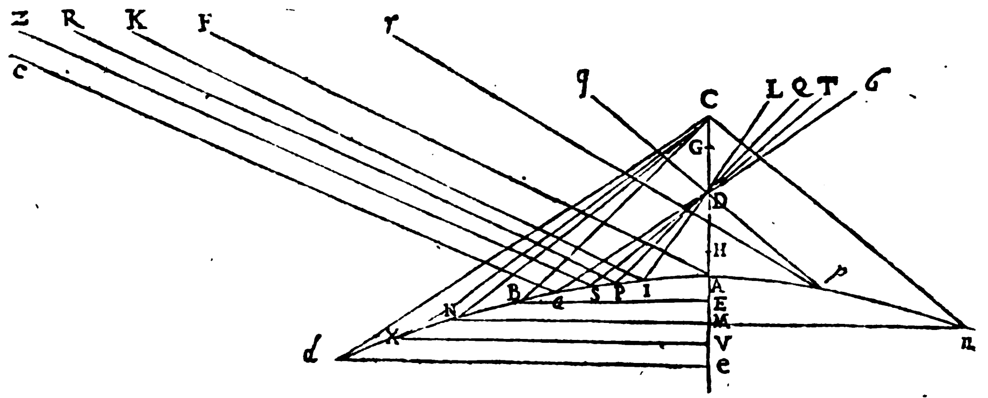
Quia A H , & E H minora ſunt , quàm H M , ſiue D H , ergo rectangulum Lem. 7.
ſub E D A in A H minus eſt quadrato D A , & ſumma L I K minor eſt ſum- Lem. 9.
ma C A F .

Pariter quia M H æqualis eſt H D , & H E minor eadem , ergo ambo non Lem. 7. Lem. 9.
erunt maiores eadem D H , ergo rectangulum ſub M D E in E H minus erit quadrato D E , atque ſumma Q P R minor erit , quàm L I K .

Rurſus quia V H maior , eſt quàm M H , ſeu quàm D H , erunt illæ non Lem. 6. Lem. 9.
minores eadem D H , ergo rectangulum ſub V D M in H M maius erit quadrato D M , atque ſumma T S Z maior erit , quàm ſumma Q P R .

In hyperbola reperire diametrum , cuius figuræ latera æqualia ſint lateribus PROP. 3. Addit. ex 40. huius.
figuræ axis : oportet autem vt axis A C minor ſit triente erecti eius . Reperiatur diameter P Q ſubtripla erecti eius P R , eiuſque latus ſit C M , & fiat e A ad A D , vt M A ad A H , & lateris C e ducatur diameter a b , cuius erectus a c . Dico hanc eſſe diametrum quæſitam : quia e A ad A D eandem proportionem habet , quàm M A ad A H , erit rectangulum ſub e D A in A H

Lem. 8. Lem. 9. *æquale quadratò D A, & ſummæ laterum* b a c *æqualis erit laterum figuræ axis ſummæ C A F.*



PROP. 4. Addit. *In eadem hyperbola data diametro I L reperire aliam diametrum, ita vt eius figuræ latera æqualia ſint lateribus figuræ datæ diametri I L; oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q ſubtriplam eius erecti. Sit* ex 40. huius. *C E latus diametri I L, & C M, ſit latus diametri P Q, & quia punctum E cadit inter M, & A, erit H E minor, quàm H M, vel D H: fiat V E* Lem. 8. *ad E D, vt M E ad E H, ergo rectangulum ſub V D E in E H æquale erit quadrato E D, & ex lemma 9. ſummæ laterum T S Z æqualis erit ſummæ laterum L I K; quod erat propoſitum.*

Facile colligitur ex 3. additarum, quod in hyperbola cuius axis ſubtripla ſit erecti eius aſſignari poſſunt tres ſummæ laterum figurarum trium Diametrorum quæ æquales ſint inter ſe. Ex 4. verò additarum in eadem Hyperbola aſſignari, poßunt quatuor ſummæ laterum figurarum quatuor diametrorum, quæ æquales ſint inter ſe.

Deinde ſit A C minor, quàm A F, ſed non ſit minor eius triplo, ergo A H non erit minor triplo H C, &c. *Textus mendoſus omnino corrigi debuit, nam ex contextu ſequenti deducitur A C non tripla minor, ſed minor parte tertia ſupponi debere ipſius A F.* a

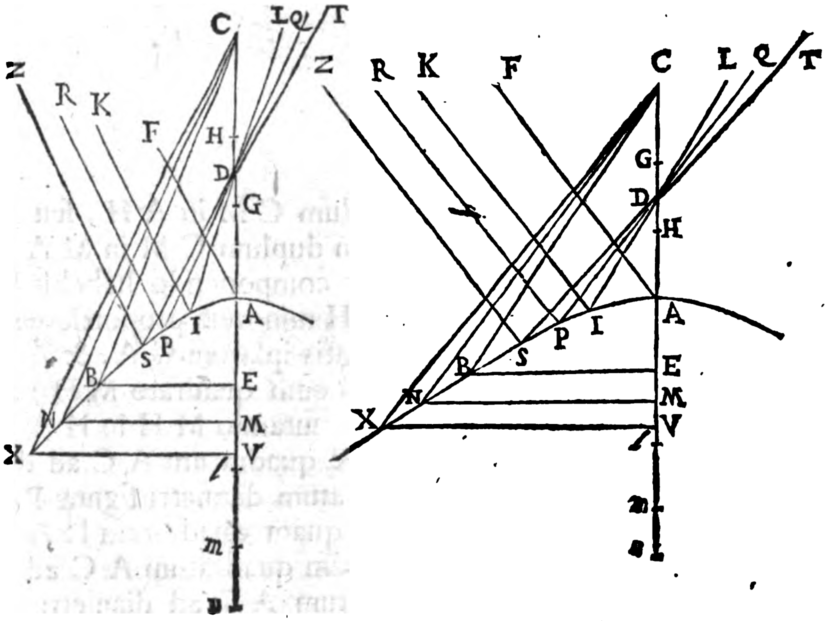
* * *

SECTIO OCTAVA

Continens Propoſit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

IN hyperbole ſi quadratum axis inclinati minus non fuerit dimidio quadrati ex differentia ipſius, & ſui erecti, vtique quadratum diametri figuræ eius minus eſt, quàm quadratum diametri figuræ cuiuſcumque alterius inclinati eiuſdem ſectionis.

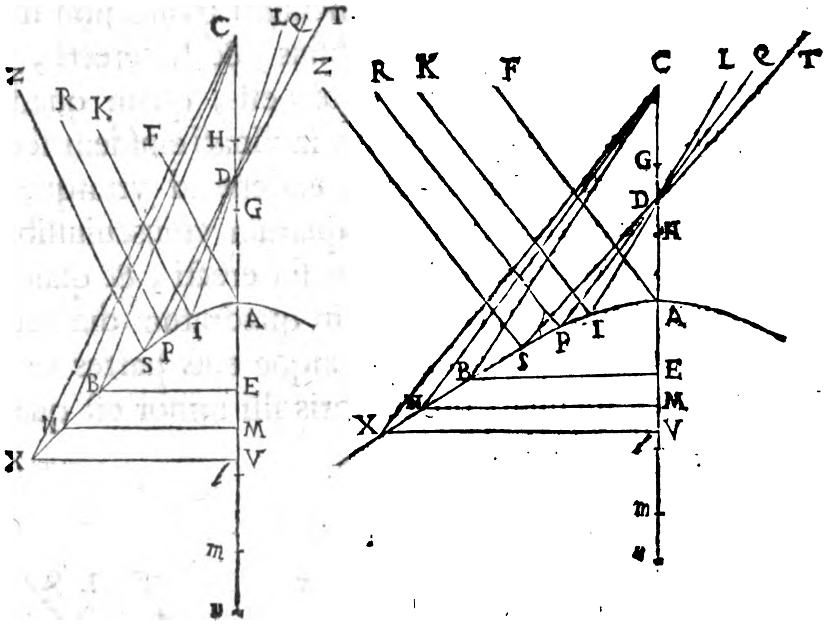
XXXXVI. Si verò minus fuerit cadent ad vtraſque partes eius duæ inter ſe æquales diametri, quarum vniuscuiuſlibet; quadratum æquale eſt quadrato exceſſus ſui erecti, & quadratum diametri figuræ ipſius minus eſt quàm quadratum diametri figuræ cuiuſlibet alterius inclinati ad vtraſque eius partes cadentis: & diameter figuræ inclinati proximioris illi minor eſt quàm diameter figuræ inclinati remotioris.



Iiſdem figuris manentibus ſupponatur prius A C non minor quàm A F; ergo P Q non erit minor quàm P R (28. ex 7.) & duo quadrata A C, A F nempe diameter figuræ A C minor eſt quàm diameter figuræ P Q; & Demonſt. prop. 44.

Q; & pariter diameter figuræ P Q minor eſt, quàm diameter figuræ S T. Sit iam A C minor quàm A F, & eius quadratum non minus dimidio quadrati exceſſus ipſius A F ſuper A C. Et quia A C ad A F eandem proportionem habet, quàm A H ad A G; ergo duplum quadrati A H non eſt minus quadrato H G; ergo M H in H A bis ſumptum maius eſt quadrato H G, & addatur communiter duplum G A in A H fiet duplum ſummæ G A, M H, vel C M in A H maius quàm duplum G A in A H cum quadrato H G, ſeu quàm quadratum G A cum quadrato A

Demonſt. prop. 45.



H: quare duplum C M in M A ad duplum C M in A H, ſeu M A ad A H minorem proportionem habet, quàm duplum C M in M A ad quadratum G A vna cum quadrato A H: & componendo habebit M H ad H A, ſeu M H in H A ad quadratum A H minorem proportionem quàm duplum C M in M A cum duobus quadratis ipſarum G A, & A H (quæ omnia ſimul æqualia ſunt quadrato M G cum quadrato M H) ad quadratum A G cum quadrato A H: & permutando M H in H A ad quadratum G M cum quadrato M H (nempe quadratum A C ad duo quadrata laterum figuræ P Q) ſiue ad quadratum diametri figuræ P Q (17. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm quadratum H A ad quadratum A G cum quadrato A H, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius; igitur quadratum A C ad diametrum figuræ P Q minorem proportionem habet, quàm ad diametrum figuræ A C: & ideo diameter figuræ P Q maior erit diametro figuræ A C. Præterea, quia duplum quadrati M H maius eſt quadrato H G; ergo V H in M H bis maius erit, quàm quadratum H G: & oſtendetur (quemadmodum diximus) quod diameter figuræ S T maior ſit quàm diameter figuræ P Q.

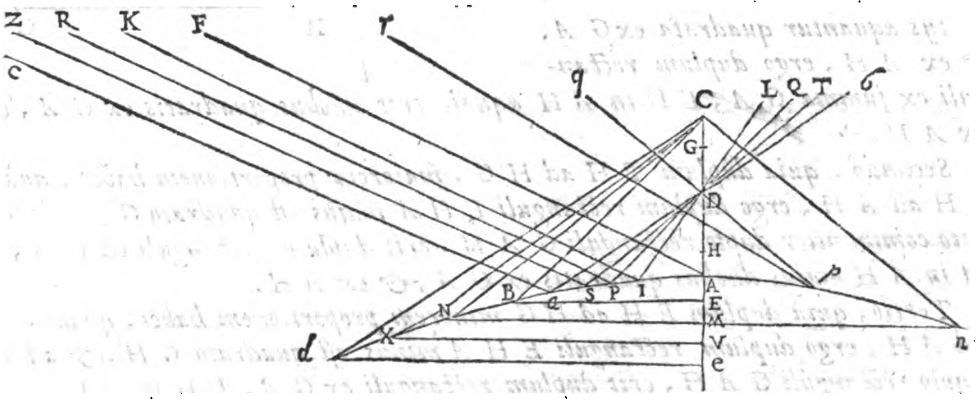
PROP.

PROPOSITIO XXXXVI.

SIt poſtea quadratum A C minus dimidio quadrati ex differentia ipſarum C A, & A F; erit duplum quadrati A H minus quadrato H G & ponamus duplum quadrati M H æquale quadrato H G; & educamus ad axim perpendicularem N M, & iungamus N C; & ducamus diametrum P Q parallelā ipſi N C, erit H M ad M G, vt P Q ad P R, & propterea quadratum P Q dimidium erit quadrati exceſſus ipſius P R; ergo P Q eſt vna æqualium: ponatur inſuper inter A, & P diameter I L, & conſtructio perficiatur, vt prius. Et quia duplum quadrati M H æquale eſt quadrato H G, erit duplum M H in H E minus quadrato H G, & ponatur communiter duplum G E in E H; igitur duplum aggregati M G in E H minus eſt quadrato G E cum quadrato E H; & oſtendetur quemadmodum diximus antea, quod quadratum diametri figuræ P Q minus ſit quadrato diametri figuræ I L; & quadratum diametri figuræ I L minus ſit quadrato diametri figure A C.

a

6. huius.



Deindè ducatur diameter inclinata S T extra ſegmentum A P, & C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V; & quia duplum quadrati M H æquale eſt quadrato H G erit duplum V H in H M maius quadrato H G: ponatur communiter duplum G M in M H, fiet duplum aggregati V G, M H, in M H maius quadrato M G cum quadrato M H: quare duplum aggregati V G, & M H in M V ad duplum aggregati V G, & M H in M H, nempe M V ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum aggregati V G, & M H in M V ad quadratum G M cum quadrato M H: & componendo oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod quadratum A C ad diametrum figuræ P Q maiorem proportionem habeat, quàm ad diametrum figuræ S T. Eadem prorſus cōtingent in reliquis omnibus diametris. Quapropter diameter figuræ P Q minor eſt diametro figuræ cuiuslibet diametri ad vtraſque eius partes in eadem ſectione exiſtente. Quod erat oſtendendum.

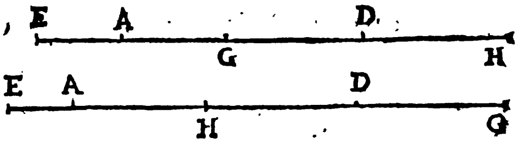
In

In Sectionem VIII. Propoſit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

LEMMA X.

SI rectæ lineæ G H biſariam ſectæ in D addantur ſegmenta H A, & H E atque proportio dupli E H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H A: dico duplum rectanguli ex G A, & H E in H A æquale eſſe quadratis ex G A, & ex A H: ſi verò proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadratis: ſi verò proportio fuerit minor, rectangulum minus erit quadratis.

Primo quia ſi duplum E H ad H G, eſt ut G H ad H A, ergo duplum rectanguli E H A æquale erit quadrato G H, & addatur communiter duplum rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex ſumma G A, & E H in A H æquale duplo rectanguli G A H cum quadrato G H; his verò ſpatijs æquantur quadrata ex G A, & ex A H, ergo duplum rectanguli ex ſumma G A, E H in A H æquale erit duobus quadratis ex G A, & ex A H.

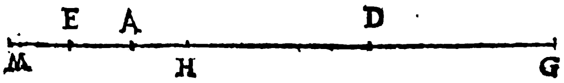


Secundo, quia duplum E H ad H G, maiorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A maius eſt quadrato G H, & addito communiter duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H maius duobus quadratis ex G A, & ex A H.

Tertio, quia duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A minus eſt quadrato G H, & addito duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus quadratis ex G A, & ex A H.

LEMMA XI.

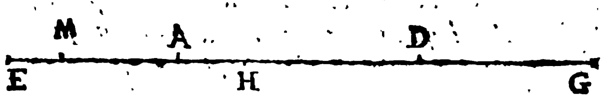
SI recta linea G H ſecetur exterius in A, E, & ſit eadem G H differentia nedum ſegmentorum G E, & E H, ſed etiam duorum ſegmentorum G A, & A H: dico quod quadrata ex maximo, & ex uno intermediorum ſegmentorum, ſcilicet ex G E, & ex E H æqualia ſunt quadratis ex reliquo intermediorum, & ex minimo ſegmento, ſcilicet ex G A, & ex A H una cum duplo rectã-



guli

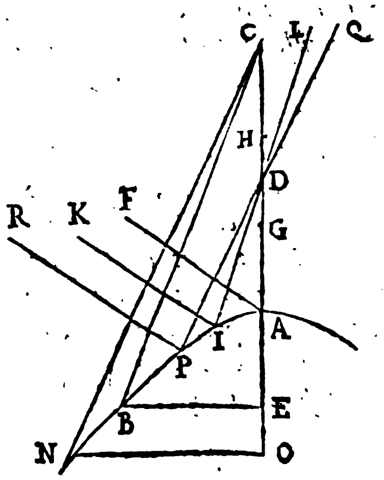
guli ex ſumma extremorum, vel intermediorum in differentiam minimorum ſegmentorum, ſcilicet ex G A cum H E in E A.

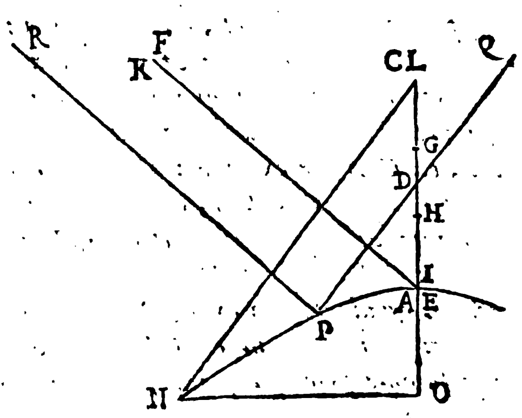
Quia duplum rectanguli G A H cum duplo rectanguli G A E æquatur duplo rectanguli ſub G A in H E, addito cõmuniter duplo rectanguli H E A erit duplum rectanguli G E H æquale duplo rectanguli G A H cum duplo rectanguli ex ſumma G A, H E in E A; & addito communi quadrato G H, erit duplum rectanguli G E H cum quadrato G H, ſcilicet duo quadrata ex G E, & ex E H, erunt æqualia illis omnibus ſpatijs, ſcilicet duplo rectanguli ex ſumma G A, H E in E A cum duplo rectanguli G A H ſimul cum quadrato ex G H: ſed duplo rectanguli G A H cum quadrato G H æqualia ſunt duo quadrata ex G A, & ex A H, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia erunt quadratis ex G A, & ex A H cum duplo rectanguli ex G A; & H E in E A, quod erat oſtendendum.



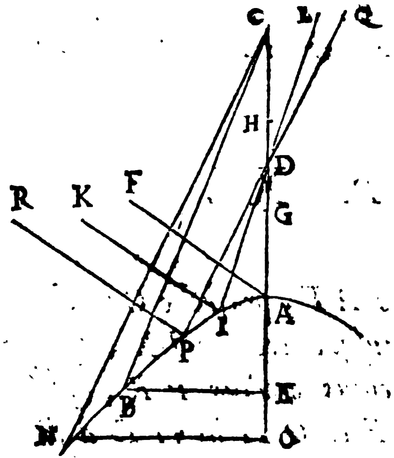
LEMMA XII.

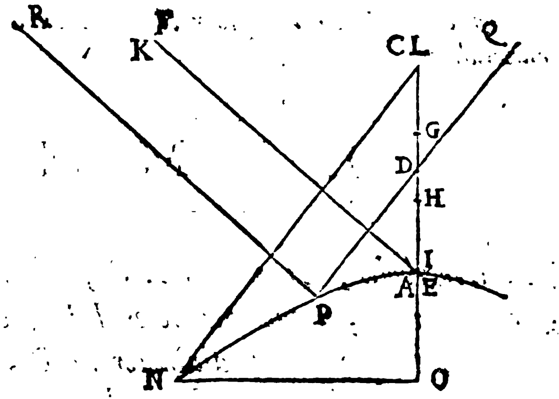
IN *hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præſectæ C G, H A, centrum D, atque diameter I L, eiuſque erectus I K, & latus C E, pariterque altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex G E cũ O H in H E à duobus quadratis ex G E, & ex E H; nec non quadrata Q P, & P R laterum figuræ diametri Q P à quadratis ex L I, & ex I K, vel ex C A, & ex A F, vna deficiunt, aut vna æqualia ſunt, vel vna excedunt.*





Quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E æquale eſt quadratis ex G E
& ex E H, ergo idem rectangulum, cuius altitudo G E, & O H, baſis verò
O E bis ſumptum ad duplum rectanguli, cuius altitudo G E, O H, baſis verò
H E, ſeu O E ad H E eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli
ex G E, & O H in O E ad quadrata ex G E, & ex E H: quare componen-
Lem. 11. *do O H ad E H, ſeu O H A ad E H A eandem proportionem habebit, quàm*
huius. *duo quadrata ex G O, & ex O H ad duo quadrata ex G E, & ex E H, &*
permutando O H A ad quadrata ex G O, & ex O H, ſeu quadratum ex A C
17. huius. *ad quadrata ex Q P, & ex P R eandem proportionem habebit, quàm rectan-*
Ibidem. *gulū E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, ſeu erit vt quadratum A C ad*
quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex C A & ex A F: quare
duo quadrata ex Q P, & ex R P æqualia ſunt duobus quadratis ex I L, &
ex I K, vel ex C A, & A F.





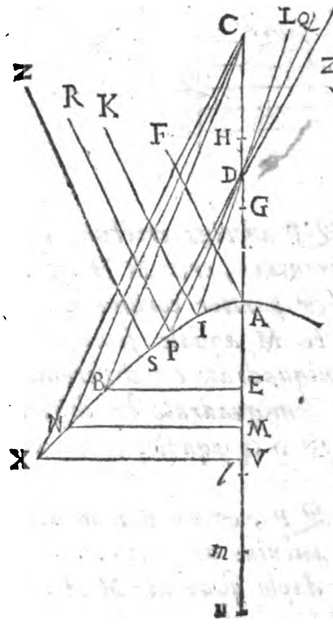
Secundo quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus ponitur quadratis ex G E, & ex E H, igitur idem ſpatium ſcilicet duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad duplum rectanguli ex G E, & O H in H E, ſiue O E ad H E maiorem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, O H in O E ad quadrata ex G E, & O H, & vt prius componendo, ex lemmate 11. & permutando, ex 17. huius; idem quadratum A C ad quadrata ex Q P, & ex P R maiorem proportionem habebit quàm ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata, ex C A, & ex A F: quapropter quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt quadratis ex I L, & ex I K, vel quadratis ex C A, & ex A F.

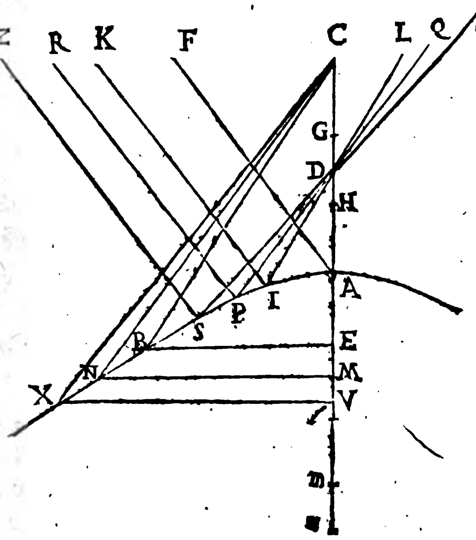
Tertio quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E maius eſt ſumma quadratorum ex G E, & ex E H, igitur, eodem progreſſu, habebit quadratum A C ad ſummam quadratorum ex Q P, & ex P R minorem proportionem, quàm ad ſummam quadraterum ex I L, & ex I K, vel ex C A, & ex A F: & propterea ſumma priorum quadratorum maior erit ſumma poſteriorum, vt fuerat propoſitum.

Nota

Notæ in Propoſit. XXXXIV. & XXXXV.

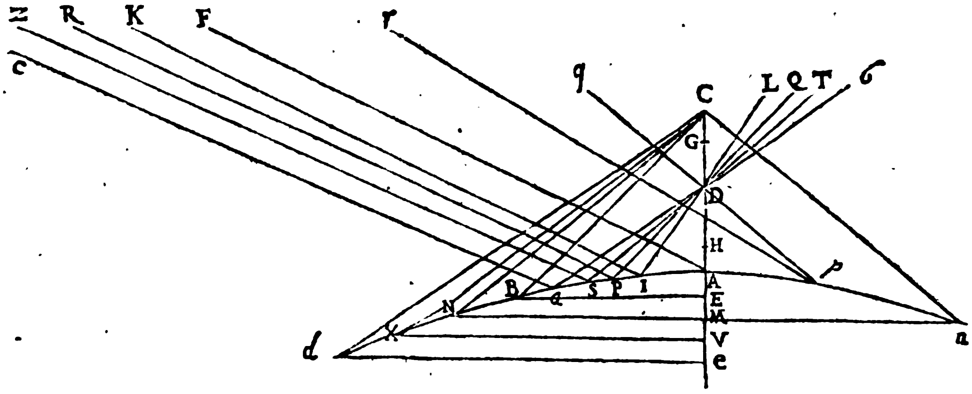
*Quia C A maior eſt, quàm A F, vel ſi minor eſt quadratum ex C A, minor non eſt dimidio quadrati ex differentia C A, & A F, eſtque H A ad A G vt A C ad A F, & H A ad G H, vt A C ad differentiam ipſarum A C, A F, ergo quadratum H A ad dimidium quadrati G H erit vt quadratum A C ad dimidium quadrati ex differentia ipſarum A C, & A F, quare quadratum ex H A minor non erit ſemiſſe quadrati H G, ideoq; duplum quadrati A H minor non erit quadrato H G, eſtque duplum rectanguli E H A, vel M H E maius duplo quadrati A H, ſeu maius quadrato H G;
propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H* Lem. 10.
ad H A, ideoque duplum rectanguli ex G A, H A in A H maius erit quadra- Lem. 12.
tis ex G A, & ex A H, & inſuper ſumma quadratorum ex I L, & ex I K maior erit, quàm ſumma quadratorum ex C A, & ex A F.





Notæ in Propoſit. XXXXVI.

Quia quadratum axis C A minus eſt ſemiſſe quadrati ex differentia ipſarum A C, & A F, eſtque H A ad A G, vt C A ad A F, atque G H eſt differentia ipſarum A H, & A G, igitur quadratum ex A H *minus eſt ſemiſſe quadrati G H: fiat iam quadratum ex M H æquale ſemiquadrato ex G H, & lateris C M fiant duo diametri Q P, & q p, eorumque erecta ſint P R, & p r: dico ductas diametros æquales eſſe, & quadratum ex P Q æquale eſſe quadrato ex differentia ipſarum P Q, & P R.*



Quia vt M H ad G M, ita eſt diameter Q P ad eius erectum P R, ergo
ex 6. hu. *comparando antecedentes ad terminorum differentias, erit M H ad H G, vt P Q ad differentiam ipſarum P Q, & P R, & pariter eorundem quadrata proportionalia erunt, eſtque quadratum ex H M æquale ſemiquadrato ex G H, ergo quadratum ex P Q æquale erit ſemiquadrato ex differentia P Q, & P R, & ſic quadratum ex p q æquale erit ſemiquadrato ex differentia ipſarum p q & p r; & ſunt diametri P Q, & p q æquales, cum æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M.*

Secundo dico quod ſumma quadratorum ex Q P, & ex P R minor eſt qualibet alia ſumma quadratorum laterum figuræ alterius diametri.

Quia duplum rectanguli M H E minus eſt duplo quadrati M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum M H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli ex G E, & M H in E H
Lem. 10. huius. *minus erit ſumma quadratorum ex G E, & ex E H & propterea ſumma qua-*
Lem. 12. huius. *dratorum ex Q P, & ex P R minor erit ſumma quadratorum ex I L, & ex I K.*

Tertio, quia duplum rectanguli ex E H A minus eſt duplo quadrati M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum E H ad H G minorem proportio-
Lem. 10. huius. *nem habet, quàm G H ad H A, ergo duplum rectanguli ex G A, E H in A H*
Lem. 12. huius. *minus erit ſumma quadratorum ex G A, & ex A H: quare ſumma quadratorum ex I L, & ex I K minor erit, quàm quadratorum ſumma ex A C, & ex A F.*

Quarto quia duplum rectanguli V H M maius eſt duplo quadrati ex M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum V H ad H G maiorem proportionem habet, quàm H G ad H M, & propterea duplum rectanguli ex G M, &
Lem 10 huius. *V H in M H maius erit ſumma quadratorum ex G M, & ex M H, & ideo*
Lem. 12. huius. *ſumma quadratorum ex T S, & S Z maior erit quadratorum ſumma ex Q P, & ex P R, & ſic de reliquis: quare ſumma quadratorum ex Q P, & ex P R minima eſt omnium, vt fuit propoſitum.*

PROP. 5. Addit.

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia ſint quadratis laterum figuræ axis: oportet autem vt quadratum axis C A minus ſit ſemiquadrato ex differentia laterum figuræ eius C A, & A F.

Quia ex hypotheſi quadratum axis A C minus eſt ſemiquadrato ex differentia laterum figuræ A C, A F, vt in nota propoſit. 46. dictum eſt, quadratum ex A H minus eſt ſemiquadrato ex G H: fiat duplum e *H ad H G, vt G H ad H A, & lateris C* e *ducatur diameter* b a, *cuius erectus* c a, *ergo duplum rectanguli ex ſumma G A,* e *H in A H æquale eſt ſumma quadratorum ex G A, & ex A H, & ſumma quadratorum ex* a b, *& ex* a c *æqualis erit quadratorum ſummæ ex A C, & ex A F, quod erat oſtendendum.*

Lem. 10. huius.
Lem. 12. huius.

PROP. 6. Addit

In eadem hyperbola diametrum reperire, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia ſint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum ſubduplum ſit quadrati ex differentia P Q, & ex P R.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus ſit S Z: erit igitur duplũ rectanguli ex G E, & V H in E H æquale quadratis ex G E, & ex E H, & propterea ſumma quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis erit quadratorum ſummæ ex L I, & ex I K, quod erat propoſitum.

Lem. 10.
Lem. 12. huius.

Deducitur pariter ex 5. propoſitione additarum in eadem hyperbola tres diametros reperiri poſſe, quarum laterum ſummæ quadratorum æquales ſint inter ſe.

Et ex 6. propoſitione additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiuſdem hyperbolæ laterum ſummæ quadratorum æquales eſſe poſſunt inter ſe.

a Et educamus inter A P inclinatam I L: quia quadruplum quadrati M H æquale eſt quadrato H G, &c. *Suppleri debent ea, quæ deficiunt, alioqui conſtructio imperfecta eſſet: duci igitur debet C B parallela diametro I L, quæ occurrat ſectioni ad punctum B, à quo ad axim perpendicularis ducatur B E ſecans axim in E.*

SECTIO NONA

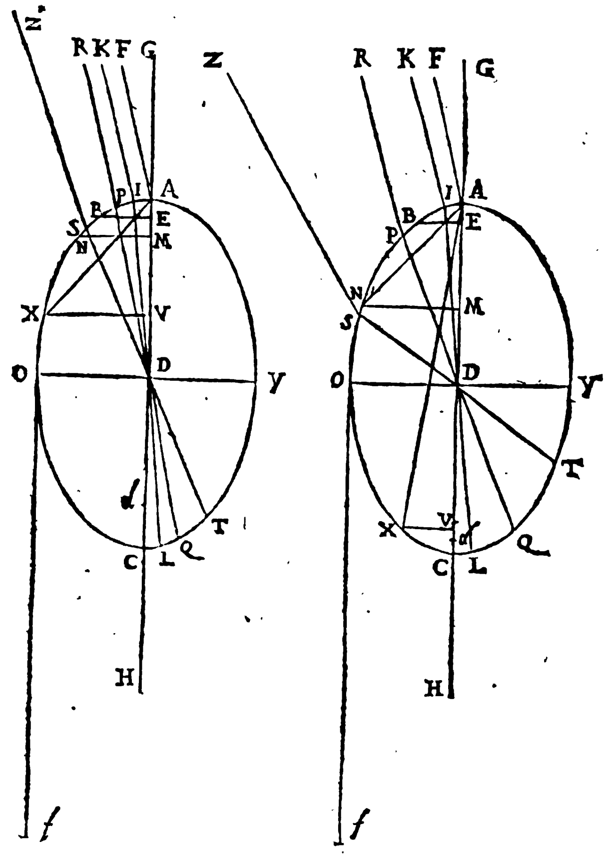
Continens Propoſit. XXXXVI. XXXXVII. & XXXXVIII.

a IN ellipſi duo latera figuræ maioris axis tranſuerſi minora ſunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri, & duo latera figuræ diametri axi maiori proximioris minora ſunt duobus lateribus figuræ diametri remotioris.

XXXXVII.

XXXXVII. Si verò duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; vtique quadratum diametri ſuæ figuræ minus erit quadrato diametri figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ſectionis, & quadratum diametri figuræ proximioris axi minus erit quadrato diametri figuræ remotioris.

XXXXVIII. Si autem duplum quadrati axis tranſuerſi maius fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ, æquidem reperientur ad vtraſque eius partes duæ diametri æquales, & cuiuſlibet earum quadratum bis ſumptum æquale erit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; & quadratum diametri ſuæ figuræ minus eſt quadrato diametri figuræ alterius cuiuſcunque diametri exiſtentis in eodem quadrante eiuſdem ſectionis; & diameter figuræ proximioris minor eſt diametro figuræ remotioris.

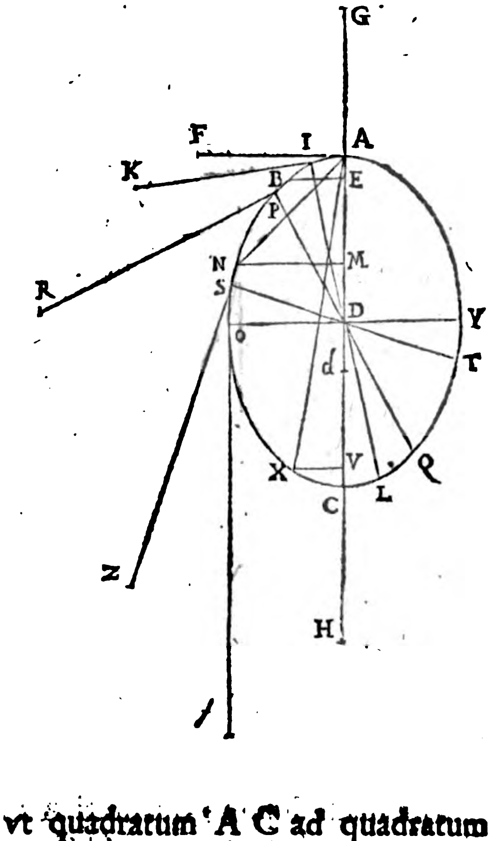


PROPOSITIO XXXXI.

IN ellipſi A B C ſit A C axis maior, & *y* O minor, & ſint P Q, & S T duæ aliæ diametri, ſitque A F erectus ipſius A C, & P R erectus ipſius P Q, & O *f* ipſius *y* O. Dico quod C F minor eſt, quàm Q R, & Q R, quàm T Z, & T Z, quàm *y f*.

Ducantur A N, A X ordinatim applicatæ ad diametros P Q, S T, & duæ ad axim perpendiculares N M, X V, & interceptæ A G, C H. b Quia quadratum A C ad quadratum *y* O, nempe A C ad A F eandem proportionem habet, quàm C G ad G A, ſeu ad C H habebit quadratum C A ad quadratum C F ſummæ ipſius C A, eiuſque erecti eandem proportionem, quàm quadratum C G, nempe C G in A H ad quadratum G H: & quadratum A C ad quadratum *y* O eandem proportionem habet, quàm G ~~C in~~ C H ad quadratum C H: eſtquè quadratum *y* O ad quadratum ſummæ *y f*, vt quadratum C H ad quadratum H G; ergo quadratum A C ad quadratum *y f* eſt, vt C G in C H minorem ad quadratum H G; ſed quadratum A C ad quadratum C F eandem proportionem habet, quàm G C in maiorem A H ad quadratum G H; igitur A C ad C F maiorem proportionem habet, quàm ad *y f*: & propterea C F ſumma A C, & erecti illius minor eſt, quàm *y f*, quæ eſt ſumma *y* O, & erecti illius. Et quoniam C G in M H, quod minus eſt, quàm C G in A H ad quadratum H G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum Q R ſummæ diametri, & erecti ipſius P Q (16. ex 7.) quare quadratum A C ad quadratnm C F maiorem proportionem babebit, quàm ad quadratum Q R, & propterea C F minor erit, quàm Q R. Et quoniam C G in V H ad quadratum H G eſt vt quadratum A C ad quadratum T Z ad quàm ordinatim applicatur A X (16. ex 7.) erit C F minor quàm T Z: cumque C G in H M ad quadratum H G maiorem proportionem habeat, quàm G C in V H ad quadratum idipſum H G habebit quadratum

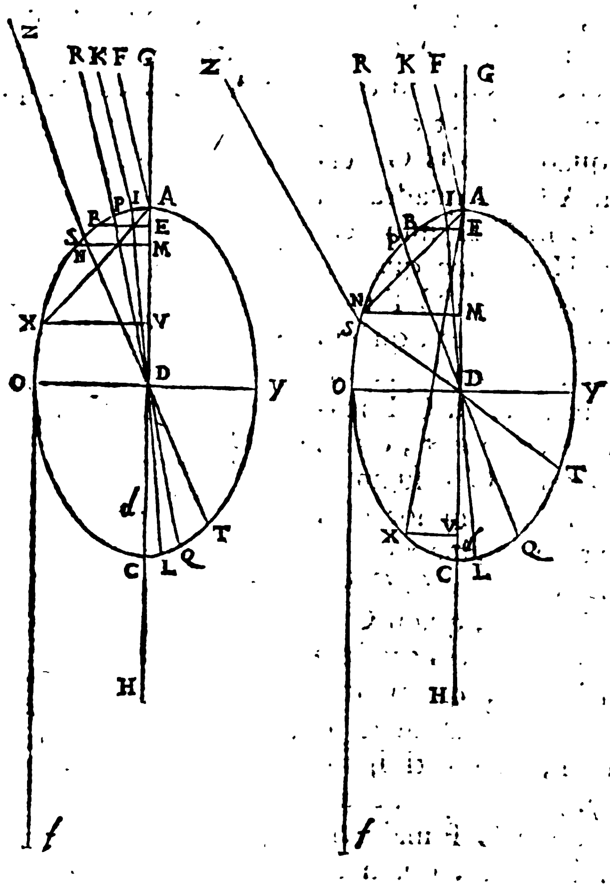
Defin. 1. huius.



tum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem quàm ad quadratū T Z. Et pariter oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum T Z maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum y f; quapropter C F minor eſt quàm Q R, & Q R minor, quàm T Z, & T Z minor, quàm y f. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXXVII.

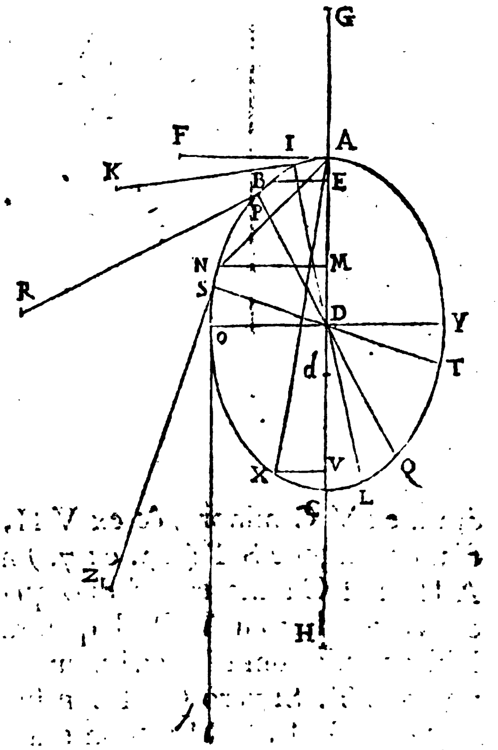
IN eadem figura ſi duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ſummæ C F. Dico, quod diameter figuræ eius minor eſt diametro figuræ Q P R, & diameter figuræ Q P R minor eſt diametro figuræ T S Z.



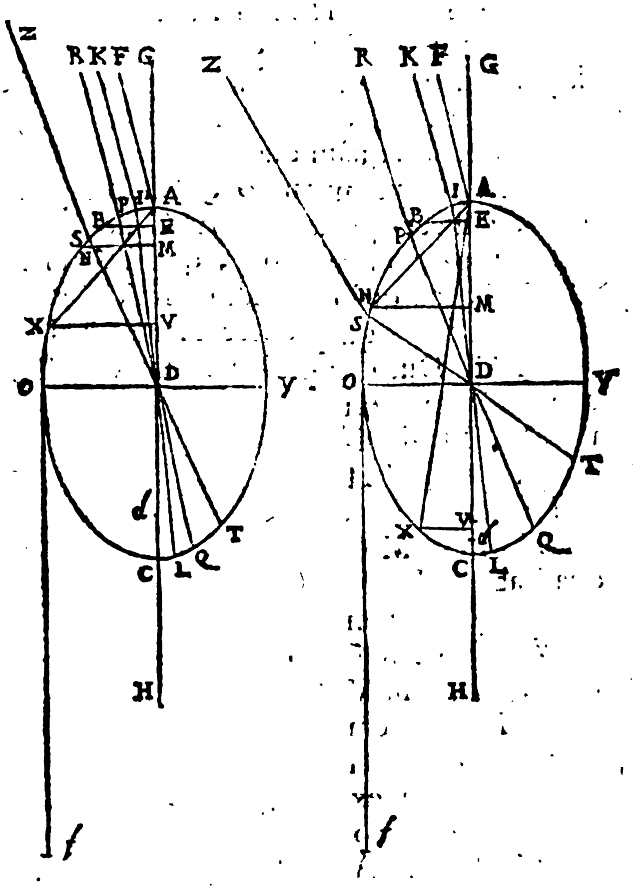
Quoniam duplum quadrati A C non excedit quadratum ſummæ C A F; ergo duplum quadrati C G, nempe G C in A H bis ſumptum non excedit quadratum H G, & propterea C G in H M bis ſumptum minus eſt quadrato H G: tollatur communiter duplum M G in H M remanebit

duplum

duplum H M in C M minus duobus quadratis ex M H, & ex G M: & propterea H M in M C bis ſumptum ad H M in M C bis ſumptum, nempe A M ad M H habebit maiorem proportionem, quàm duplum A M in M C ad duo quadrata ex H M, & ex G M: & componendo A H ad H M, ſeu quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habebit quàm duplum A M in M C cum duobus quadratis ex H M, & ex M G (quæ omnia ſimul æqualia ſunt duobus quadratis C G, & H C) ad duo quadrata M H, & M G; igitur quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habet, quàm duo quadrata C G, & C H ad duo quadrata H M, & G M, & permutando quadratum A H ad duo quadrata C G, & H C, ſcilicet quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius maiorem proportionem habet, quàm A H in H M ad duo quadrata M G, & M H, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (*19. ex 7.*) quapropter diameter figuræ P Q maior eſt diametro figuræ A C. Ducatur poſtea diameter S T, & ad eam ordinatim applicata A X, & ad axim perpendicularem X V. Et ſiquidem G M minor eſt, quàm V H cum A G, & C H ſint æquales, erunt duo quadrata H M, & M G maiora duobus quadratis H V, V G: hæc autem maiora ſunt quàm duplum V H in V *d*: ergo duplū M V in V *d* ad duplum H V in V *d*, nempe V M ad V H maiorem proportionem habet, quàm duplū M V in V *d* ad duo quadrata ex V H, & ex V G: & componendo M H ad H V, ſeu M H in H A ad V H in H A maiorem proportionem habebit, quàm duplum M V in V *d* cum duobus quadratis ex V H, & ex V G, quæ omnia ſimul ſunt vt duo quadrata M H, & M G ad duo quadrata V H, & V G: & permutando M H in H A ad duo quadrata H M, & G M, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (*19. ex 7.*) maiorem proportionem habebit, quàm V H in H A ad duo quadrata V H, & V G, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (*19. ex 7.*) quare diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Poſtea quia *y* O eſt media proportionalis inter A C, & A F erit quadratum A C ad quadratum *y* O, vt A C ad A F, nempe vt C G ad C H, ſeu vt C G in C H ad quadratum C H, & quadratum *y* O ad ſummam quadratorum *y* O, & O *f*, nempe ad quadratum diametri ſuæ figuræ eſt vt quadratum H C ad quadratum C G cum quadrato H C: quare ex



æqualitate quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O eandem proportionem habet, quàm C G, ſeu A H in H C ad duo quadrata ipſius C G, atque ipſius C H: igitur A H in H V maiorem ad duo qua-

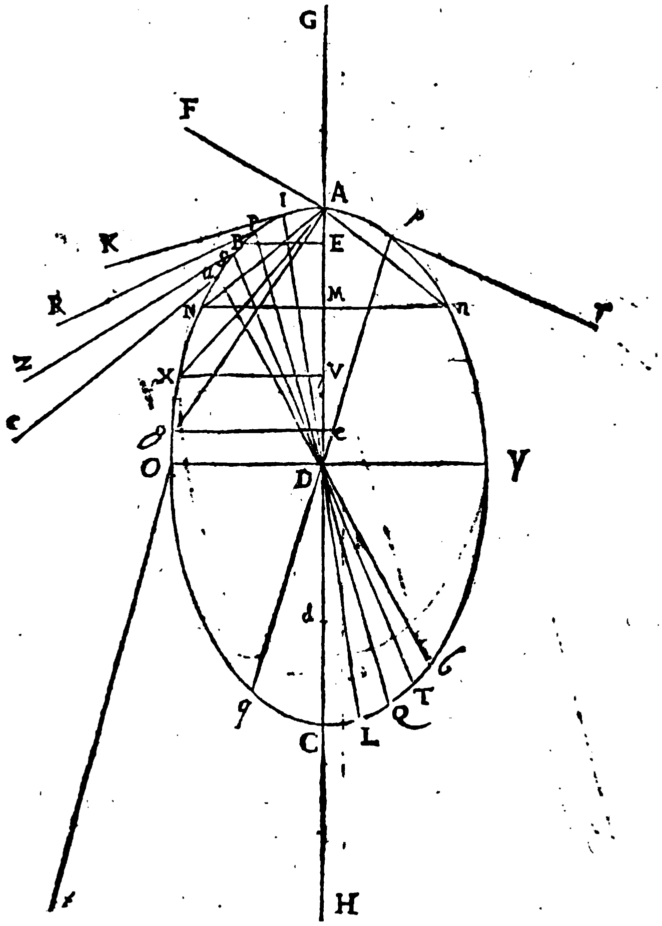


drata ex V G minori, & ex V H, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm A H in H C minorem ad duo quadrata ex G C, & C H maiora, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O (19. ex 7.); igitur quadratum diametri figuræ y O maior eſt quàm quadratum diametri figuræ S T. Si verò G M non fuerit minor quàm V H; vtique duo quadrata ex G M, & M H non erunt maiora duobus quadratis ex V G, & ex V H: at A H in M H ad duo quadrata ex G M, & ex M H, nempe quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q habebit maiorem proportionem, quàm A H ad H V ad duo quadrata ex V H, & ex V G, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T; igitur diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Eadem prorſus oſtendentur, quando punctum V cadit vltra punctum D ad partes A inter puncta D, & M. Et hoc erat propoſitum.

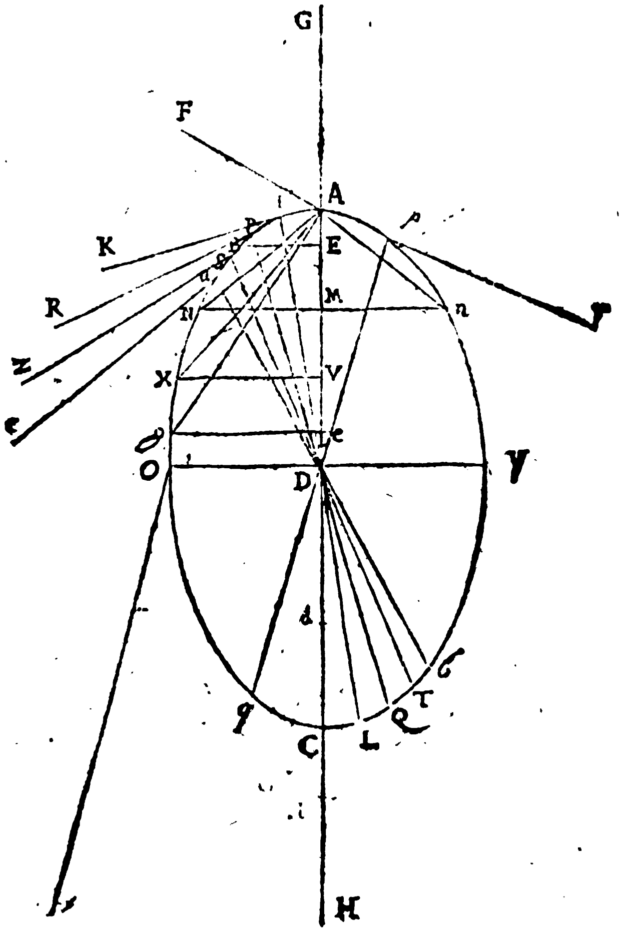
PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

Sit iam duplum quadrati A C maius quadrato C A F, erit duplum quadrati A H maius quadrato G H: ponatur duplum quadrati H M æquale quadrato G H: & ducatur ad axim perpendicularis M N; iungaturque A N, eiuſque diameter P Q extendatur, erit H M ad M G, vt P Q ad P R (7. ex 709.) ergo, & quadratum H M ad quadratum H G erit, vt quadratum P Q ad quadratum P R, & quadratum H M ad duo quadrata ex H M, & ex M G eandem proportionē habebit, quam quadratum P Q ad quadratum diametri ſuæ figuræ: educatur poſtea diameter I L inter A, & B, & erectum illius ſit I K ad quam ordinatim ducta ſit A B, & ad axim perpendicularis ſit B E erit quadratum M H, nec non G H in H D æquale dimidio quadrati H G; igitur G H ad M



H erit vt M H ad H D : & comparando homologorum differentias erit M G ad M D, vt G H ad H M : & propterea duplum G H in M D, ſeu quadruplum H D in D M eſt æquale duplo G M in M H : & propterea duplum G M in M H maius erit quàm duplum G E in M H ; ponatur communiter duplum E M in H M cum quadruplo quadrati M D, & fiat D *d* æqualis D M, fiet duplum E *d* in M H maius quadrato H M cum

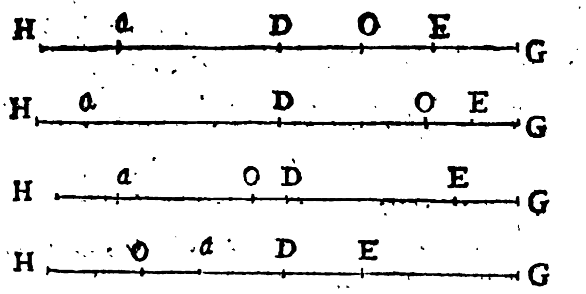


quadrato M G ; igitur *d* E in E M bis ſumptum ad duplum E *d* in M H, nempe E M ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M ad duo quadrata ex M G, & ex M H ; & componendo E H ad M H, ſeu E H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M vna cum quadratis ex M H, & ex M G, quæ æqualia ſunt duobus quadratis H E, & G E ad duo quadrata ex M G, & ex H M. Et ſic pariter oſtendetur, quod quadratum H A ad H E in H A minorem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex H A, & ex A G ad duo quadrata ex H E, & ex E G. Atque demonſtrabitur quemadmodum antea dictum eſt, quod quadratum diametri figutri figuræ P Q minus eſt quadrato diametri figuræ I L, & quadratum diametri figuræ I L minus eſt quadrato diametri figuræ A C. Ponãtur poſtea diametri S T, & y Q vltra diametrum P Q, ſitque A X ordinatim applicata ad diametrum S T, & V X ad axim perpendicularis ſit, oſtendetur (quemadmodum in præcedentibus dictum eſt) quod diameter figuræ P Q minor ſit diametro figuræ S T, & diameter figuræ S T minor ſit diametro figuræ y O, vbicunque ſecet ad axim perpendicularis X V ipſam A C. Et hoc erat oſtendendum.

In Sectionem IX. Propoſit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

LEMMA. XIII.

Si recta linea G H ſecetur biſariam in D, & non biſariam in O, E, atque fiat G a *æqualis H E; ſi quidem proportio dupli O H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H E, erit duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, G O in H O æquale quadratis ex G O, & ex O H: ſi verò proportio illa maior fuerit erit rectangulum maius quadratis; & ſi eadem proportio fuerit minor, idipſum rectangulum quadratis minus erit.*



Et primo quia duplum O H ad H G eſt vt G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E æquale erit quadrato ex G H; auferatur communiter duplum rectanguli H O G, quia H O eſt communis rectangulorum altitudo, remanet duplũ rectanguli ex differentia ipſarum E H, G O, ſeu ex differentia ipſarum G a, *& G O in H O, ſeu remanet duplum rectanguli* a *O H æquale quadrato H G minus duplo rectanguli G O H: huic verò differentia æqualia ſunt duo quadrata ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli* a *O H æquale eſt ſummæ quadratorum ex G O, & ex O H.*

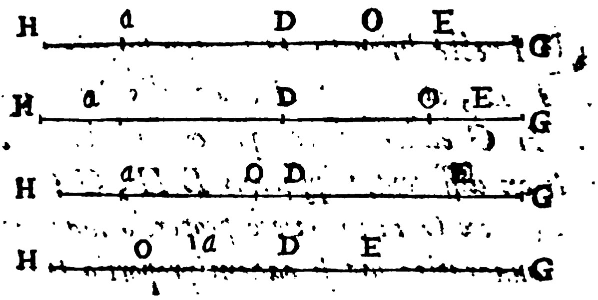
Secundò, quia duplum O H ad H G maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E maius erit quadrato G H, & ablato communiter duplo rectanguli G O H erit duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G O in H O maius, quàm ſumma quadratorum ex G O, & ex H O.

Tertio

Tertio ſi duplum O H ad H G minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, eodem progreſſu oſtendetur, quod duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G O in H O minus eſt quadratis ex G O, & ex H O, quod erat propoſitum.

LEMMA XIV.

IIſdem poſitis ſit G E minimum ſegmentorum, dico quod duo quadrata ex E H, & ex G E, ſcilicet ex maximo, & minimo ſegmentorum æqualia ſunt duobus quadratis ex O H, & ex G O intermedijs ſegmentis vna cum duplo rectanguli ſub differentijs minimæ G E à duabus intermedijs G O, & H O.

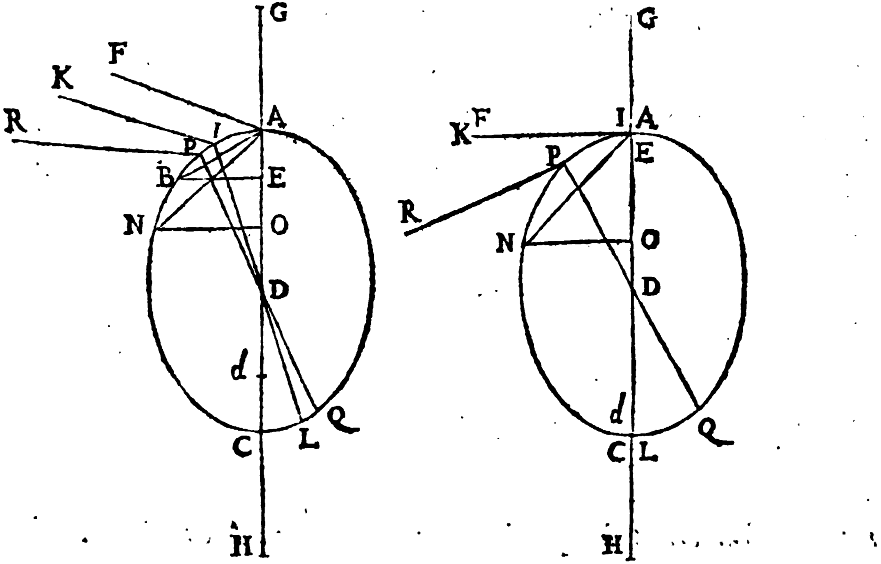


Fiat H a æqualis G E, ergo O a erit differentia ipſarum E H, & G E, ſicuti O E eſt differentia ipſarum G O, & G E. Et quia duo quadrata ex maximo, & ex minimo ſegmentorum, ſcilicet ex H E, & ex E G æqualia ſunt duplo quadrati ex G D ſemiſſe totius, cũ duplo quadrati ex E D intermedia ſectione; eſtque duplum quadrati ex E D ſemiſſe ipſius E a æquale duplo rectanguli E O a ex inæqualibus ſegmentis vna cum duplo quadrati ex intermedia ſectione O D, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia ſunt his omnibus ſpatijs, ſcilicet duplo quadrati ex G D, & duplo quadrati ex D O cum duplo rectanguli E O a, ſed duo quadrata ex inæqualibus ſegmentis G O, & ex O H æqualia ſunt duplo quadrati ex ſemiſſe totius G D cum duplo quadrati ex intermedia ſectione O D, igitur exceſſus ſummæ quadratorum ex G E, & ex E H, ſupra ſummam quadratorum ex G O, & O H æqualis eſt duplo rectanguli ex E O a, quod erat oſtendendum.

LEMMA XV.

IN ellypſi, cuius axis A C, erectus A F, diameter I L, eiuſq; erectus I K, & latus C E, & ſimiliter altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, G O, in H O à duobus quadratis ex G O, & ex O H, atque

H; atque aggregatum quadratorum laretum, I L, & I K figura diametri I L ab aggregato quadratorum laterum P Q, & P R figura alterius diametri, vna deficiunt, aut vna æqualia ſunt, vel vna excedunt.



Fiat O d *differentia ipſarum E H, & G O, & primo quia duplum rectanguli ex* d *O H æquale eſt quadratis ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, ſeu O E ad H O eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli* d *O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & componendo, erit E H ad H O, ſeu rectangulum E H A ad rectangulum O H A vt duo quadrata ex G E, & ex E H ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & permutando rectangulum E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, ſeu quadratum ex A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex A C, & ex A F eandem proportionem habebit, quàm rectangulum O H A ad quadrata ex G O, & ex H O, vel quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R, quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K, ſeu ex A C, & A F æqualia erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.*

Lem. 14. huius.

17. huius.

Ibidem.

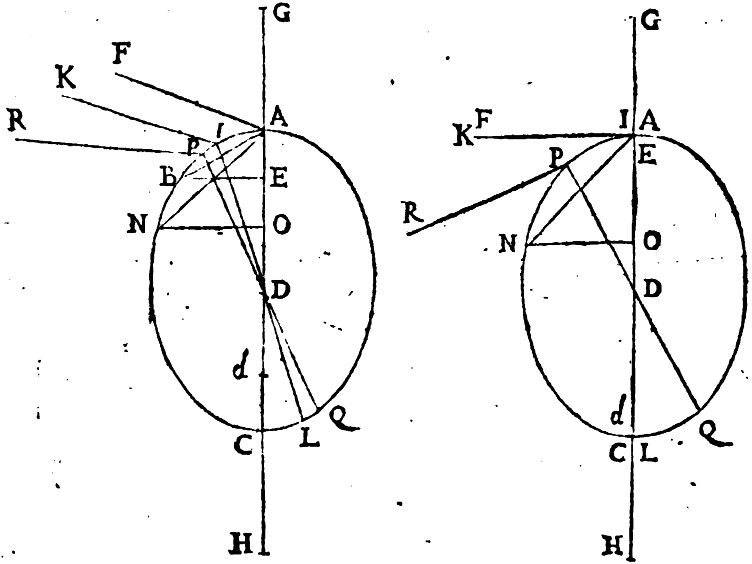
Secundo ſit duplum rectanguli d *O H minus quadratis ex G O, & ex H O, duplum rectanguli* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, ſeu O E ad H O habebit maiorem proportionem, quàm duplum rectanguli* d *O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & rurſus componendo ex lem. 2. lib. 5. & ex lem. 14. & permutando, atque ex 17. propoſit. huius habebit idem quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K maiorem proportionem, quàm ad duo quadrata ex P Q, & ex P R: quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.*

Tertio ſit rectangulum d *O H maius duobus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli ex* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, ſeu O E ad H O ha-*

bebit

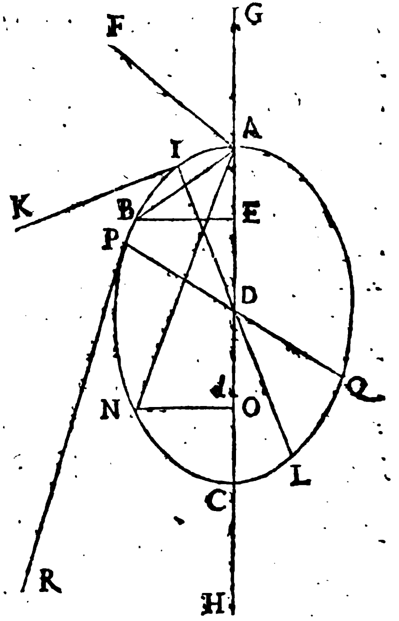
bebit minorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex O H, & componendo ex lem. 14. permutando, & ex 17. huius, tandem erunt duo quadrata ex I L, & ex I K maiora duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

[illegible]



SI in ellypsi termini E, O laterum C E, C O, diametrorum I L, & P Q cadant hinc inde à centro D, sitque D O maior quàm D E, dico quod quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt quadratis ex I L, & ex I K.

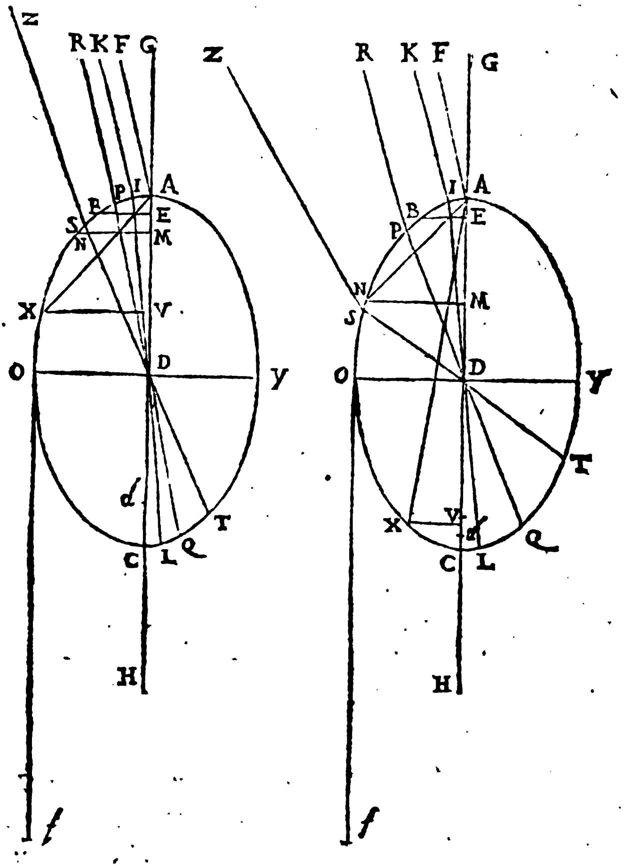
Quia O H minor est, quàm E H, sed duo quadrata ex G O maximo, & O H minimo segmentorum eiusdem rectæ lineæ G H maiora sunt duobus quadratis ex G E, & ex E H intermedijs segmentis; ergo O H ad E H, minor ad maiorem seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A minorem proportionem habet, quàm maior summa quadratorum ex G O, & ex O H ad minorem summam quadratorum ex G E, & ex E H, & permutando rectangulum O H A ad duo quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R 17. huius. *minorem*



minorem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad duo quadrata ex G E, & ex E H, ſeu quàm quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K: igitur duo quadrata ex P Q, & ex P R maiora ſunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, quod erat oſtendendum. 17. huius.

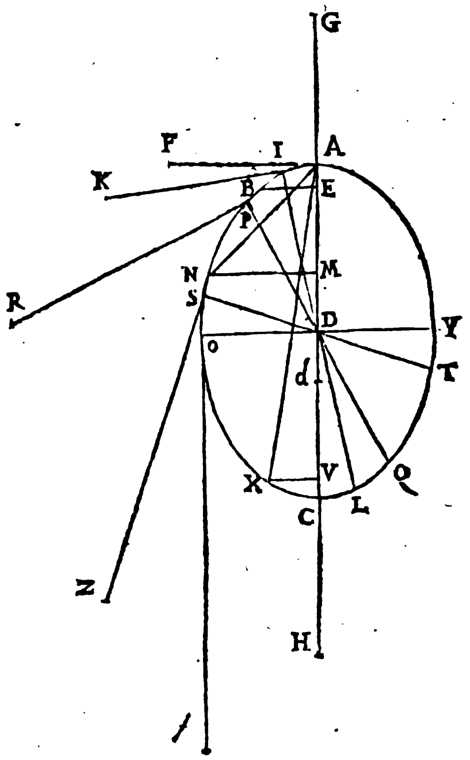
Notæ in Propoſit. XXXXI.

I*N ellypſi, cuius axis maior A C, quia rectangulum A H E ad quadratum H G eſt, vt quadratum A C ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F, atq; quadratum ex G H ad rectangulum A H M eandem proportio-* Prop. 16. huius.



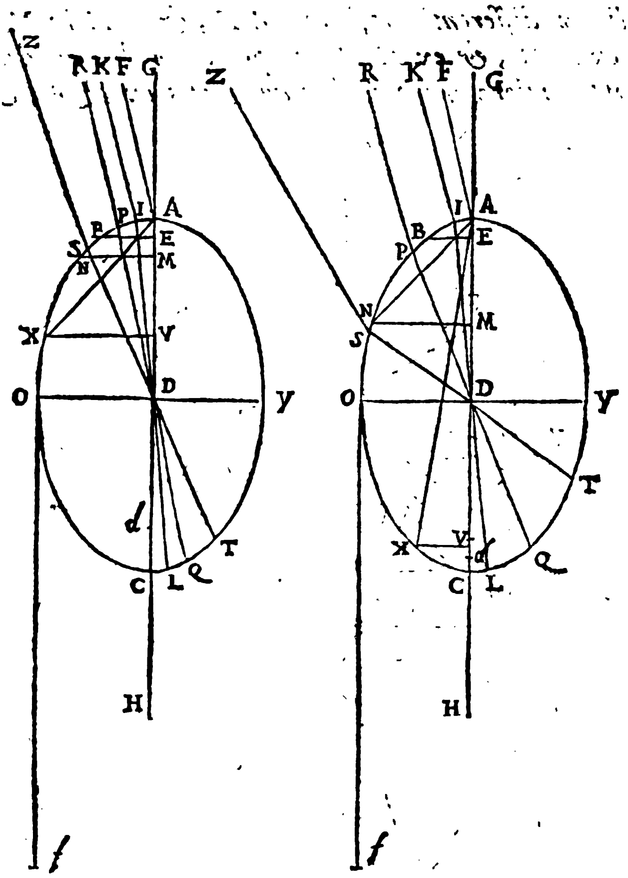
nem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex æquali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: eſtque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratũ ex ſumma Q P R maius eſt quadrato ex ſumma L I K, & propterea linearũ ſũma Q P R maior erit, quàm ſũma L I K, vel quàm ſum-

ma C A F. Tandem quia rectangulum A H M ad quadratum ex ſumma H ex 16. huius. *M G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum ex Q* Ibidem. *P R, ſed quadratum ex H C G ad rectangulum ex A H C eandem proportionē habet, quàm quadratum ex ſūma Y O f ad quadratum A C, (eo quod H C eſt intercepta comparata diametri Y O, cum Y O ſecet biſariam ad eam ordinatim applicatam A C, atque ab eodem puncto C perpendicularis ad axim ducta cadat ſuper idem punctum C), igitur ex æquali perturbata rectangulum A H M maius ad minus rectangulum ex A H C eandem proportionem habet, quàm quadratum ex ſumma Y O f ad quadratum ex ſumma Q P R, & propterea ſumma laterum Y O f maior erit, quàm ſumma Q P R.*



Notæ in Propoſit. XXXXVII.

Quia duplum quadrati A C non eſt maius quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H æquale, aut minus erit quadrato ex ſumma G H, eſtque duplum rectanguli ex E H A, vel ex E H M minus duplo quadrati A H, igitur minus quoque erit quadrato ex G H, igitur duplum M H ad G H minorem proportionem habet, quàm G H ad E H, ergo Lem. 13. huius. *duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H G M in M H minus eſt duobus* Lem. 15. huius. *quadratis ex G M, & ex H M: quare duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R, & ſic duo quadrata ex Q P, & ex P R minora ſunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z.*



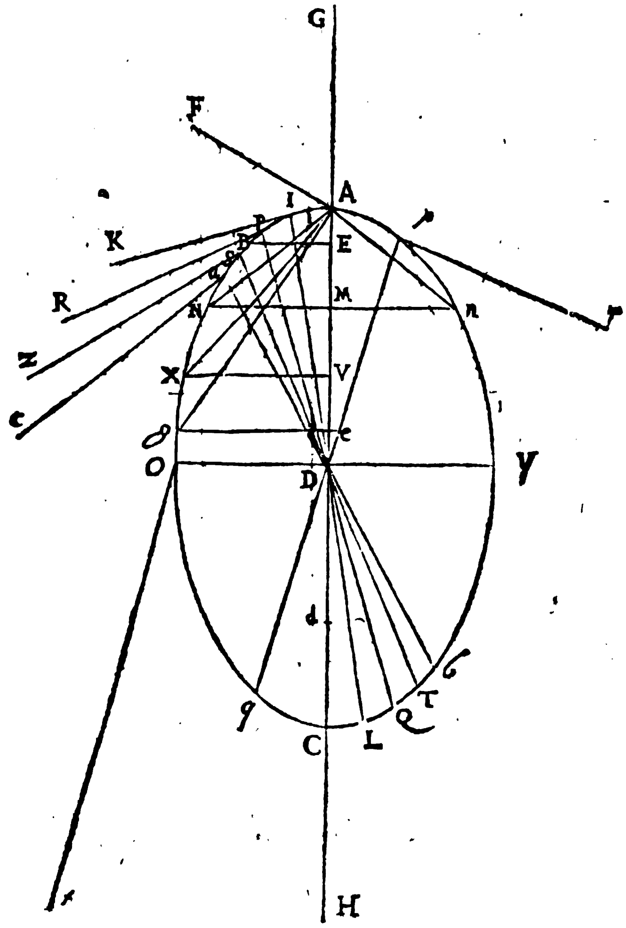
Notæ in Propoſit. XXXXVIII.

QVia ex hypotheſi duplum quadrati A C maius eſt quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H maius erit quadrato ex H G. Fiat igitur quadratum ex M H æquale ſemiquadrato G H, & lateris C M fiant duæ diametri Q P, & q p, quarum erecta ſint P R, & p r: Dico duplum quadrati Q P æquale eſſe quadrato ex ſumma laterum Q P R: Quia Q P ad P R eſt vt H M ad M G, & antecedentes ad terminorum ſummas, & eorum quadrata proportionalia erunt, ſcilicet quadratum Q P ad quadratum ex Q P R eandem proportionem habebit, quàm quadratum ex M H ad quadratum ex H G: erat autem quadratum M H ſubduplum quadrati ex H G, igitur quadratum ex P Q ſubduplum eſt quadrati ex Q P R. Eadem ratione quadratum ex q p ſubduplum erit quadrati ex q p r, & diametri Q P, & q p æquales erunt, cum æque recedant ab axi, & habeant commune latus C M.

Prop. 7. huius.

Poſtea quia punctum E cadit inter M, & A, erit duplum rectanguli M H E maius duplo quadrati ex M H, ſeu maius quadrato G H, & propterea duplum M H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H E, ergo

Lem. 13. *duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G M in M H maius erit*
Lem. 15. *duobus quadratis ex G M, & ex M H, & propterea duo quadrata ex I L, &*
huius. *ex I K ſimul ſumpta maiora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R.*



Similiter duplum rectanguli E H A maius erit quadrato ex G H, & propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H
Lem. 13. *A, & ideo duplum rectanguli ex differentia ipſarum A H, & G E in E H*
huius. *maius erit duobus quadratis ex G E, & ex E H: igitur duo quadrata ex C A,*
Lem. 15. huius. *& A F maiora erunt duobus quadratis ex I L, & ex I K.*

Rurſus quia V H minor eſt, quàm M H erit duplum rectanguli V H M minus duplo quadrati M H, ſeu minus quadrato G H, igitur duplum V H ad
Lem. 13. *H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H M, & propterea duplum*
huius. *rectanguli ex differentia ipſarum M H, & G V in V H minus erit duobus*
Lem. 15. *quadratis ex G V, & ex V H, & propterea duo quadrata ex Q P, & ex P*
huius. *R minora erunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z: ſi verò D V maior fue-*
Lem 16. huius. *rit quàm D M, erunt duo quadrata ex Q P, & ex P R minora duobus quadratis*

dratis ex T S, & S Z: igitur ſumma duorum quadratorum ex Q P, & ex P R minor eſt ſumma quadratorum duorum laterum figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ellipſis.

PROP. 7. Addit

In ellipſi reperire diametrum, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia ſint quadratis laterum figuræ axis maioris: oportet autem vt quadratum axis maioris A C maius ſit ſemiquadrato ex ſumma laterum C A F figuræ eius.

Quia ex hypotheſi quadratum axis maioris A C maius eſt ſemiquadrato ex ſumma C A F, ergo, vt in nota prop. 48. dictum eſt, duplum quadrati ex A H maius eſt quadrato ex H G; fiat duplum rectanguli e H A æquale quadrato ex G H, & lateris C e fiat diameter a b *cuius erectus* a c. *Dico hanc eſſe diametrum quæſitam.*

Quoniam duplum rectanguli e H A æquale eſt quadrato ex G H, ergo duplum e H ad H G eſt vt G H ad H A, eritq; duplum rectanguli ex differentia ipſarum A H, & G e in e H æquale quadratis ex G e, & ex e H, & ſumma quadratorum ex b a, *& ex* a c *æqualis erit quadratorum ſummæ ex A C, & ex A F, quod erat oſtendendum.* Lem. 13. Lem. 15.

PROP. 8. Addit.

In eadem ellypſi diametrum reperire, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia ſint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum ſubduplum ſit quadrati ex ſumma laterum Q P R.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus ſit S Z: erit igitur duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G V in V H æquale quadratis ex G V, & ex V H, ideoque ſumma quadratorum ex L I, & ex I K æqualis erit quadratorum ſummæ ex T S, & S Z, quod propoſitum fuerat. Lem. 13. huius. Lem. 15. huius.

Colligitur ſimiliter ex 7. propoſit. additarum, quod in vna ellypſi tres diametri reperiri poſſunt, quarum ſummæ quadratorum laterum æquales ſint inter ſe: & ex 8. propoſit. additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiuſdem ellypſis laterum ſummæ quadratorum æquales poſſunt eſſe inter ſe, ſed oportet vt quadratum axis maioris datæ ellypſis maius ſit, quàm dimidium quadrati ex ſumma laterum figuræ axis C A F.

a Duo latera figuræ axis tranſuerſi minora ſunt duobus lateribus figuræ cæterarum diametrorum, & duo latera figuræ diametri axi proximioris minora ſunt duobus lateribus figuræ remotioris, &c. *Addidi ea, quæ deficere videbantur in hoc textu.*

b Iiſdem figuris manentibus cum ſuis ſignis oſtendatur quod duplum quadrati A C, ſi non exceſſerit F, quod diameter eſt illius figuræ minor, quàm diameter figuræ I L, & diameter figuræ I L, quàm diameter figuræ P Q, &c. *Legendum puto vt in textu apparet.*

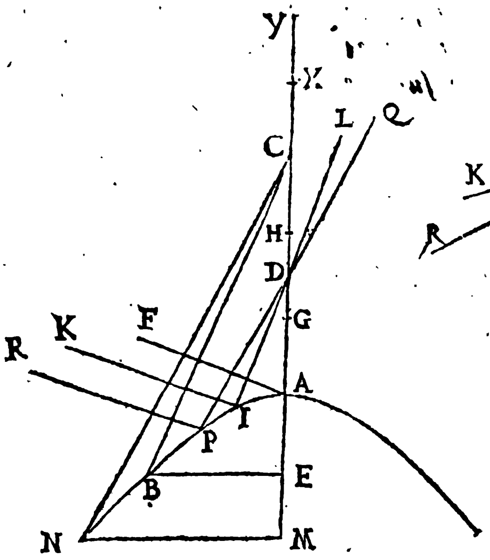
c Et ſic oſtendetur quod ſi punctum V inciderit ſuper D A, & oſtendetur D, & M, &c. *Legendum puto, vt in textu videre eſt.*

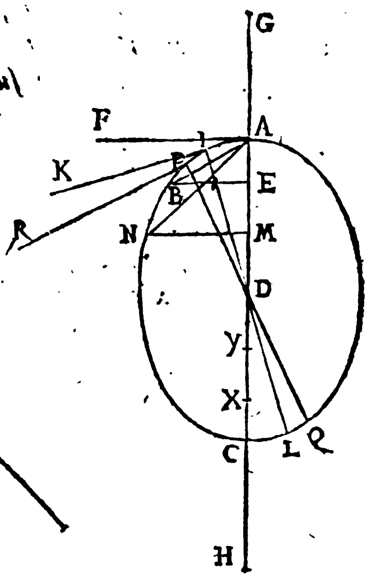
SECTIO DECIMA

Continens Propoſit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

XXXXXI. IN hyperbola, & ellipſi, ſi axis tranſuerſus minor fuerit ſuo erecto, differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis eius maior eſt, quàm differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri ei homologæ. Et differentia quadratorum laterum figure homologæ proximioris axi ſemper maior eſt in hyperbola, quàm differentia quadratorum laterum figuræ remotioris: at in ellypſi quouſque diameter tranſuerſa æqualis non fiat ſuo erecto. a

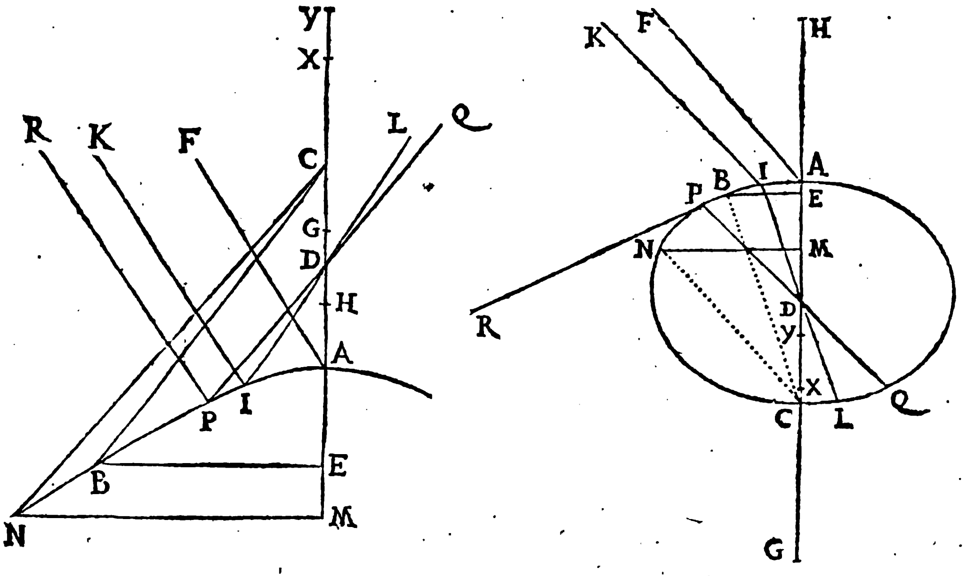
XXXXX. Et in hyperbola differentia quadrati axis inclinati ab eius figura minor erit ſemidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ ſui homologi.





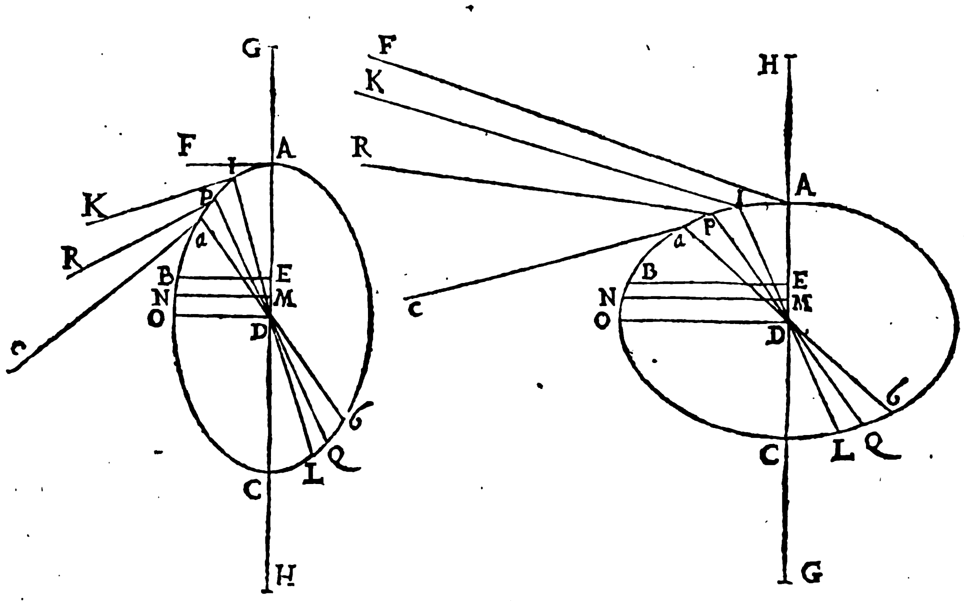
XXXXIX. Si verò in hyperbole axis inclinatus maior fuerit ſuo erecto; vtique differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis minor erit differentia quadratorum laterum figuræ alterius homologæ diametri, atque differentia quadrati axis ab eius figura maior erit ſemidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ ſuæ homologæ, & minor erit integra differentia eorundem quadratorum.

In ſectione A B N ſit axis A C maior in figura prima, & in ſecunda
minor, ſintquè I L, P Q duæ aliæ diametri, quæ in ellipſi cadant inter
b axim, & vnā æqualium; ducanturque duæ ordinationes A B, A N ad
diametros I L, P Q, & duas ad axim perpendiculares B E, N M; ſitque A F erectus ipſius A C, & A G, C H duæ interceptæ: ponaturque
c in ellipſi X D æqualis E D, habebit E H ad H A minorem proportionem in prima hyperbola, & maiorem in reliquis, quàm E D ad D A, ſeu quàm E X, quæ eſt ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi ipſarum E G, & E H ad A C differentiam ipſarum H A, A G; & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam quadratorum A C, & A F eandem proportionem habet, quàm quadratum A H ad differentiam duorum quadratorum A H, & G A: atque E H ad H A minorem proportionem habet in duabus primis figuris, & maiorem proportionem in duabus ſecundis, quàm E G ad G A, comparando homologorum ſummas, erit E H ad H A, vt E H cum E G ad H A cum G A, nempe aggregatum E H, E G in earundem differentiam ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod eſt æquale differentiæ duorum quadratorum E H, E G; nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet (in prima ellipſi), & maiorem (in ſecunda) quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod eſt æquale differentiæ quadratorum H A, A G, nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum



dratorum

dratorum duorum laterum figuræ eius ; igitur quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet , in prima ellipſi , & maiorem in reliquis , quam ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ A C; ergo differentia quadratorum duorum laterum figuræ A C minor eſt in prima ellipſi , & maior in cæteris, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L. Præterea M H ad H E minorem proportionem , aut maiorem habet , quàm M G ad G E : & ponamus in ellipſi Y D æqualem D M , oſtendeturquè



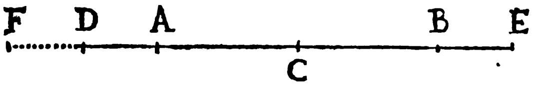
quod M H in H A minus ſit in prima ellipſi, & maior in cæteris , quàm duarum M G , M H ſumma in earum differentiam M Y : & oſtendetur quemadmodum dictum eſt , quod differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L maior eſt , quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ P Q.

Deinde in hyperbola ponamus I K erectum ipſius I L , erit differentia quadratorum duarum I L , I K (quæ eſt æqualis K L in ſummam L I , I K) maior illa , quàm I L in L K , quod eſt æquale differentiæ quadrari I L , & eius figuræ , nempe differentiæ quadrati A C , & eius figuræ (29. ex 7.) & non eſt maior in prima, quàm duplum, & in ſecunda maior duplo , & hoc eſt propoſitum.

In Sectionem X. Propoſit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

LEMMA XVI.

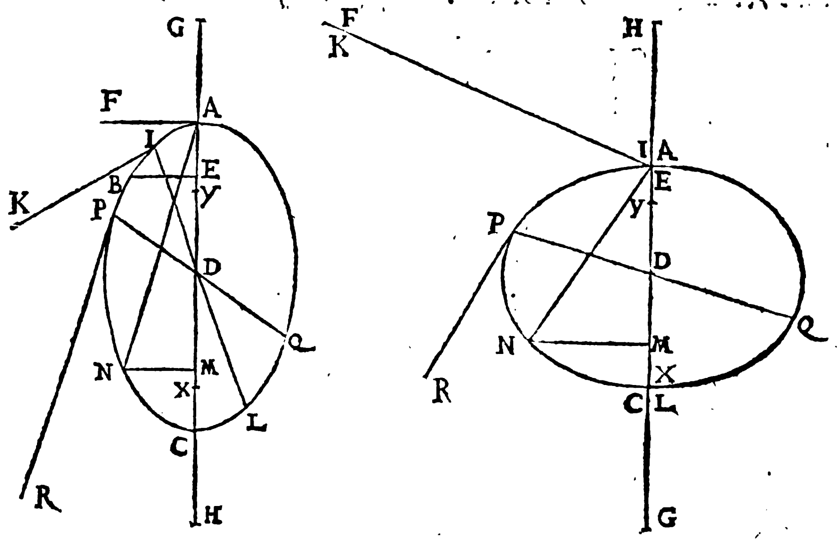
SI rectæ lineæ A B biſariam ſectæ in C vtrinque addantur æquales portiones A D, & B E, dico rectangulum ſub tota D E, & ſub intermedia A B æquale eſſe differentiæ quadratorum ex A E, & ex A D.



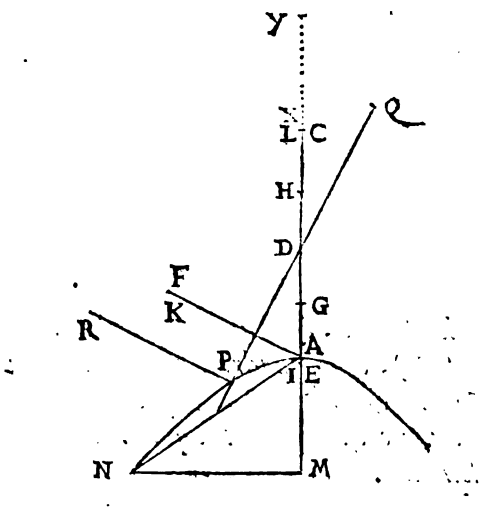
Apponatur F D æqualis D A, vel B E: & quia F D æqualis eſt B E addita communi B D, erit F B æqualis D E, & ideo rectangulum F B A æquale erit rectangulo ſub D E, & ſub A B, ſed quadratum B D æquale eſt quadrato D A cum rectangulo F B A, (eo quod F A ſecta eſt biſariam in D, & ei in directum additur A B), ergo quadratum D B æquale eſt quadrato D A vna cum rectangulo ſub D E, & ſub A B, & propterea rectangulum ſub D E, & ſub A B contentum æquale eſt differentiæ quadrati B D, ſeu A E à quadrato D A, quod erat oſtendendum.

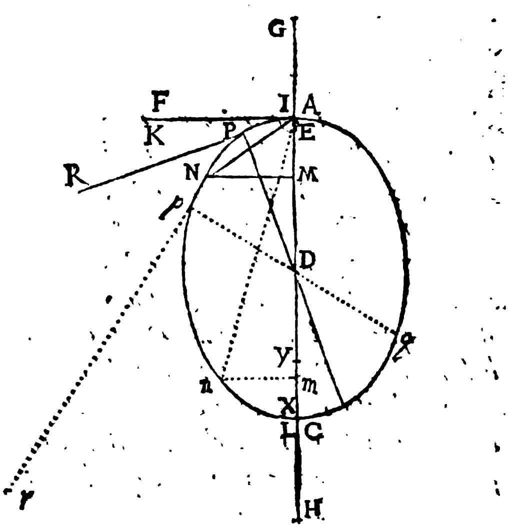
LEMMA XVII.

IN hyperbola, & ellypſi, cuius centrum D, axis A C, erectus A F, præſectæ A H, G C, & in ea diameter I L, cuius erectus

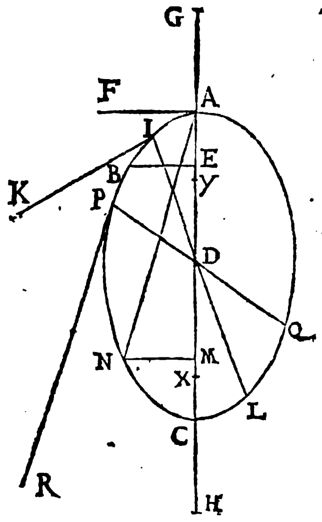


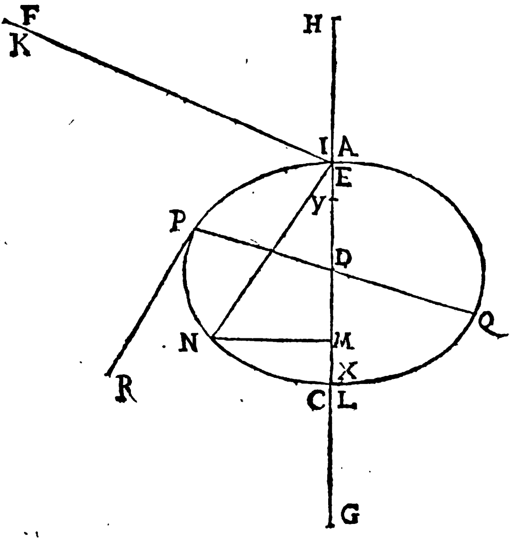
I K , & latus C E , pariterque diameter Q P , cuius erectus P R , eiuſque latus C M , ſi fuerit proportio ipſius H M ad M D eadem proportioni H E ad D E , vel eadem proportioni H A ad D A , erit differentia quadratorum ex lateribus Q P , & ex P R figuræ diametri Q P æqualis differentiæ quadratorum ex lateribus figuræ diametri I L , vel A C : ſi verò proportio illa minor fuerit erit prior differentia quadratorum maior reliqua , & ſi illa proportio maior fuerit , erit prima quadratorum differentia minor reliqua .





Fiat D X æqualis D E , & D Y æqualis D M , & primo quia H M ad M D eſt vt H E ad D E , permutando M H ad H E erit vt D M ad D E , ſeu vt duplũ M Y ad duplum E X , & ſumptis altitudinibus H A , & G H erit rectangulum M H A ad rectangulum E H A vt rectangulum ſub Y M , & G H ad rectan-





gulum

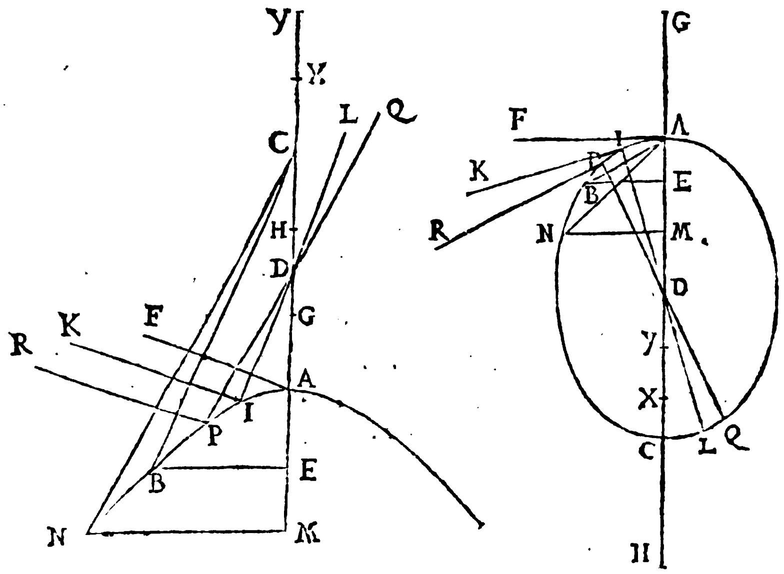
gulum ſub E X, & G H, & permutando rectangulum M H A ad rectangulum ſub Y M, & G H, ſeu ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad rectangulum ſub E X, & ſub G H, ſeu ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G: eſt verò quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R, vt rectangulum M H A ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G, pariterque idem quadratum A C ad differentiã quadratorum ex I L, & ex I K eſt, vt rectangulum E H A ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G, igitur idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R eandem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, & propterea differentia quadratorum ex Q P, & ex P R æqualis eſt quadratorum differentiæ ex I L, & ex I K, ſiue æqualis eſt quadratorum differentiæ ex A C, & ex A F.

Lem. 16. huius.

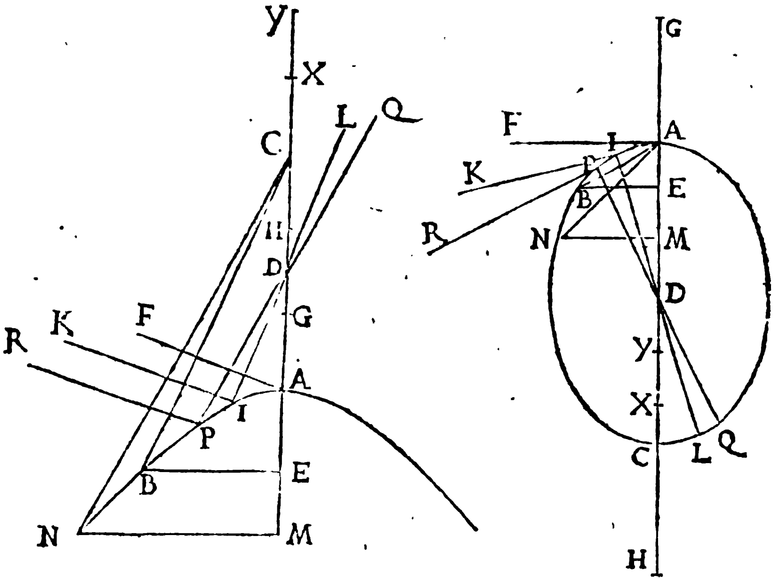
Ibidem.

Prop. 20. huius.

Ibidem.



Secundo H M ad M D minorem proportionem habeat, quàm H E ad D E, vt prius permutando habebit H M ad H E minorem proportionem, quàm D M ad D E, ſeu quàm duplum M Y ad duplum E X, & ſumptis communibus altitudinibus H A ad G H, & permutando ex lem. 16. & propoſit. 20. huius, idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R minorem proportionem habebit, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quapropter differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu maior, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.



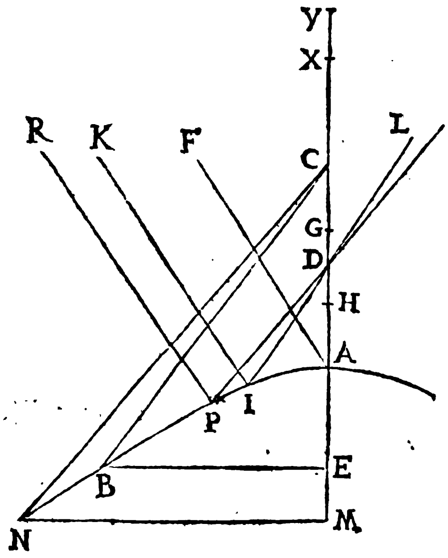
nem, quàm ad minorem D E, & componendo H M ad M D minorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, & ideo Lem. 17. huius. *differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu maior quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.*

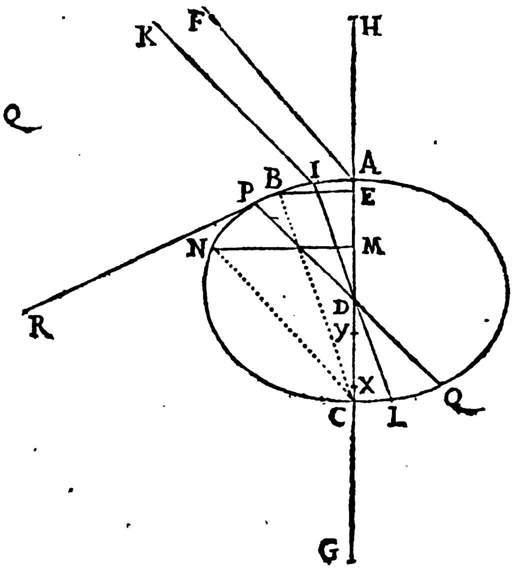
Rurſus quia rectangulum C A F maius eſt quadrato A F, (propterea quod rectangulum illud medium proportionale eſt inter maius quadratum ex A C, & quadratum minus ex A F), ergo differentia quadrati A C à rectangulo C A F, ſcilicet differentia ſpatiorum maximi, & intermedij, minor erit, quàm differentia inter quadratum maximum A C, & minimum A F, ſed differentia quadratorum ex A C, & ex A F minor oſtenſa eſt, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ergo multo magis differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Tandem quia quadratum A C ad ſemidifferentiam quadratorum ex I L, & Prop. 20. huius. *ex I K eandem proportionem habet, quàm rectangulum E H A ad ſemifferentiam quadratorum ex E H, & ex E G, vel ad ſemiſſem rectanguli ex E X in* Lem. 16. huius. *G H, vel potius ad rectangulum ſub E D, & ſub G H; ſed quadrati A C à rectangulo C A F differentia ad quadratum ipſum A C, ſeu differentia A C, & A F ad A C eandem proportionem habet, quàm H G ad H A, ſeu quàm* ex Def. 2. huius. *rectangulum E H G ad rectangulum E H A, igitur ex æquali differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad ſemidifferentiam quadratorum ex I L, & ex I K eandem proportionem habebit, quàm rectangulũ E H G ad rectangulum ſub E D, & G H, eſtq; primũ rectangulũ reliquo rectangulo æquè alto maius, cum eius baſis E H maior ſit, quàm E D, igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F maior erit, quàm ſemidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.*

Notæ in Propoſit. XXXXX.

SI hyperbole axis A C minor fuerit eius erecto A F, quia H M maior eſt, quàm H E, & punctum H cadit inter D, & A, ergo H M ad H D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad eandem H D, & comparando antecedentes ad terminorum ſummas H M ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentta quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu minor quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F. Lem. 17. huius.





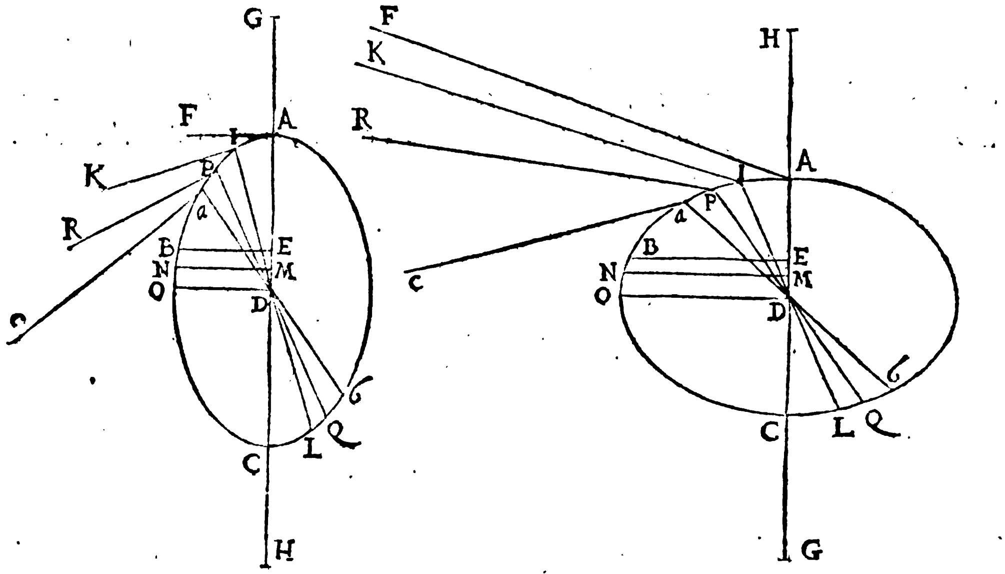
Poſtea, quia vt in precedenti nota dictũ eſt, differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad ſemidifferentiã quadratorũ ex I L, & ex I K eandem proportionẽ habet, quàm rectangulum E H G ad rectangulum ſub E D, & ſub G H, eſtque illud rectangulum minus rectangulo iſto æquè alto, (cum illius baſis E H minor ſit, quàm E D), igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor eſt, quàm ſemidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Notæ in Propoſit. XXXXXI.

IN qualibet ellypſi ſit diameter a b *æqualis eius erecto* a c, *eius latus erit C D, & diametri I L, & P Q cadant inter A C, &* a b, *earum laterum* ex Lem. 18. huius.

C E, &

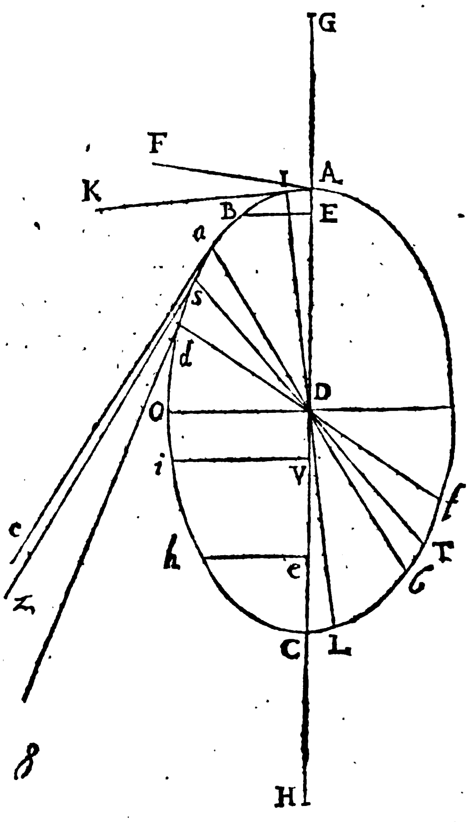
C E, & C M, termini E, & M cadent inter D, & A, & M cadat inter E & D, propterea M H ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E



Lem. 17. huius. *ad E D, igitur differentia quadratorum laterum figuræ P Q minor erit differentia quadratorum laterum figuræ I L, vel figuræ A C.*

PROP. 9. Addit. *In ellypſi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum figuræ eius æqualis ſit differentiæ quadratorum laterum figuræ axis maioris A C.*

Secetur H D in e, *vt H* e *ad* e *D eandem proportionem habeat, quàm H A ad A D, & ex puncto* e *educatur ad axim perpendicularis* e h *occurrens ſectioni in* h; *& coniungatur* a h, *quàm bifariam ſecet diameter* f d, *cuius erectus* d g: *dico diametrum* f d *eſſe quæſitam. Quia H* e *ad* e *D eandem proportionem habet, quàm H A ad A D, ergo differentia quadratorum ex* f d, *& ex* d g *æqualis eſt differentiæ quadratorum ex A C, & ex A F, quod erat propoſitum.* Lem. 17. huius.



PROP. 10. Addit. *In ellypſi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum eius figuræ æqualis ſit differentiæ quadratorum laterum figuræ*

data

datæ diametri I L : oportet autem vt data diameter cadat inter axim maiorem A C, & diametrum a b *æqualem ſuo erecto* a c.

Sit C E latus diametri I L, & diuidatur H D in V, vt habeat H V ad V D eandem proportionem, quàm H E habet ad E D, & ducta vt prius ad axim perpendiculari V X occurrens ſectioni in X, & coniuncta A X, quam biſariam ſecet diameter T S, cuius erectus S Z; dico hanc eſſe quæſitam. Quoniam H V ad V D eandem proportionem habet, quàm H E ad E D, igitur differentia quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis eſt differentiæ quadratorum ex I L, & ex I K, quod propoſitum fuerat.

Lem. 17. huius.

Deducitur ex 9. propoſitione additarum, atque ex propoſit. 51. huius, quod in ellypſi exceſſus quadrati cuiuſlibet diametri tranſuerſæ ſupra quadratum erecti eius ſucceſſiue decreſcit ab axi maiori A C vſque ad diametrum a b *æqualem ſuo erecto, atque ab hac diametro defectus quadrati cuiuſlibet tranſuerſæ diametri à quadrato erecti eius ſucceſſiue augetur, quouſque perueniatur ad diametrum* f d, *cuius differentia quadratorum figuræ eius æqualis ſit differentiæ quadratorum figuræ axis maioris A C, & vltra diametrum* f d *differentiæ prædictæ ſemper magis augentur quouſque perueniatur ad axim minorem Y O cuius differentia quadratorum figuræ eius maxima eſt omnium differentiarum inter quadrata laterum figuræ cuiuſlibet diametri eiuſdem ellypſis.*

ex Prop. 50. huius.

Conſtat quoque ex 9. propoſitione additarum, quod in ellypſi tres diametri reperiri poſſunt, quarum differentiæ quadratorum figurarum laterum earum æquales ſint inter ſe.

Et ex 10. additarum reperiri poſſunt quatuor diametri, quarum differentiæ quadratorum laterum figurarum earum æquales ſint inter ſe: in hyperbole verò hoc non contingit, nam ab axi differentiæ quadratorum laterum figuræ cuiuſlibet diametri ſucceſſiue augentur, ſi axis maior fuerit ſuo erecto, at ſi minor fuerit prædictæ differentiæ quadratorum ſucceſſiue diminuuntur.

ex Prop. 49. huius. ex Prop. 50. huius.

a Differentia (8. 15.) duorum quadratorum duorum laterum figuræ axis maior eſt in hyperbola (51.), & ellypſi, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ homologæ diametri ſectionis, & differentia homologi proximioris axi maior eſt differentia homologi remotioris: hoc autem ſi axis in hyperbola minor fuerit ſuo erecto *(49.)*; ſi verò fuerit maior oppoſitum pronunciandum eſt *(50.)*, & differentia quadrati axis inclinati, & figuræ eius minor eſt ſemidifferentia quadratorum duorum laterũ figuræ ſui homologi, ſi axis inclinatus minor eſt ſuo erecto *(49.)* ſi verò fuerit maior exceſſus axis maior erit dimidio exceſſus quadratorum duorum laterum figuræ homologi, & minor quàm tota, &c. *Legendum puto: in qualibet ellypſi, &c. vt in textu apparet.*

b Et ſit P Q in ellypſi vna . . . ., & educamus A B, A N, &c. *Repleui lacunam, vt in textu videre eſt.*

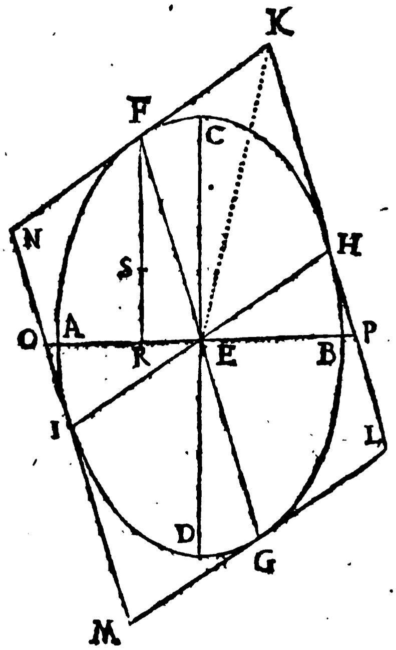
c Ergo E H ad H A minor eſt quàm E D ad D A, nempe E X exceſſus E G, E H ad A C exceſſum H A, A G, & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam duorum quadratorum A G, A F, vt quadratum A H ad differentiam duorum quadratorũ A G; & E H ad H A minor in duabus primis, & maior in duabus ſecundis, quàm E G ad G A, & iungamus ergo E H ad H A, nempe E H ad H A, quàm aggregatum

tum E H, E G in ſuum exceſſum ad aggregatum H A, E G in ſuum exceſſum æqualis exceſſui duorum quadratorum E H, E G, nempe quadratum A C ad exceſſum quadratorum duorum laterum figuræ I L minor in prima ellypſi, & maior in ſecunda, quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in eorum exceſſu æqualis, &c. *Hæc omnia corrigi debuiſſe nemo negabit, atque hinc manifeſtum eſt non pauca in textu arabico deſiderari, cum propoſitio 51. vera non ſit abſque determinationibus ſuperius expoſitis.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſit. XXXII. & XXXI. Apollonij.

IN ellypſi, & ſectionibus coniugatis parallelogrammum ſub axibus contentum æquale eſt parallelogrammo à quibuſcunque duabus coniugatis diametris comprehenſo, ſi eorum anguli æquales fuerint angulis ad centrum contentis à coniugatis diametris. a

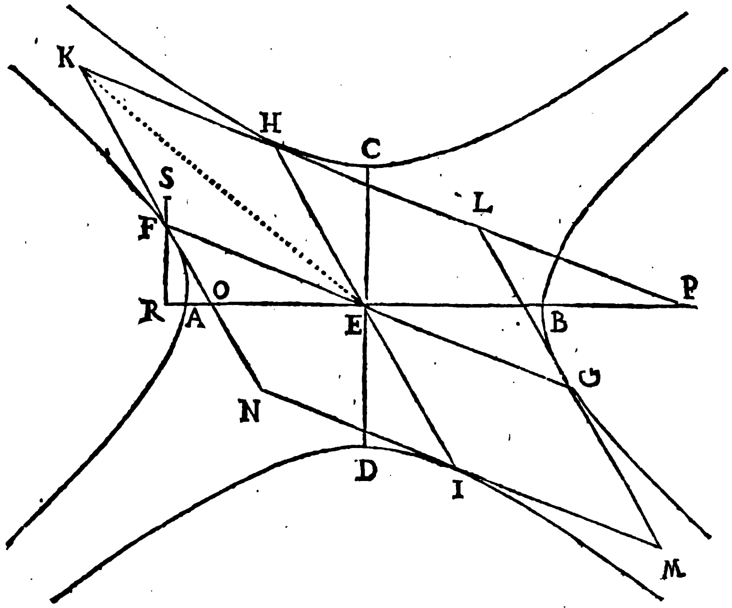


Sint duo axes A B, C D in ellipſi A C B D, ſiue in ſectionibus coniugatis A, B, C, D, & ſint F G, I H aliæ duæ coniugatæ diametri, & ducantur per puncta F, I, G, H, lineæ tangentes coniſectiones, quæ ſibi mutuo occurrant ad puncta K, L, M, N: & producatur A B ex vtraque parte vſque ad tangentes, eaſque ſecet in O, P, & ſit centrum E. Dico quod A B in C D æquale eſt ſpatio parallelogrammo M K; ſit itaque F R perpendicularis ad A B; & ponamus S R mediam proportionalem inter O R, R E.

Et quia quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habet, quàm O R in R E, nempe quàm quadratum S R ad quadratum F R (37. ex 1.) erit A E ad E C nempe quadratum A E ad A E in E C, vt S R ad F R, nempe S R in O E ad F R in O E, & permutando erit quadratum A E, nempe R E in O E (39. ex 1.) b

ad

C ad S R in O E, vt A E in E C ad F R in O E, & quadratum O F ad quadratum E H, nempe triangulum E O F ad triangulum E H P (24. ex 2.) propter ſimilitudinem duorum triangulorum eſt, vt O R ad R E (4. ex 7.), & ſpatium parallelogrammum E K medium proportionale eſt inter duplum trianguli E O F, & duplum trianguli E H P; & S R media proportionalis eſt inter O R, & R E, erit duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K, vt S R ad R E; nempe S R in O E ad R E, in O E, quæ oſtendetur eſſe, vt F R in O E, quod eſt æquale duplo trianguli O F E ad A E in E C; ergo parallelogrammum E K æquale eſt ipſi E A in E C, & propterea quadruplum illius ſpatij, quod eſt parallelogrammum M K æquale eſt ipſi B A in C D. Et hoc erat propoſitum.



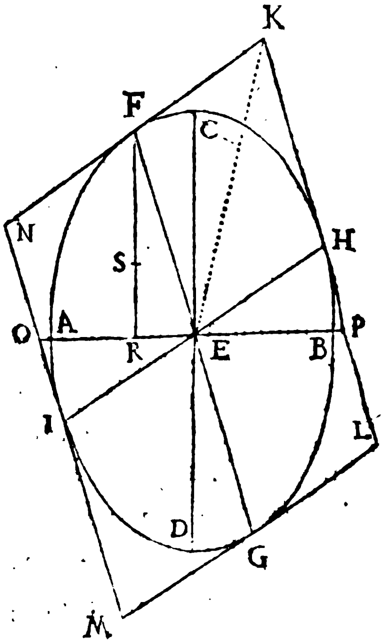
* Hic eſt finis libri ſeptimi Apollonij, quemadmodum illum diſpoſui, & puto me præueniſſe in hoc quoſcunque alios, illumquè repoſui in Bibliotheca Domini Noſtri Regis Glorioſiſſimi, Beneficentiſſimi, Victorioſi; Deus vmbram illius conſeruet ſuper omnes famulos eius, & greges, & ad finem perducat omnia illius deſideria, & cogitationes, & labor famuli eius ſit iuxta eius beneplacitum; & Laus Deo Domino ſæculorum, & orationes eius ſint ſuper Maumethum, eiuſque ſequaces. Explicit anno DXIII. ſcribente Mahamudo filio Maſudi Medici Scirazeni decima die di Alkade Anno DCCCCXXV.

** Inſequẽtibus Paraphraſtes Arabicus impiè, & Maumedanorum more loquitur.*

Notæ in Proposit. XXXI. & XXXII.

a PLanum axium coniugatarum in ellipſi, &c. *Ideſt in ſectionibus coniugatis, & in ellipſi rectangulum ſub axibus coniugatis contentum æquale eſt parallelogrammo ſub diametris coniugatis in angulo æquali, ei qui ad centrum à diametris continetur. In textu arabico reperitur numerus 9. in illa propoſitione, quæ ellipſim conſiderat, ſed mendoſe, vt arbitror debet potius cenſeri propoſit. 32.*

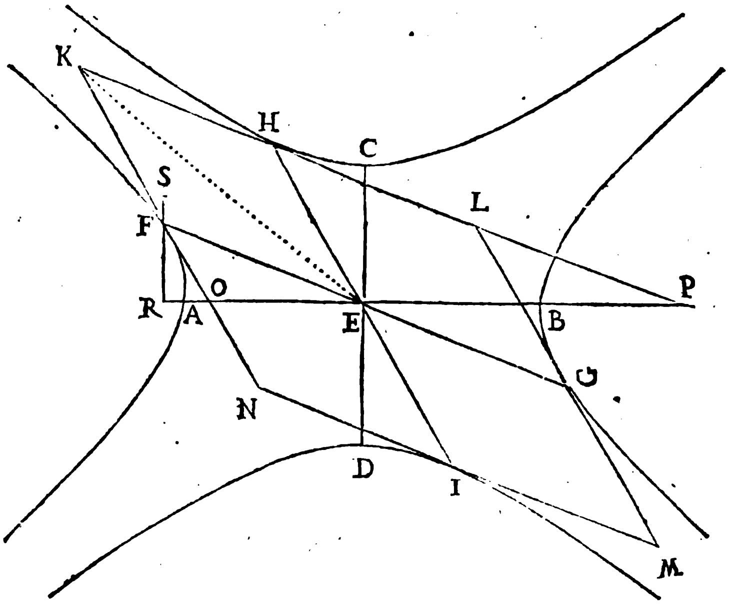
b Et quia quadratum A E ad quadratum E C eſt, vt O R in R E, nempe quadratum S R ad quadratum F R, &c. *Quoniam axis rectus D C medius proportionalis eſt inter axim tranſuerſum A B, eiuſque latus rectum, quadratum A B ad quadratum D C, vel eorundem quadrantes, ſcilicet quadratum ſemiaxis A E ad quadratum ſemiaxis E C eandem proportionem habebit, quàm axis tranſuerſus A B ad eius latus rectum, ſed* Prop. 37. lib. 1. *rectangulum E R O ad quadratum F R eandem proportionem habet, quàm axis tranſuerſus A B ad eius latus rectum, atque quadratum S R æquale eſt rectangulo E R O (eo quod S R facta fuit media proportionalis inter E R, & R O) erit quadratum S R ad quadratum F R, vt latus tranſuerſum A B ad eius latus rectum: quare quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habebit, quàm quadratum S R ad quadratum F R: & A E ad E C eandem proportionem habebit, quàm S R ad F R: & ſumptis altitudinibus A E,* Ibidem. *& O E erit quadratum A E, ſeu ei æquale rectangulum R E O ad rectangulum A E C, vt rectangulum ſub S R, & ſub O E ad rectangulum ſub F R, & ſub O E, & permutando rectangulum R E O ad rectangulum ſub S R, & ſub O E, ſeu vt R E ad S R eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A E C ad rectangulum ſub F R, & ſub O E: & inuertendo rectangulum ſub F R, & ſub O E ad rectangulum A E C eandem proportionem habet quàm S R ad R E.*



C Et quadratum F O ad quadratum E H, nempe triangulum E F O ad triangulum E H P, &c. *Quia G F, I H ſunt diametri coniugatæ, quibus æquidiſtant contingentes F O, & L H erunt triangula E O F, & E H P ſimilia, quorum latera homologa O F, & E H; & ideo triangulum E O F ad*

Prop. 4. huius.

triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm quadratum O F ad quadratum E H: eſtque O R ad R E, vt quadratum O F ad quadratum E H, igitur triangulum E O F ad triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm O R ad R E. Ducatur poſtea recta linea E K, erit triangulum E F K medium proportionale inter duo ſimilia triangula E O F, & E H P (eo quod triangulum E O F ad triangulum E F K æquè altum eandem proportionem habet quàm O F ad F K, ſeu ad latus E H ei homologum) poſita autem fuit S R media proportionalis inter O R, & R E; ergo triangulum E O F ad triangulum E F K eſt vt S R ad R E: eſtquè parallelogrammum E K æquale duplo trianguli E F K; ergo duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm S R ad R E; Et quia rectangulum ſub O E, & ſub perpendiculari R F æquale eſt duplo trianguli E O F (cum habeant baſim O E communem, & eandem altitudinem perpendicularis R F); igitur rectangulum ſub O E, & ſub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habebit, quàm S R ad R E: ſed prius rectangulum ſub O E, & ſub R F ad rectangulum A E C eandem proportionem babebat, quàm S R ad R E: ergo idem rectangulum ſub O E, & ſub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm ad rectangulum A E C; & propterea parallelogram-



mum E K æquale eſt rectangulo A E C ; & eorum quadrupla erunt æqualia, ſcilicet parallelogrammum M K æquale erit rectangulo ſub B A, & ſub D C comprahenſo. Quod erat propoſitum.

LIBRI SEPTIMI FINIS.

ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO

Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.

IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.

IO: ALFONSI BORELLI

Præfatio ad Lectorem.

SI pulchrum illud Epicharmi effatum tenes (amice Lector) neruos , atque artus eſſe ſapientiæ non temerè , ac imprudenter credere , non adeò facilis eſſe debes ; vt Archimedis nomen lemmata hæc pretioſiora efficiens tibi impoſturam , aut fucum facere patiaris , atque alterius contemptiſſimi auctoris opuſculum immeritò tanto viro tribuas ; & ſiquidem maiores noſtri æquum iudicium dixere , vt ſine inuidia culpa plectatur , non ita moroſus , ac difficilis eſſe debes , vt ſua ei denegare velis leui quacumque ſuſpicione , quæ facilè excuti poſsit ; verum ab omni præiudicio liberum te cupio , & memorem illius adagij : Ne quid nimis . Tibi igitur ſic affecto notionem huius controuerſiæ omnino relinquo , quod vt liberè , & ritè exequi valeas , ſedato animo nullum meum iudicium interponens , afferam primò rationes , quibus perſuaderi quis poſſet hoc opuſculum iniurià Archimedi tributum fuiſſe , & mox coniecturas recenſebo , quæ eiuſdem Archimedis idipſum opus eſſe fortè non inaniter probant ; ſicque penſitatis , & compoſitis vtrinque rationum ponderibus ſententiam liberè pronuncies tuam per me licet .

Et primò animaduerſione dignum eſt in Collect. Mathemat. Pappi Alexand. frequentiſsimè commemorari ea , quæ Archimedes conſcripſit , præcipuè lib. 5. & lib. 8. De Spiralibus , de Solidis Polyedris , de Circuli Menſura , de Sphæra , & Cylindro , & multoties citantur , & tranſcribuntur Archimedeæ propoſitiones , neque vſpiam huius Opuſculi

(apud Arabes hactenus latentis) mentio vlla ſit. Neque Ptol. in Magnæ Conſtr. lib. 2. tribuit Archimedi prop. 5. cap. 9. ibi relatam, cum tamen ſoleat eſſe adeò gratus, vt lib. 6. cap. 7. propoſitionem ab Archimede ſumpſiſſe fateatur. Neque ipſemet Archimedes huius Opuſculi vnquam meminit, qui alioquì valdè prolixè enumerat, & recenſet ea, quæ in proprijs libris continentur, & demonſtrantur. Inexcuſabiles inſuper errores, atque allucinationes, quæ in huiuſmodi propoſitionibus reperiuntur, immò puerilia alia Opuſcula, quæ citantur vt Archimedis, ſatis apertè videntur oſtendere nunquam diuinum illud ingenium huiuſmodi minutias ſomniaſſe; cum, vt Carpus Antiochenſis ait, referente Pappo, quæ præcipua ſunt in Geometria, breuiter quidem, ſed diligenter conſcripſerit Archimedes. Tandem præcipuæ propoſitiones huius Opuſculi ſimiles ſunt eis, quæ recenſentur quidem, & demonſtrantur lib. 4. Collect. Mathem. Pappi Alex., eaſque Archimedis eſſe non aſſerit; immò in quibuſdam libris antiquis circumferri affirmat.

Quod verò dictæ rationes tanti roboris, ac efficaciæ non ſint, vt penitus euincant huiuſmodi Opuſculum ab aliquo alio tributum Archimedi fuiſſe, ex modo dicendis patebit. Et primo optimè norunt, qui in Pappi libris euoluendis vllam operam impenderunt lib. 7. Collect. recenſere eum prolixè, & accuratè quàmplurima opera Apollonij Pergæi, quorum pars maxima non extat, & enumerare propoſitiones, & lemmata vſque ad figuras, & tamen qui huiuſmodi minutias curat, & adnotat, idem integra opera eiuſdem Apollonij non commemorat. Sufficiant hæc inſignia ſpecimina. De admirandis aſtronomicis demonſtrationibus à Ptolemæo ſummoperè laudatis lib. 12. cap. 1. Magnæ Conſtr., ne verbum quidem. De libro Comparationis Dodecaedri, & Icoſaedri ab Ypſicle memorato, altum ſilentium. Si igitur idem Pappus opera Archimedis non ex profeſſo, ſed obiter, & ſparſim commemorat, mirum non eſt tacuiſſe aliqua eius opera, vt ſunt hæc lemmata.

Secundò Ptolemæus non affirmat lib. 2. prop. 5. proprio marte à ſe inuentam fuiſſe, nec eam Archimedi, aut alicui alij tribuit, quare fieri potuit, vt eam ex libro antiquo deſumpſerit, à quo nomen Archimedis caſu expunctum fuiſſet, vt poſtea oſtendetur.

Tertiò Archimedes quoque in ſuis libris exiſtentibus Græcè, & Arabicè non recenſet omnia opera à ſe conſcripta, & edita, nam liber de inſidentibus humido, & de Polyedris recenſentur quidem à Pappo, non autem ab Archimede. Liber Mechanicus de Sphæropæia nominatur à

In proh. lib. 8.

Lib. 5. pr. 17.

Carpo

Carpo Antiochenſe apud Pappum. Liber de Figuris Iſoperimetris aſſeruatur apud Arabes tantum; non igitur adulterina huiuſmodi lemmata erunt, propterea quod Archimedes ea non nominat in paucis libris reſiduis, & fortè commemorata fuerunt in aliquibus alijs ex multis operibus eius iniuria temporum deperditis. In proh. lib. 8.

Quartò ſane negari non poſſunt euidentiſsimi errores in hiſce demonſtrationibus, qui certè lemmatum auctori tribuendi non ſunt, vt ſuis in locis adnotabo; explanatorum enim imperitia ſæpenumero propoſitiones vniuerſaliter pronunciatæ violenter in ſenſu particulari, & deformi exponuntur. Neque mirum eſt opera antiquorum magni nominis paſsim, & multis modis deformata fuiſſe tranſcriptorum incuria opponendo notas marginales, detrahendo, & ſuperaddendo textui alienas ſententias, ac teſtimonia, & hoc præcipuè in codicibus Arabicis frequentiſsimè obſeruauit Excell. Abrahamus Ecchellenſis. Sed nihilominus in tanta tranſformatione à vetuſtate, & ignorantia amanuenſium profecta veſtigium aliquod ſubobſcurum admirandi, & perſpicui Archimedis ingenij dignoſcitur.

Tandem non inani coniectura ex Pappi, & Eutocij teſtimonijs probari poteſt idipſum, quod Arabes ratum habent, ſcilicet Archimedem huius libelli auctorem fuiſſe. Et primò aio præter reliqua opera iam nota edidiſſe Archimedem librum Lemmatum, quod quidem deducitur ex Eutocio in Comment. prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro, vbi ait: Id, quod promiſerat ſe demonſtraturum, (*ſcilicet Archimedes*) in nullis exemplaribus reperire eſt, quare etiam Dionyſodorum deprehendimus nunquam in ea incidiſſe, adeoque cum non potuerit relictum (*ab Archimede*) lemma attingere diuerſam viam ſuſcepit vniuerſi problematis, quam deinceps deſcribemus. Diocles porrò idipſum in libro à ſe de Pyrijs inſcripto, promiſſum fuiſſe ab Archimede nunquam præſtitum opinatus, ſupplere contendit, cuius conatum mox apponemus, quod & ipſum pariter à ſuperius propoſitis diſcedit; itidem enim ac Dionyſodorus alia demonſtrandi ratione problema ſtruit. IN QVODAM AVTEM VETERI LIBRO (neque enim diuturnæ pepercimus diligentiæ) ſupraſcripta incidimus theoremata haud exiguam tamen habentia obſcuritatem præ erratis, multiformiterque mendoſa in figurationibus. Eamdem equidem veritatem, quam inquirebamus, atque in parte domeſticam Archimedi linguâ Doricam ſeruabant,

vſita-

vſitatiſque pridem rerum nominibus conſcripta erant, quæ nunc parabola, recti coniſectione, quæ hyperbole, obtuſi anguli ſectione vocata; vt ex his ſuſpicari liceat EADEM IPSA FORTEAN ESSE, QVÆ IN FINE SCRIBENDA PROMITTEBANTVR; quare attentius incumbentes, (cum ipſam hypotheſim, qualiter perſcripta fuerat, præ mendarum copia (vt diximus) ſatis incommodam, & abſtruſam reperiremus,) ſenſum inde paucis elijcientes communi, & plana dictione (vt fieri potuit) deſcribimus. Vniuerſaliter autem primum theorema deſcribetur, vt definitis manifeſtetur, deinde reſolutis in problemate accomodabitur. *Inferius.*

Præmiſſis autem problematis, quæ hìc apponuntur, ſcilicet duplam eſſe ipſam D B ipſius B F, &c. (*Nota quod hic loquitur de lemmatibus adiunctis,*) *& paulò poſt*; animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt conſonare ijs, quæ nos reſoluimus (*ſcilicet ijſdem adductis lemmatibus*). *Deinde* cum dixerit, quod ſuperius dictum vniuerſaliter habet determinationem, adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam D B duplam eſſe ipſius B F, & ipſam B F maiorem ipſa F H, &c. *Hic manifeſtè Eutocius declarat propoſita lemmata in antiquo codice inuenta Archimedis fuiſſe.*

Hæc igitur conſentanea verbis Archimedis, qua fieri potuit, dilucidè expoſuimus.

Conſtat ergò ex Eutocij ſententia librum antiquum ab eo repertum, & recognitum, eſſe opus Archimedis, licet titulo Auctoris caruerit, & mendoſiſſimum eſſet, atque ignotum Dionyſodoro, Diocli, & pleriſque Græcorum diu iacuiſſet; etenim ex ſtylo, ex ſubiecto promiſſo, ex lingua Dorica, & ex vocibus vetuſtis Archimedi familiaribus concluſit lemmata prædicta Archimedis fuiſſe. Sed adhuc difficultas hæret, nam licet concedamus ſcripſiſſe Archimedē, & edidiſſe librum lemmatum ab Eutocio memoratum; diuerſus omnino erit ab eo, quem Thebitius Arabicè tranſtulit, nam in iſto non reperitur lemma illud, quod promiſerat Archimedes ſe demonſtraturum.

Hæc difficultas duplici coniectura ſi non frangi, ac reſolui ſaltem debilitari poteſt; liber enim antiquus lemmatum Archimedis ne dum titulo carebat ſuo, ſed erat valdè corruptus, deficiens, & mendoſus; quarè non ſine diuturno, ac pertinaci labore ſenſus illius lemmatis elicere potuit

Euto-

Eutocius, unde fieri potuit ut Græcus codex ad Arabes tranſmiſſus deterior, & magis mutilus adhuc fuerit eo exemplari, in quod incidit Eutocius, vel potius incuria, aut vitio librariornm Arabum, & amanuenſium eiuſdem codicis quamplurima lemmata perierunt, inter quæ aſſumptum in prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro excidit. E contrà aliquæ propoſitiones ſimiles eis, quæ leguntur in hoc Arabico codice de Arbelo extant apud Pappum lib. 4. Collect. prop. 14. 15. & 16., quas ait circumferri in quibuſdam libris antiquis, ſcilicet in libro Græco incerti Auctoris propoſitiones lemmaticas continente; at teſtimonio Thebitij magni nominis viri, & omnium Arabum, liber ex Græco translatus continens ferè eadem lemmata, quæ recenſentur à Pappo, tribuitur Archimedi, ſicuti prius Eutocius multiplici coniectura libri antiqui lemmatum à ſe reperti Archimedem auctorem fecit; quare ergo nos eiſdem coniecturis perſuaſi eidem Achimedi tribuere dubitabimus Opuſculum hoc ab Arabibus aſſeruatum, in quo ſi mendarum copiam ſpectes, ſimile omnino erit ei, quod Eutocius nactus eſt? Hæ ſunt rationes, mi lector, quas tibi examinandas relinquo in hoc perplexo negotio nulla diſsimulata difficultate.

Interim ſcito hoc manuſcriptum Arabicè elegantiſsimè exaratnm in Bibliotheca Sereniſsimi Magni Etruriæ Ducis diù aſſeruatum fuiſse; eius tamen editionis ſpe facta tandem anno 1658. Sereniſsimus Ferdinandus Secundus Magnus Etruriæ Dux Romæ aſportandum humaniſsimè mihi credidit, ut rei litterariæ bono latinè traduceretur, præſtitumque fuit opera, & ſtudio celeberrimi, & peritiſsimi Orientalium linguarum profeſsoris Abrahami Ecchellenſis, ipſoque dictante religioſiſsimè, & accuratè ipſe calamo excepi, in eoque paucula quædam in notis animaduertenda cenſui tum in contextu plurimis mendis corrupto, tum in ſcholijs Arabicis Almochtaſſo non admodum in Geometria verſati. Addidi in fine huins libri duas alias Archimedis propoſitiones ab Eutocio repertas quarum altera fortaſſe illa eadem eſt quæ hic deficit, nam Almochtaſſo in proemio ait, propoſitiones huius Opuſculi ſexdecim eſſe, cum tamen poſtrema ſit decimaquinta. Et licet hæc eadem lemmata anno præterito edita fuerint Londini, non tamen hac noſtra editione fraudandus es, amice lector. Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS

CVIVS OPEM IMPLORAMVS.

LIBER ASSVMPTORVM ARCHIMEDIS,

INTERPRETE THEBIT BEN-KORA,

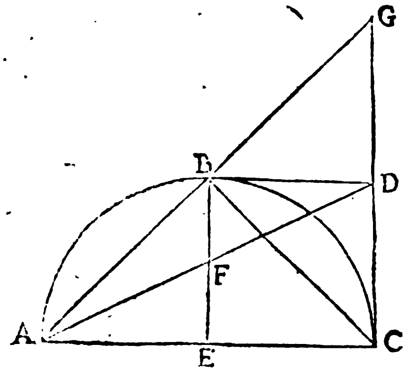
Et exponente Doctore

ALMOCHTASSO ABILHASAN,
Halì Ben-Ahmad Noſuenſi.

PROPOSITIONES SEXDECIM.

ASſerit Doctor Almochtaſſo hunc librum referri ad Archimedem, in quo ſunt propoſitiones pulcherrimæ paucæ numero, vtilitatis verò maximæ de principijs Geometriæ, optimæ atque elegantiſſimæ, quas adnumerant profeſſores huius ſcientię ſummæ intermediorum, quæ legi oportet inter librum Euclidis, & Almageſtum; at verò quædam illius propoſitionum loca indigent alijs propoſitionibus, quibus propoſitiones illæ clariores euadant. Et quidem ipſe Archimedes has indicauit propoſitiones, eaſque retulit in alijs ſuis operibus, dum dixit quemadmodum demonſtrauimus in propoſitionibus rectangulorum: item & quemadmodũ demonſtrauimus in noſtra expoſitione agentes de triangulis; rurſus quemadmodum demonſtrauimus in propoſitionibus quadrilaterum; & retulit in propoſitione quinta demonſtrationem hac de re magis peculiarem. Deinde compoſuit Abuſahal Alkuhi librum, quem inſcripſit ordinationem libri Archimedis de aſſumptis, & tractauit demonſtrationem huius propoſitionis via vniuerſaliori, ac meliori, nec non ea, quę dependent ex compoſitione proportionis, quod quidẽ cum id comperi, attexui locis obſcurioribus huius libri expoſitionem, ſeu marginales poſtillas, & confirmaui quod ille indicauerat propoſitionibus, vti iudicaueram, & retuli ex propoſitionibus Abiſahal duas propoſitiones, quibus opus eſt ad propoſitionem quintã declarandam, reliquas omittens breuitatis gratia, & eo quod non ſint neceſſarię.

quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo G A C linea B E educta eſt parallela baſi, & iam educta eſt ex D ſemipartitione baſis linea D A ſecans parallelam in F, erit B F æqualis ipſi F E, & hoc eſt quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

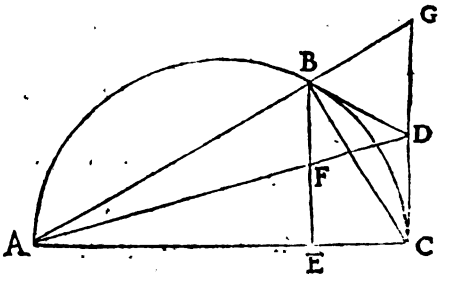
Dicit Doctor: Quod autem C D ſit æqualis ipſi D G, vti remittit ad ſuum librum de propoſitionibus rectangulorum, eo quod duo anguli D C B, D B C æquales ſunt propter æqualitatem D B, D C, & angulus D B C cum augulo D B G eſt rectus, & ſimiliter angulus D C B cum angulo C G B: neceſſe eſt, vt ſint duo anguli D G B, D B G æquales etiam, ergo duo latera D B, D G ſunt æqualia.

Rurſus ſi dicatur quod proportio C D ad D B ſit vt proportio D B ad D G, & D C æqualis ipſi D B, ergo D B æqualis eſt D G, eſſet parabola. Dicit, quod vero B F ſit æqualis F E, hoc conſtat ex eo quod caſus A D ſuper duas lineas B E, G C parallelas in triangulo A G C, exigit eorum ſectio in eadem proportione, & id quidem, quia A D ad A F eandem proportionem habet, quam G D ad B F, & quam D C ad E F, ergo G D ad B F eſt vt D C ad E F, & permutando G D ad ei æqualem D C, eſt vt B F ad E F, & propterea ipſæ etiam ſunt æquales.

Notæ in Propoſ. II.

HVius ſecundæ propoſitionis expoſitio, & demonſtratio inſigniter deformata eſt; in propoſitione enim ſupponuntur duæ rectæ D C, D B tangere circulum tantummodo, non autem conſtituere angulum rectum, & ſolummodo recta linea B E perpendicularis ducitur ad diametrum A C, quare male in demonſtratione pronunciatur quadrilaterum B D C E parallelogrammum rectangulum, cum ferè ſemper ſit Trapetium: pariterque errat, quando ait rectam B D perpendicularem eſſe ſuper C G, quæ nunquam vera ſunt, niſi in vnico caſu, quando ſcilicet B E cadit perpendiculariter ſuper centrum circuli.

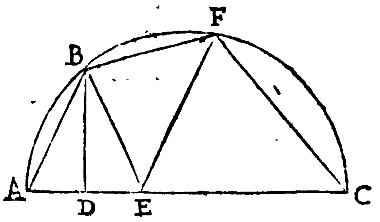
Interim notandum eſt hanc elegantem propoſitionem, inſignem vſum habere pro inueſtigatione menſuræ circuli, & rectarum in eo ſubtenſarum; deduci namque poſſunt non contemnenda problemata; Si enim quis cupiat circulo adſcribere duas figuras ordinatas ſimiles, quarum circumſcripta ſuperet inſcriptam exceſſu minori quolibet dato, facile problema abſoluetur,



pariterque proportio diametri ad circuli peripheriam ſatis compendioſe deduci poteſt, quandoquidem inter figuram ordinatam eidem circulo inſcriptam, cuius ſemilatus eſt E B, & circumſcriptam duplo laterum numero, cuius duo ſemilatera ſunt C D B, circulus intermediat; & Perimeter circumſcriptæ figuræ ad Perimetrum inſcriptæ eandem proportionem habet, quam diameter C A ad A E, quæ proportio minui ſemper magis, ac magis poteſt in infinitum; & tandem ex 3. propoſ. ſequenti, ex continua ſemipartitione quadrantis circuli elici poſſunt ſubtenſæ ſucceſſiuè ſubdiuiſæ in infinitum, & propterea dabitur proportio diametri A C ad ſemiſubtenſam B E, ſed datur quadratum ipſius B E, igitur datur rectangulum A E C ſub ſegmentis diametri, & datur E C ex iam dicta 3. propoſ. igitur datur quoque E A; eſtque B E ad C D B, vt E A ad diametrū A C, igitur quarta quantitas innoteſcet, ſcilicet rectæ C D B, quæ æqualia ſunt vni lateri Poligoni circumſcripti duplo laterum numero, & ideo habebitur menſura totius Perimetri tum Poligoni inſcripti, cum circumſcripti, quare menſura ipſius peripheriæ circuli, quæ intermedia eſt, facili negotio inueſtigabitur.

PROPOSITIO III.

SIt C A ſegmentum circuli, & B punctum ſuper illud vbicumque, & B D perpendicularis ſuper A C, & ſegmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipſi C E.



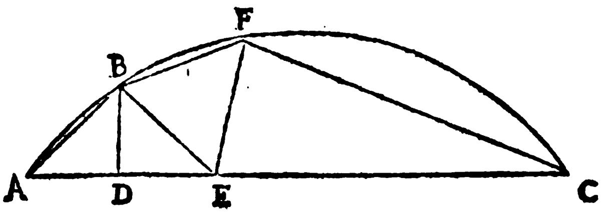
Demonſtratio. Iungamus lineas A B, B F, F E, E B; & quia arcus B A æqualis eſt arcui B F, erit A B æqualis B F, & quia A D æqualis eſt E D, & duo anguli D ſunt recti, & D B communis, ergo A B æqualis eſt B E, & propterea B F, B E ſunt æquales; & duo anguli B F E, B E F ſunt æquales. Et quia quadrilaterum C F B A eſt in circulo, erit angulus C F B cum angulo C A B ipſi oppoſito, immo cum angulo B E A, æqualis duobus rectis; ſed angulus C E B cum angulo B E A, æquales ſunt duobus rectis, ergo duo anguli C F B, C E B ſunt æquales, & remanent C F E, C E F æqualas; ergo C E æqualis eſt C F, & hoc eſt quod voluimus.

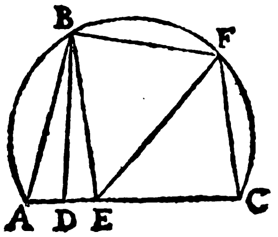
Notæ in Propoſit. III.

HAEc eſt propoſ. 5. cap. 9. lib. 1. Almag. Ptol., ſed hic vniuerſalius pronunciatur; Ptolomeus enim ſupponit ſegmentum A B C ſemicirculum eſſe, & ex cognita circumferentia A F, & corda F C, & illius medietate A B, quærit chordam A B; eſt enim rectangulum ſub C A D æquale quadrato

ipſius

ipſius A B, eſtque nota A D medietas differentia inter diametrum A C, & chordam differentia F C; at propoſitio Archimedea verificatur in quolibet circuli ſegmento ſiue maiori, ſiue minori; ex datis enim circumferentijs A C, A B,

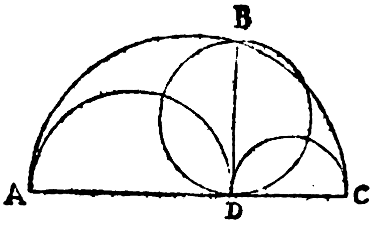




A F, & F C vna cum cordis A C, & F C, haberi quidem poteſt chorda A B paulo difficilius, ſi nimirum ex chorda A C tollatur chorda F C, & differentia A E biſariam ſecetur in D, & ex arcu cognito B C datur angulus A, atque angulus D rectus eſt, ergo triangulum A B D ſpecie notum erit, & propterea proportio D A ad A B cognita erit, eſtque D A longitudine data, igitur A B longitudine innoteſcet.

Notandum eſt quod figura appoſita in hac propoſ. non exprimit omnes caſus propoſitionis, quandoquidem ſemicirculus eſt A B C, & propterea ex præcedentibus erroribus Arabici expoſitoris ſuſpicari licet non ritè eum percepiſſe Archimedis mentem.

PROPOSITIO IV.



A B C ſemicirculus, & fiant ſuper A C diametrum duo ſemicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura prouenient, quam vocat Archimedes ARBELON, eſt ſuperficies comprehenſa ab arcu ſemicirculi maioris, & duabus circumferentijs ſemicirculorum minorum, eſt æqualis circulo, cuius diameter eſt perpendicularis D B.

Demonſtratio. Quia linea D B media proportionalis eſt inter duas lineas D A, D C, erit planum A D in D C æquale quadrato D B, & ponamus A D in D C cum duobus quadratis A D, D C communiter, fiet planum A D in D C bis cum duobus quadratis A D, D C, nempe quadratum A C, æquale duplo quadrati D B cum duobus quadratis A D, D C, & proportio circulorum eadem eſt, ac proportio quadratorum,

ergo

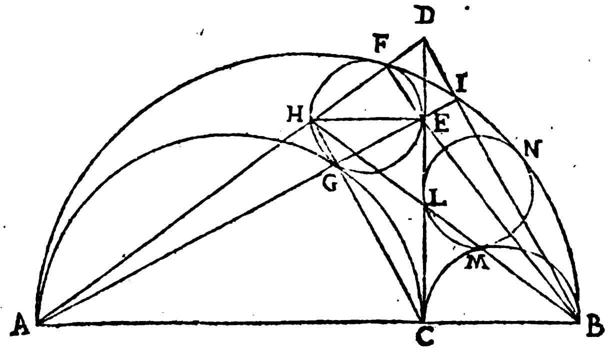
ergo circulus, cuius diameter eſt A C, æqualis eſt duplo circuli, cuius diameter eſt D B cum duobus circulis, quorum diametri ſunt A D, D C, & ſemicirculus A C æqualis eſt circulo, cuius diameter eſt D B cum duobus ſemicirculis A D, D C; & auferamus duos ſemicirculos A D, D C communiter, remanet figura, quàm continent ſemicirculi A C, A D, D C, & eſt figura, quàm vocauit Archimedes Arbelos æqualis circulo, cuius diameter eſt D B, & hoc eſt quod voluimus,

Notæ in Propoſit. IV.

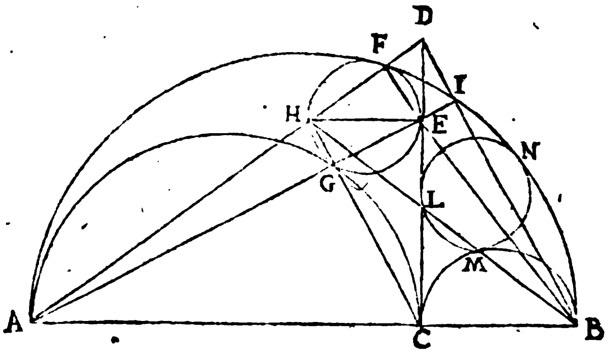
HAEc forſan eſt vna earum propoſitionum, quas Pappus legit in libro antiquo de menſura ARBELI, ſeu ſpatij à tribus ſemicircumferentijs circulorum comprehenſi, vt ait Proclus, quæ quidem elegantiſſima eſt, eiuſque inuentionis Lunulæ Hyppocratis Chij originem extitiſſe puto; eſt enim Hyppocratis Lunula ſuperficies plana à quadrante peripheriæ circuli maioris, & ſemiſſe peripheriæ circuli ſubdupli comprehenſa: Arbelus vero recentiorum eſt ſpatium à triente, & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulorum æqualium comprehenſum, & hiſce duobus ſpatijs facilè quadrata æqualia reperiri poſſunt; at Arbeli Archimedis, & Procli hucuſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari circulus prædicto ſpatio æqualis.

PROPOSITIO V.

SI fuerit ſemicirculus A B, & ſignatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant ſuper diametrum duo ſemicirculi A C, C B, & educatur ex C perpendicularis C D ſuper A B, & deſcribantur ad vtraſque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes ſemicirculos, vtique illi duo circuli ſunt æquales.



Demonſtratio. Sit alter circulorum tangens D C in E, & ſemicirculum A B in F, & ſemicirculum A C in G, & educamus diametrū H E, erit parallela diametro A B, eo quod duo anguli H E C, A C E, ſunt recti, & iungamus F H, H A, ergo linea A F eſt recta, vti dictum eſt in propoſitione 1. & occurrent A F, C E in D, eo quod egrediuntur ab angulis



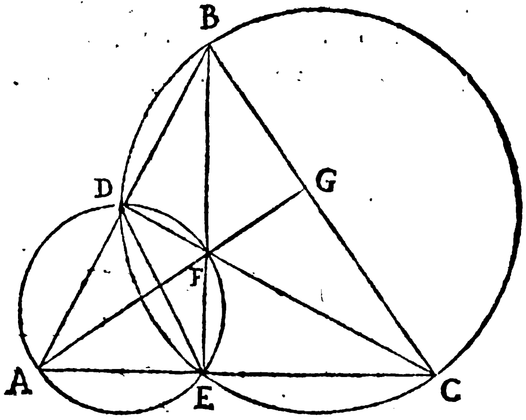
A, C minoribus duobus rectis, & iungamus etiam F E, E B, ergo E F B eſt etiam recta, vti diximus, & eſt perpendicularis ſuper A D, eo quod angulus A F B eſt rectus, quia cadit in ſemicirculum A B, & iungamus H G, G C, erit H C etiam recta; & iungamus E G, G A, erit E A recta, & producamus eam ad I, & iungamus B I, quæ ſit etiam perpendicularis ſuper A I, & iungamus D I; & quia A D, A B ſunt duæ rectæ, & educta ex D ad lineam A B perpendicularis D C, & ex B ad D A perpendicularis B F; quæ ſe mutuo ſecant in E, & educta A E ad I eſt perpendicularis ſuper B I, erunt B I D rectæ, quemadmodum oſtendimus in Propoſitionibus, quas confecimus in expoſitione tractatus de triangulis rectangulis: & quia duo anguli A G C, A I B ſunt recti, vtique B D, C G ſunt parallelæ, & proportio A D ad D H, quæ eſt vt A C ad H E, eſt vt proportio A B ad B C, ergo rectangulum A C in C B æquale eſt rectangulo A B in H E; & ſimiliter demonſtratur in circulo L M N, quod rectangulum A C in C B æquale ſit rectangulo A B in ſuam diametrum, & demonſtratur inde etiam, quod duæ diametri circulorum E F G, L M N, ſint æquales, ergo illi duo circuli ſunt æquales. Et hoc eſt quod voluimus.

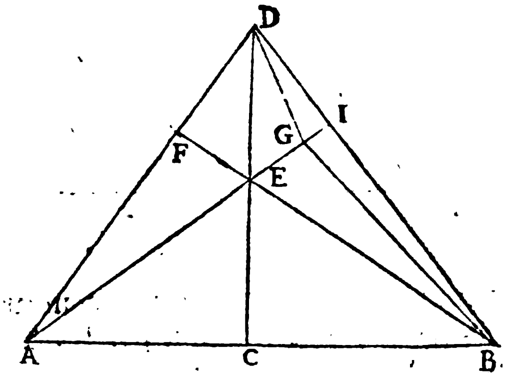
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor. Clarum quidem eſt quod citauit ex expoſitione triangulorum rectangulorum in præfatione; & eſt quidem propoſitio vtilis in principijs, ac præſertim in triangulis acutangulis, qua opus eſt in propoſit. 6. huius libri, & eſt hæc. Ex triangulo A B C eduxit perpendiculares B E, C D ſe mutuo ſecantes in F, & coniunxit A F, & produxit ad G, hæc vtique erit perpendicularis ſuper B C.

Iungamus itaque D E, erunt duo anguli D A F, D E F æquales, quia circulus comprehendens triangulum A D F tranſit per punctum E, eo quod angulus A E F eſt rectus, & cadent in illo ſuper eundem arcum, & etiam angulus D E B æqualis eſt angulo D C B, quia circulus continens triangulum B D C tranſit etiam per punctum E, ergo in duobus triangulis A B G, C B D ſunt duo anguli B A G, B C D æquales;

& an-



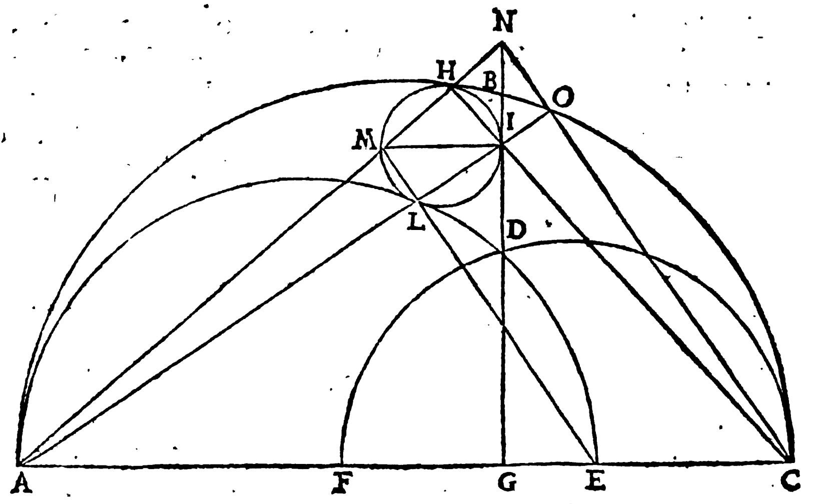


& angulus B eſt communis, ergo A G B æqualis eſt angulo C D B recto, ergo A G eſt perpendicularis ſuper B C. Hoc præmiſſo repetamus ex propoſit. quàm attulit Archimedes D A, A B, & perpendiculares D C, A I, B F, B I, & lineam D I. iam ſi B I D non fuerit linea recta, iungamus B G D rectam, erit angulus A G B rectus ex præmiſſa propoſitione, & erat angulus A I B rectus, ergo internus in triangulo B I G æqualis eſt oppoſito externo, & hoc eſt abſurdum, igitur linea B I D eſt recta. Deinde attulit duas propoſitiones ex interpretatione Alkauhi, quarum prima eſt hæc.

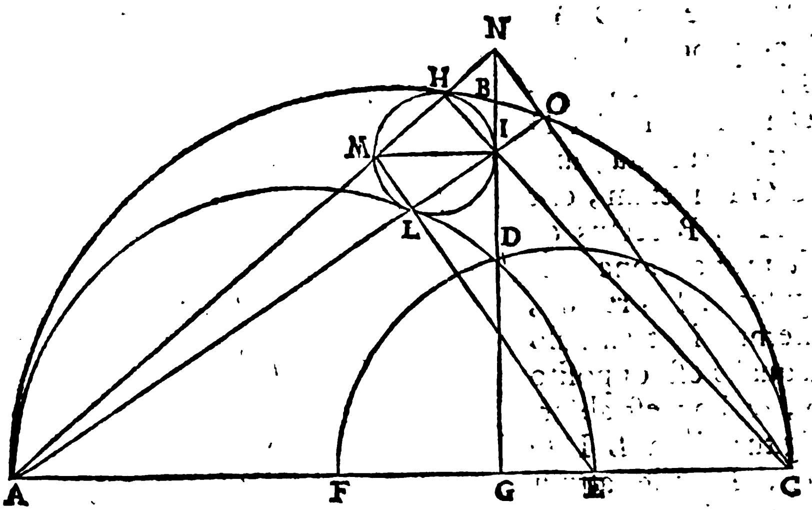
SCHOLIVM PRIMVM ALKAVHI.

SI non fuerint duo ſemicirculi tangentes, ſed mutuo ſe ſecantes, & perpendicularis fuerit in loco mutuæ ſectionis, idem ſequitur.

Sint itaque ſemicirculi A B C, A D E, F D C, & duo illi ſemicirculi ſe mutuo ſecantes in D, & B G perpendicularis ſuper A C inſiſtat;



& circulus I H L tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L, & perpendicularem in I. Dico eſſe æqualem circulo, qui eſt in altera parte. Hoc modo, Educamus I M parallelam ipſi A C, & iungamus A H, quæ tranſibit per M, quemadmodum demonſtrauit Archimedes, Prop. 1. huius.

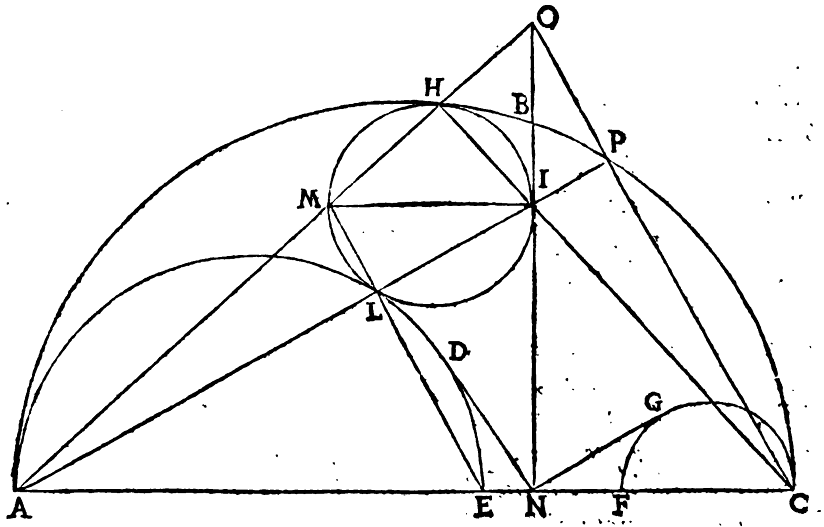


& producamus eam quouſque occurrat perpendiculari N G in N, & iungamus I A, quæ tranſibit per L, & producamus illam ad O, & iungamus C O, O N, quæ erit linea recta, & iungamus M E, quæ tranſibit per L, & iungamus G H, quæ tranſibit per I; & linea C O N *parallela* eſt lineæ E M, & proportio A N ad N M, nempe proportio A G ad I M eſt vt C A ad C E, ergo rectangulum A G in C E æquale eſt rectangulo C A in I M; & quia G D eſt perpendicularis in *duobus* circulis C D E, E D A ſuper duas diametros C F, E A, erit rectangulum C G in G F æquale quadrato G D, & rectangulum A G in G E æquale etiam eſt illi, ergo rectangulum C G in G F æquale eſt rectanlo A G in G E, & proportio C G ad G A eſt vt proportio E G ad G F, immo vt proportio C E ad F A reſiduam; ergo rectangulum C G in F A, eſt æquale rectangulo C A in I M cui æquale eſt rectangulum G A in C E. Et ſi fuerit in altera parte circulus modo præfato eadem ratione oſtendemus, quod reſtangulum C A in diametrum illius circuli æquale ſit rectangulo C G in A F, & oſtendetur quod duæ diametri duorum circulorum ſint æquales.

SCHOLIVM SECVNDVM ALKAVHI.

Porrò ſecunda eſt hæc. Dicit quod ſi duo ſemicirculi non ſint tangentes, nec ſe mutuo ſecantes, ſed ſeparati, & perpendicularis tranſeat per concurſum duarum linearum tangentium eos, quæ ſunt æquales idem ſequetur.

Sint itaque ſemicirculi A B C, A D E, F G C, vti diſpoſuimus, & duæ lineæ N G, N D tangentes illos duos ſemicirculos in G, D, & æquales, ſibique occurrentes in N, & linea B N tranſiens per punctum N perpendiculariter erecta ſuper A C, & tangat illam circulus M N I in I, & idem tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L,

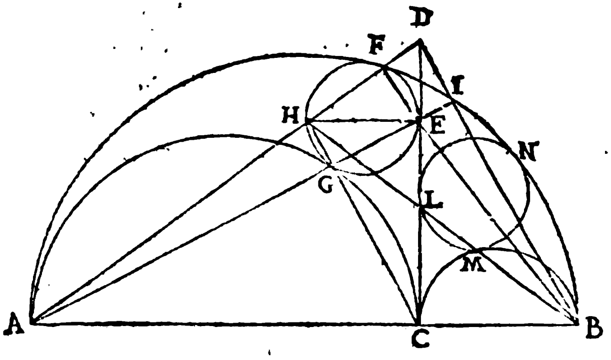


& educamus diametrum I M parallelam ipſi A C, & iungamus C H, quæ tranſibit per I, & iungamus M E tranſibit per L, & iungamus A I tranſibit per L, & producamus eam ad P, & iungamus C O tranſibit per P, eritque parallela ipſi E M, & erit proportio A O ad O M, nempe proportio A N ad M I vt proportio A C ad C E, & rectangulum A N in C E æquale rectangulo A C in I M. Et eodem modo oſtendetur, quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum circuli, qui eſt ex altera parte; & quia rectangulum C N in N F æquale eſt quadrato G N, & eſt æquale quadrato D N, quod eſt æquale rectangulo A N in N E erit rectangulum C N in N F æquale rectangulo A N in N E, & proportio C N ad A N vt E N ad N F, & vt proportio totius C E ad totum A F, ergo rectangulum A N in C E æquale eſt rectangulo C N in F A, & iam oſtenſum eſt, quod A N in C E æquale eſt rectangulo A C in I M, & quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum alterius circuli: ergo duæ diametri ſunt æquales, & duo circuli æquales, & hoc eſt quæſitum.

Prop. 1. huius.
Ibidem.
Scholium præc. Almoc.

Notæ in Propoſit. V.

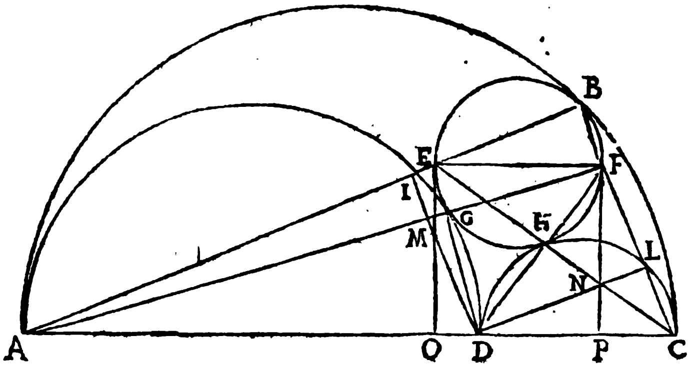
H*Aec propoſitio parum quidem differt à poſtrema parte propoſit.* 14. 16. *&* 17. *lib.* 4. *Pappi Alex., ſi figuram, conſtructionem, & progreſſum* *demonſtrationis ſpectes ; differunt tamen in concluſione, quæ demonſtranda proponitur; oſtendit enim Pappus, ſicut, & Archimedes, ſemicircularis diametri ſegmentum maius A C ad circuli intercepti diametrum H E habere eandem proportionem, quàm maioris circuli diameter A B habet ad reliquum ſegmentum eius B C, pariterque B A ad A C eandem proportionem habet, quàm C B ad reliqui circuli intercepti L M N diametrum : ex hiſce ſequitur concluſio Archimedea, nam ſi A C ad H E eandem rationem habet, quàm A B ad B C, permutando B A ad A C erit vt C B ad H E igitur eadem C B ad duas circulorum diametros H E, & L N eandem proportionem habet, & propterea circulorum diametri H E, & L N æquales ſunt inter ſe. Mirum tamen eſt hanc concluſionem, quàm præ manibus Pappus habebat, non animaduertiſſe, demonſtrat tamen quamplurima ſymptomata pulcherrima circulorum in Arbelo deſcriptorum, quæ tamen in hoc opuſculo Archimedi tributo pariter recenſeri debebant, ſi hic liber eſſet idem antiquus ille à Pappo viſus, in quo huiuſmodi lemmata circumferebantur : ſed forſan librariorum vitio, & incuria codex corruptiſſimus ad Arabes tranſmiſſus non omnes illas admirandas propoſitiones, ſed vnius tantum particulam continebat, ſicut è contra liber ille antiquus, in quo Pappus prædicta lemmata reperit, carebat concluſione in hiſce lemmatibus demonſtrata. Cæterum propoſitiones in ſcholijs additæ manifeſtæ quidem ſunt, ſed abſque duabus prioribus poſſet propoſitum facillimè demonſtrari, Reliquæ duæ propoſitiones ſuperadditæ ad Arabibus faciles quidem ſunt.*



PROPOSITIO VI.

SI fuerit ſemicirculus A B C, & in eius diametro ſumatur punctum D, & fuerit A D ipſius D C ſexqui altera, & deſcribantur ſuper A D, D C duo ſemicirculi, & ponatur circulus E F inter tres ſemicirculos tangens eos, & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C, reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Iungamus enim duas lineas A E, E B, & duas lineas C F, F B, erunt C B, A B rectæ, vti dictũ eſt in prima propoſit. Deſcribamus etiam duas lineas F G A, E H C, oſtendeturque eſſe quoque rectas; Similiter duas lineas D E, D F, & iungamus D I, D L, & E M, F N, & producamus eas ad O, P; Et quia in triangulo A E D, A G eſt perpendipendicularis ad E D, & D I eſt quoque perpendicularis ad A E, & iam ſe mutuo ſecuerunt in M, ergo E M O erit etiam perpendicularis, quemadmodum oſtendimus in expoſitione, quàm confecimus de proprietatibus triangulorum, & cuius demonſtratio iam quidem præceſſit in ſuperiori propoſitione; Similiter quoque erit F P perpendicularis ſuper C A, & quia duo anguli, qui ſunt apud L, & B ſunt recti, erit D L parallela ipſi A B, & pariter D I ipſi C B, igitur proportio A D ad D C eſt vt proportio A M ad F M, immo vt proportio A O ad O P, & proportio C D ad D A vt proportio C N ad N E, immo vt proportio C P ad P O, & erat A D ſexquialtera D C, ergo A O eſt ſexquialtera O P, & O P ſexquialtera C P, ergo tres lineæ A O, O P, P C ſunt proportionales: & in eadem menſura, in qua eſt P C quatuor, erit O P ſex, & A O nouem, & C A nouendecim, & quia P O æqualis eſt E F, erit proportio A C ad E F vt nouendecim ad ſex, igitur reperimus dictam proportionem. Etiam ſi fuerit A D ad D C qualiſcumque vt ſexquitertia, aut ſexquiquarta, aut alia, erit iudicium, & ratio, vti dictum eſt. Et hoc eſt quod voluimus.

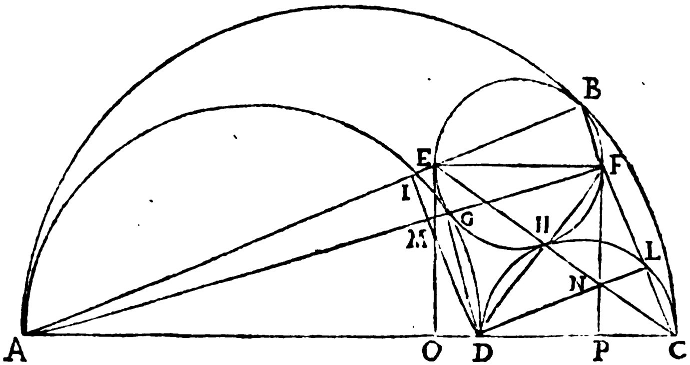


Notæ in Propoſit. VI.

HAEc propoſitio nil prorſus differre videtur à 16. propoſit. lib. 4. Pappi Alex. eſt tamen pars illius, & particulariter demonſtrata, quod quidem peccatum alicui expoſitori tribui debet; nunquam enim Archimedes propoſitionē illam, quam vniuerſaliſſimè demonſtrare potuiſſet, exemplis numericis tam pueriliter oſtendiſſet. Pappus igitur quærit menſuram diametri illius circuli, qui in loco inter tres circunferentias circulares interijcitur, quod Arbelon appellatur, & oſtendit quidem diametrum ſemicirculi maioris A C ſecari in duobus punctis O, & P à perpendicularibus cadentibus à terminis E, & F diametri circuli in Arbelo inſcripti, ac diuidi in tria ſegmenta A O, O P, P C continue proportionalia in eadem ratione, quàm habet A D ad D C, & in-

ſuper

ſuper oſtendit perpendicularem E O æqualem eſſe circuli diametro E F. Itaque in quadrato ſpatio E O P F, circuli diameter E F, ſiue O P media proportionalis erit inter A O, & P C. Quam ergo proportionem habent tres continuè proportionales in eadem ratione A D ad D C ſimul ſumpta ad illarum intermediam, eandem habebit diameter maioris ſemicirculi A C ad O P, ſiue E F.



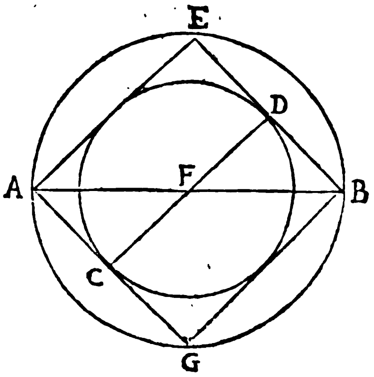
Quæ deinde Pappus demonſtrat perpendiculares à centris circulorum in collateralibus ſpatijs prædicti Arbeli exiſtentium eſſe multiplices diametrorum eorum circulorum à quibus educuntur ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate creſcentium, proprietas quidem eſt admirabilis, de qua in hac propoſitione Archimedis altum ſilentium, quod forte temporum iniuria tribuendum eſt.

Poſſent in hiſce duabus propoſitionibus non pauca problemata ſuperaddi, quomodo nimirum in prædicto ſpatio à tribus ſemicirculis comprehenſo circuli innumerabiles deſcribi debeant, & alia quamplurima facilia, quæ lectorum ſagacitati relinquuntur.

PROPOSITIO VII.

SI circulus circa quadratum deſcriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumſcriptus duplus inſcripti.

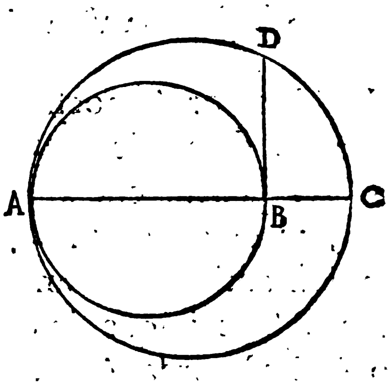
Sit itaque circulus comprehendens quadratum A B, circulus A B, & inſcriptus C D, & ſit diameter quadrati A B, & eſt diameter circuli circumſcripti, & educamus C D diametrum circuli inſcripti parallelam ipſi A E, quæ eſt ei æqualis. Et quia quadratum A B duplum eſt quadrati A E, ſiue D C, & proportio quadratorum ex dia-



metris circulorum eſt eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus A B duplus eſt circuli C D, & hoc eſt quod volumus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

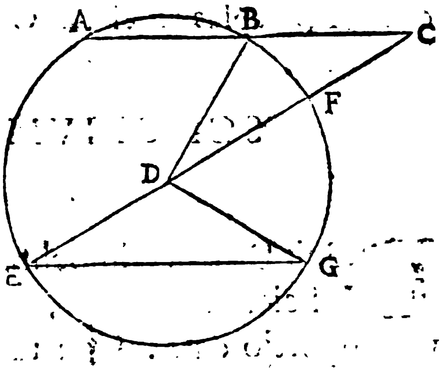
DIcit Doctor Almochtaſſo. Iam compoſui tractatum de conficiendo circulo, cuius proportio ad datum circulum ſit vt proportio data. Qua ratione conficiendæ ſunt omnes figuræ rectilineæ, & quem vſum habeant in arte illæ figuræ, & afferam hic ex illis vnam propoſitionem, quæ cõgruit expoſitioni huius propoſitionis, & eſt tanquam epitome illarum propoſitionum, & illationis ex illis, & eſt hæc. Volumus conficere circulum, qui ſit quinta pars circuli, exempli gratia.



Circulus cuius habemus diametrum eſt A B, & addamus eius partem quintam, & eſt B C, & deſcribamus ſuper A C ſemicirculum A D C, & educamus perpendicularem B D, & quia proportio A B ad B C eſt, vt proportio quadrati A B ad quadratum B D, erit quilibet circulus factus, vel, figura ſuper B D quæſita à nobis, & hoc, quia proportio circuli, qui eſt ſuper A B, vel figuræ, quæ eſt ſuper illam, ad circulum, vel figuram factam ſuper B D facit illam figuram, & ſimiliter poſitam, erit vt proportio A B ad B C, & hoc eſt quod voluimus.

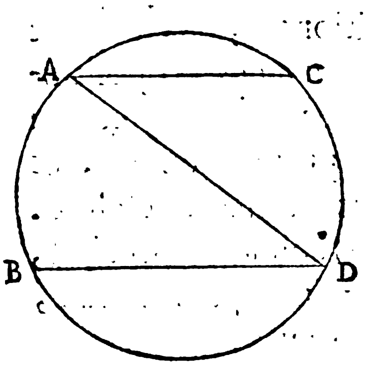
PROPOSITIO VIII.

SI egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis ſemidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod eſt D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.



Educamus igitur E G parallelam ipſi A B, & iungamus D B, D G: & quia duo anguli D E G, D G E ſunt æquales, erit angulus G D C duplus anguli D E G, & quia angulus B D C æqualis eſt angulo B C D, & angulus C E G æqualis eſt angulo A C E, erit angulus G D C duplus anguli C D B, & totus angulus B D G triplus anguli B D C, & arcus B G æqualis arcui A E, triplus eſt arcus B F, & hoc eſt, quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

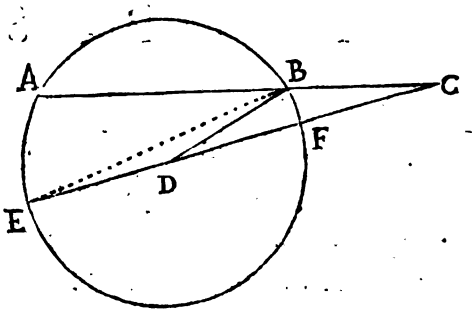


Dicit Doctor Almochtaſſo. Cum dicit arcum B G æqualem eſſe arcui A E, id ex eo eſt propter æquidiſtantiam duarum cordarum. Sint itaque in circulo A B C cordæ A C, B D parallelæ; Dico quod duo arcus A B, C D ſunt æquales,

Iungamus A D, ergo duo anguli C A D, A D B ſunt æquales; & propterea duo arcus ſunt æquales, & conuerſum eodem modo demonſtratur.

Notæ in Propoſit. VIII.

HAEc quidem propoſitio elegantiſſima eſt, quæ ſi problematicè reſolui poſſet via plana, reperta iam eſſet tripartitio cuiuſlibet anguli.

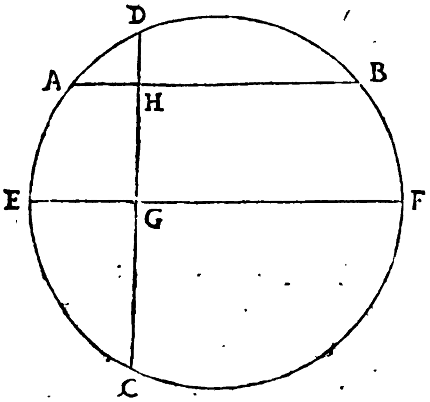


Breuius tamen demonſtratio perfici poteſt hac ratione. Iuncta recta E B, quia in triangulo Iſoſcele B D C duo anguli C, & C D B æquales ſunt, eſtque pariter externus angulus B D C duplus anguli D E B in triangulo Iſoſcelio D E B, ergo angulus C duplus eſt anguli B E C, & propterea illi anguli ſimul ſumpti, ſeu externus angulus A B E triplus erit anguli B E F, & circunferentia A E tripla ipſius B F.

PROPOSITIO IX.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D, (ſed non in centro) ad angulos rectos, vtique duo arcus A D, C B ſunt æquales duobus arcubus A C, D B.

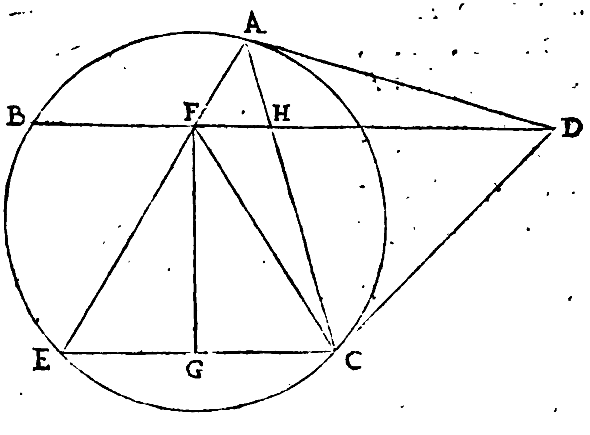
Educamus diametrum E F parallelam ipſi A B, quæ ſecet C D biſariam in G, erit E C æqualis ipſi E D; & quia tam arcus E D F, quam E C F eſt ſemicirculus, & arcus E D æqualis arcui E A cum arcu A D, erit arcus C F cum duobus arcubus E A, A D æqualis ſemicirculo, & arcus E A æqualis arcui B F, ergo arcus C B cum arcu A D æqualis eſt ſemicirculo, & remanent duo arcus E C, E A nempe arcus A C cum arcu D B æquales illi, & hoc eſt quod volumus.



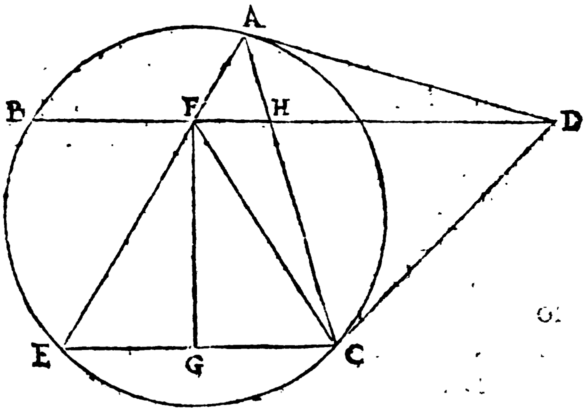
PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C, & D A tangens illum, & D B ſecans illum, & D C etiam tangens, & educta fuerit C E parallela ipſi D B, & iuncta fuerit E A ſecans D B in F, & educta fuerit ex F perpendicularis F G ſuper C E; vtique biſariam ſecabit illam in G.

Iungamus A C, & quia D A eſt tangens, & A C ſecans circulum erit angulus D A C æqualis angulo cadenti in alterno ſegmento A C

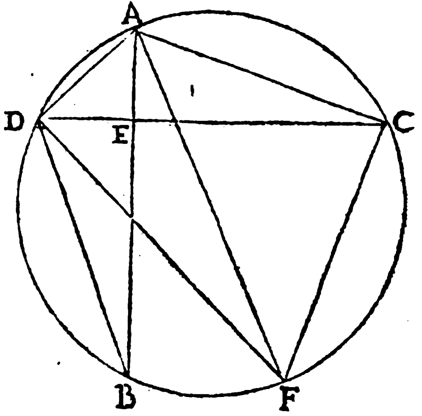


nempe angulo A E C, & eſt æqualis angulo A F D, eo quod C E, B D ſunt parallelæ, ergo anguli D A C, A F D ſunt æquales, & in duobus triangulis D A F, A H D ſunt duo auguli A F D, H A D æquales, & angulus D communis, propterea erit rectãgulum F D in D H æquale quadrato D A, immo quadrato D C, & quia proportio F D ad D C eſt eadem proportioni C D ad D H, & angulus D communis, erunt triangula D F C, D C H ſimilia, & angulus D F C æqualis D C H, qui æqualis eſt angulo D A H, & hic eſt æqualis angulo A F D, ergo duo anguli A F D, C F D ſunt æquales, & D F C æqualis angulo F C E, & erat D F A æqualis angulo A E C, ergo in triangulo F E C ſunt duo anguli C, E æquales, & duo anguli G recti, & latus G F commune, propterea erit C G æqualis ipſi G E, ergo C E bifariam ſecatur in G, & hoc eſt, quod voluimus,



PROPOSITIO XI.

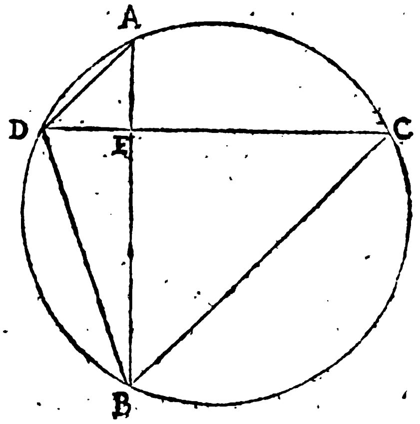
SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non ſit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia ſunt quadrato diametri.



Educamus diametrum A F, & iungamus lineas A C, A D, C F, D B; Et quia angulus A E D eſt rectus, erit æqualis angulo A C F, & angulus A D C æqualis A F C, eo quod ſunt ſuper arcum A C, & remanent in duobus triangulis A D E, A F C duo anguli C A F, D A E æquales erunt pariter duo arcus C F, D B æquales immo, & duæ cordæ eorum æquales, & duo quadrata D E, E B æquantur quadrato B D, nempe C F, & duo quadrata A E, E C æquantur quadrato C A, & duo quadrata C F, C A æquantur quadrato F A, nempe diametri, igitur quadrata A E, E B, C E, E D omnia ſunt æqualia quadrato diametri, & hoc eſt quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

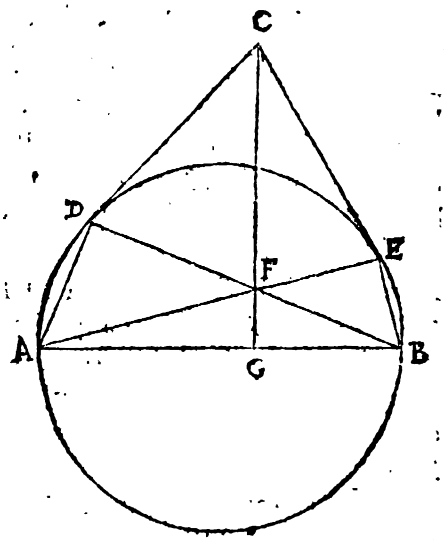
Dicit Doctor. Huius eſt alia facilior demonſtratio ea, quam attulit Archimedes; quæ eſt huiuſmodi. Iungamus A D, C B, B D; & quia angulus B E D eſt rectus, erunt duo anguli E B D, E D B æquales vni recto, & duo A D, B C, æquales ſemicirculo, ergo duæ cordæ eorum in potentia ſunt æquales diametro; ſed duo quadrata A E, D E æqualia quadrato A D, & duo quadrata C E, B E ſunt æqualia quadrato C B, ergo quadrata A E, E B, C E, E D æqualia ſunt quadrato diametri; & hoc eſt quod voluimus.



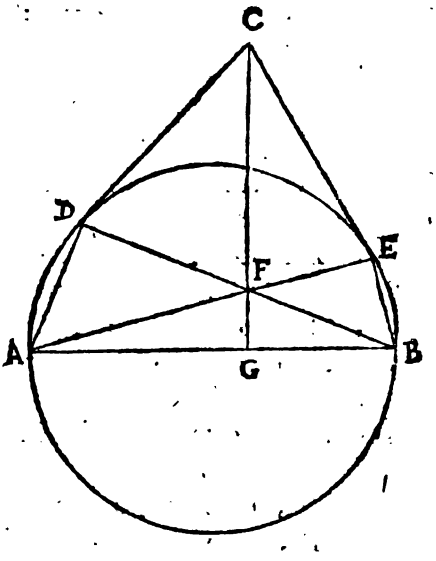
PROPOSITIO XII.

Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B ſe muto ſecantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

Iungamus D A, E B. Et quia angulus B D A eſt rectus, erunt duo anguli D A B, D B A reliqui in triangulo D A B æquales vni recto, & angulus A E B rectus, igitur ſunt æquales ei, & ponamus angulum F B E communem, ambo anguli D A B, A B E ſunt æquales F B E, F E B, immo angulo D F E externo in F B E. Et quia C D eſt tangens circulum, & D B ſecans illum, angulus C D B æquatur angulo D A B, & pariter angulus C E F æquatur angulo E B A, ergo duo anguli C E F, C D F ſimul æquales ſunt angulo D F E. Et iam quidem planum fit ex noſtro tractatu de figuris quadrilateris, quod ſi educan-



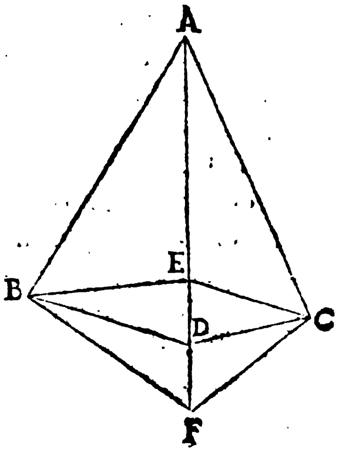
tur inter duas lineas æquales ſibi occurrentes in aliquo puncto, vti ſunt duæ lineæ C D, C E, duæ lineæ ſe mutuo ſecantes, vti ſunt duæ lineæ D F, E F, & fuerit angulus ab illis contentus vt eſt angulus F æqualis duobus angulis, qui occurrunt duabus [lineis] ſe inuicem ſecantibus, vti ſunt duo anguli E, D ſimul, erit linea egrediens à puncto concurſus ad punctum ſectionis, vti eſt linea C F æqualis cuilibet linearum ſibi occurrentium, vt C D, vel C E, propterea erit C F æqualis ipſi C D, ergo angulus C F D eſt æqualis angulo C D F, nempe angulo D A G, ſed angulus C F D cum angulo D F G eſt æqualis duobus rectis, ergo angulus D A G cum angulo D F G æqualis eſt duobus rectis, & remanent in quadrilatero A D F G duo anguli A D F, A G F æquales duobus rectis, ſed angulus A D B rectus eſt, ergo angulus A G C eſt rectus, & C G perpendicularis ad A B, & hoc eſt quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor de demonſtratione, quàm citat ex tractatu de figuris quadrilateris. Sint duæ lineæ æquales ſibi occurrentes A B, A C, & punctum concurſus A, & ſe inuicem ſecantes B D, D C, & punctum ſectionis D, & ſit angulus B D C æqualis duobus angulis A B D, A C D, & iungamus A D; Dico quod ſit æqualis A B.

Alioquin vel eſt minor A B, vel maior illa, & ſit maior, & abſcindatur A E æqualis A B, & iungamus B E, ergo duo anguli A E B, A B E ſunt æquales; ſed angulus A E B maior eſt angulo A D B, & pariter angulus A E C, qui eſt æqualis A C E maior eſt angulo A D C, omnes ergo anguli B E C, vel duo anguli ſimul A B E, B C E maiores ſunt duobus angulis A B D, A C D, pars ſuo toto, quod eſt abſurdum. Deinde ſit A D minor quàm A B, & ponamus A F æqualem A B, & iungamus B F, F C, remanet, vt dictum eſt, quod angulus F,



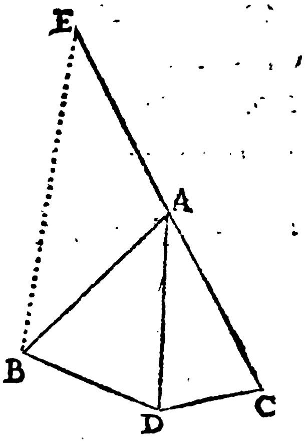
immo

immo duo anguli A B F, A C F minores ſint duobus angulis A B D, A C D, totum ſua parte, & hoc eſt abſurdum, ergo manet propoſitum.

Notæ in Propoſit. XII.

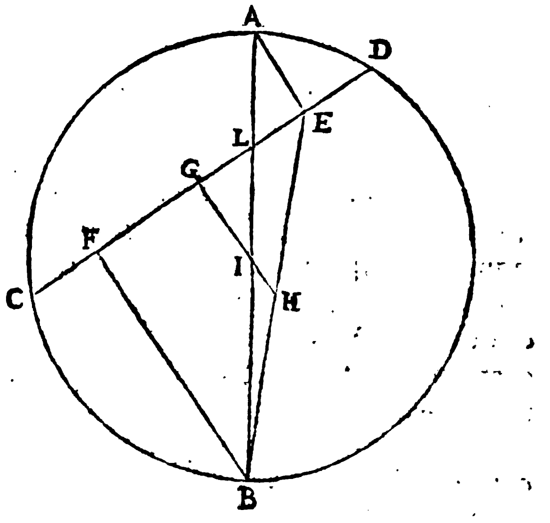
Lemma aſſumptum in demonſtratione huius pulcherrima propoſitionis poteſt directè oſtendi hac ratione.

Si in quadrilatero A C D B duo latera A C, & A B aqualia fuerint, atque angulus C D B aqualis duobus angulis C, & B ſimul ſumptis. Dico rectam A D ipſi A C, vel A B aquale eſſe. Producatur C A, in E, vt A E fiat aqualis A B, iungaturque B E. Quia in triangulo Iſoſcelio B A E angulus E aqualis eſt angulo A B E, & angulus C D B aqualis eſt duobus angulis C, & D B A ſimul ſumptis, ergo duo anguli C D B, & E (oppoſiti in quadrilatero C D B E) aquales ſunt tribus angulis C, D B A, & A B E, ſeu duobus angulis C, & D B E, ſed quatuor anguli quadrilateri E C D B aquales ſunt quatuor rectis, ergo duo anguli oppoſiti E, C D B duobus rectis aquales ſunt, & propterea quadrilaterum ipſum circulo inſcribi poteſt, cuius circuli centrum erit A, cum tres recta linea C A, A B, A E aquales poſita ſint, & propterea A D radius quoque circuli erit aqualis ipſi C A.



PROPOSITIO XIII.

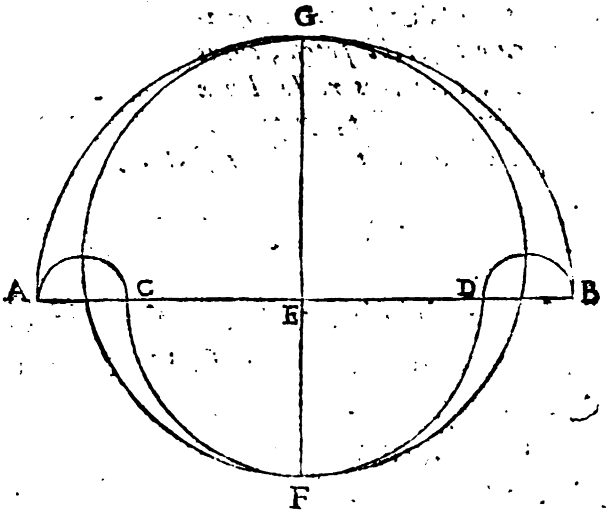
Si mutuo ſe ſecent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ ſint A E, B F, vtique abſcindent ex illa C F, D E æquales.



Iungamus E B, & educamus ex I, quod eſt centrum, perpendicularem I G ſuper C D, & producamus eam ad H in E B. Et quia I G eſt perpendicularis ex centro ad C D illam bifariam diuidet in G, & quia I G, A E ſunt duæ perpendiculares ſuper illam, erunt parallelæ, & quia B I æqualis eſt I A, erit B H æqualis ipſi H E, & propter earum æqualitatem, & quia B F eſt parallela ipſi H G, erit F G æqualis ipſi G E, & ex G C, G D æqualibus remanent F C, E D æquales. Et hoc eſt quod voluimus.

PROPOSITIO XIV.

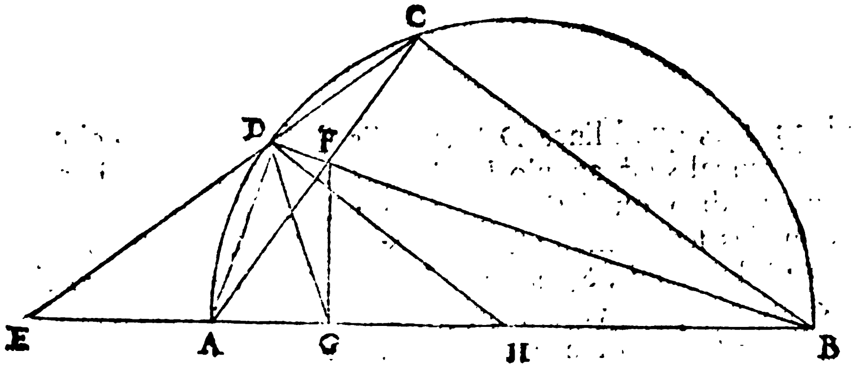
SI fuerit A B ſemicirculus, & ex eius diametro A B diſſectæ ſint A C, B D æquales, & efficiantur ſuper lineas A C, C D, D B ſemicirculi; & ſit centrum duorum ſemicirculorum A B, C D punctum E, & ſit E F perpendicularis ſuper A B, & producatur ad G: vtique circulus, cuius diameter eſt F G æqualis eſt ſuperficiei contentæ à ſemicirculo maiori, & à duobus ſemicirculis qui ſunt intra illum, & à ſemicirculo medio qui eſt extra illum, & eſt figura, quam vocat Archimedes Salinon.



Quia D C bifariam ſecatur in E, & addita eſt illi C A, erunt duo quadrata D A, C A dupla duorum quadratorum D E, E A, ſed F G æqualis eſt ipſi D A, ergo duo quadrata F G, A C dupla ſunt duorum quadratorum D E, E A: & quia A B dupla eſt A E, & C D dupla quoque E D, erunt duo quadrata A B, D C quadrupla duorum quadratorum D E, E A, immo dupla duorum quadratorum G F, A C ſimiliter etiam duo circuli, quorum diametri ſunt A B, D C dupli ſunt eorum, quorum diametri ſunt G F, A C, & dimidij eorum, quorum diametri ſunt A B, C D æquales duobus circulis, quorum diametri ſunt G F, A C, ſed circulus, cuius diameter A C, eſt æqualis duobus ſemicirculis miciriculis A C, B D, ergo ſi auferamus ex illis duos ſemicirculos A C, B D, qui ſunt communes, remanet figura contenta à quatuor ſemicirculis A B, C D, D B, A C, (quæ ea eſt, quàm vocat Archimedes Salinon) æqualis circulo, cuius diameter eſt F G, & hoc eſt quod volumus.

PROPOSITIO XV.

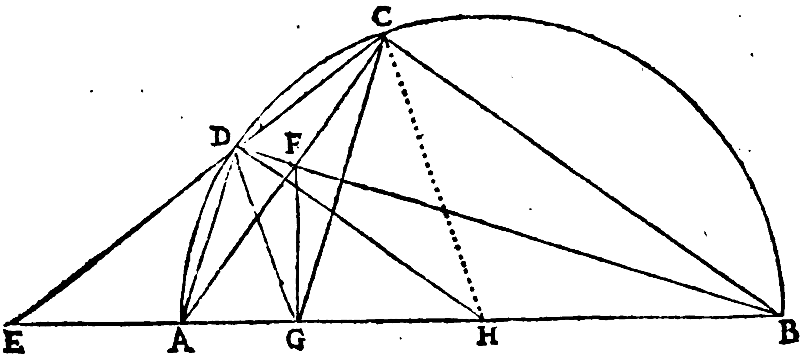
SI fuerit A B ſemicirculus, & A C corda Pentagoni, & ſemiſſis arcus A C ſit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat ſuper E, & iungatur D B, quæ ſecet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G ſuper A B, erit linea E G æqualis ſemidiametro circuli.



Iungamus itaque lineam C B, & ſit centrum H, & iungamus H D, D G, & A D. Et quia angulus A B C, cuius baſis eſt latus Pentagoni, eſt duæ quintæ partes recti, quilibet duorum angulorum C B D, D B A eſt quinta pars recti, & angulus D H A duplus eſt anguli D B H, ergo angulus D H A eſt duæ quinte partes recti. Et quia in duobus triangulis C B F, G B F duo anguli B ſunt æquales, & G, C recti, & latus F B commune, erit B C æquale ipſi B G: & quia in duobus triangulis C B D, G B D duo latera C B, B G ſunt æqualia, & ſimiliter duo anguli ad B, & latus B D commune, erunt duo anguli B C D, B G D æquales, & quilibet eorum eſt ſex quintæ partes recti, & eſt æqualis angulo D A E externo quadrilateri B A D C, quod eſt in circulo, ergo remanet angulus D A B æqualis angulo D G A, & erit D A æqualis ipſi D G. Et quia angulus D H G eſt duæ quintæ partes recti, & angulus D G H ſex quintæ partes recti, remanet angulus H D G duæ quintæ partes recti, & erit D G æqualis G H. Et quia A D E externus quadrilateri A D C B, quod eſt in circulo, eſt æqualis angulo C B A, & eſt

duæ

duæ quintæ partes recti, & æqualis angulo G D H. Et quia in duobus triangulis E D A, H D G ſunt duo anguli E D A, H D G æquales, & pariter duo anguli D G H, D A E, & duo latera D A, D G, erit E A æquale H G, & ponamus A G commune, erit E G æquale A H, & hoc eſt quod voluimus,



Et hinc patet, quod linea D E æqualis ſit ſemidiametro circuli, quia angulus A æqualis eſt angulo D G H, ideo erit linea D H æqualis lineæ D E. Et dico quod E C diuiditur media, & extrema proportione in D, & maius ſegmentum eſt D E: & hoc quia E D eſt corda hexagoni, & D C decagoni, & hoc iam demonſtratum eſt in libro elementorum, & hoc eſt quod voluimus.

Impie vt Mahumetanus Paraphraſtes loquitur.

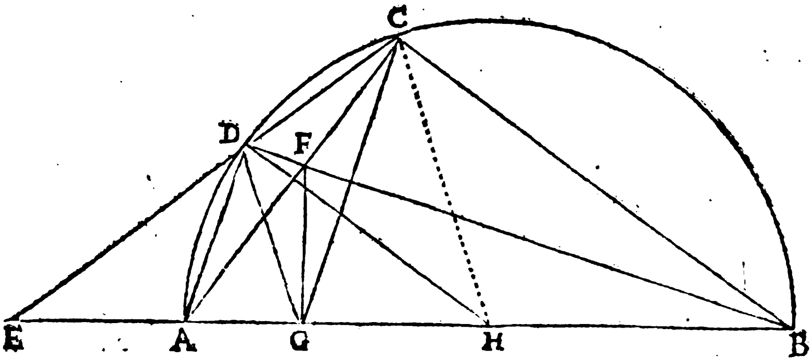
Finis libri Aſſumptorum Archimedis. Laus Deo ſoli, & orationes eius ſint ſuper Dominum noſtrum Mahometum, & ſuos ſocios.

Notæ in Propoſit. XV.

Ex hac propoſitione non pauca colligi poſſunt; Si enim coniungantur rectæ lineæ C H, *&* C G, *erit triangulum* B C E *iſoſcelium ſimile triangulo* H D E, *& ſimiliter poſitum; pariterque triangulum* H C G *ſimile quidem erit ipſi* G D A, *& in vtriſque baſes ſimiliter ſecantur, nam angulus* B C E *in tres partes æquales diuiditur à rectis lineis* H C, *&* G C, *quarum quælibet duæ quintæ partes eſt vnius recti, atque angulus* E C G *rurſus bifariam diuiditur à recta* C A: *non ſecus tres anguli* E D A, A D G, *&* G D H *æquales ſunt inter ſe, atque quilibet eorum duæ quintæ vnius recti. Et efficiuntur quatuor rectæ, lineæ* E A, A D, D G, D C, *inter ſe, & lateri decagoni regularis circulo inſcripti æquales. Pari modo rectæ lineæ* E D, E G, G C, H C, H A, *æquales ſunt inter ſe, & lateri hexagoni regularis circulo inſcripti. Tandem recta linea* C B *ſubtendens tres partes decimas circumferentiæ totius circuli æqualis eſt rectæ lineæ* C E, *ſcilicet compoſita ex latere hexagoni, & latere decagoni regularium eidem circulo incſriptorum. Præterea*

recta

recta linea E G ſecatur in A extrema, ac media ratione, cuius maius ſegmentum eſt E A latus decagoni, & recta A H ſimiliter diuiditur in G, cuius maius ſegmentum eſt G H decagoni latus, & tota E H ſecatur in A, & G extrema, ac media ratione, pariterque recta E B ſimiliter ſecatur in H, cuius minus ſegmentum H B eſt æquale lateri exagoni circulo inſcripti. Breuius tamen propoſitio ſic demonſtrari poſſet.



Quia oſtenſa eſt C D æqualis D G, & A D æqualis eſt eidem D C; cum ambo ſint latera decagoni, ergo D G æqualis eſt D A. Poſtea iuncta A C, quia angulus A H D, vel C H D quinta pars eſt duorum rectorum, ergo angulus C D H ad baſim iſoſcelij, duæ quintæ partes erit duorum rectorum, & ideo angulus C D H duplus erit anguli D H E, eſtque externus angulus C D H æqualis duobus internis, & oppoſitis D H E, & D E H in triangulo D E H; ergo angulus C D H duplus quoque erit reliqui anguli E, & propterea angulus D H E æqualis erit angulo E, & ſubtenſa latera D E, D H æqualia quoque erunt, ſed prius D A, D G æqualia erant ſubtendentia angulos æquales, & reliqui anguli eiuſdem ſpeciei ſunt, igitur E A æqualis eſt H G. Reliqua manifeſta ſunt.

In præfatione huius operis memini non eſſe omnino improbabile hunc libellum Archimedis non alium fuiſſe ab illo antiquo lemmatum libro ab Eutocio reperto, quod præcipuè ex verbis eiuſdem Eutocij in Comment. propoſit. 4. *lib.* 2. *de Sphæra, & Cylindro comprobatum fuit: illa fideliſſimè tranſlata ex textu Græco ab amicis doctiſſimis cum iam in præfatione excuſa eſſent aliam tranſlationem ex Arabico Manuſcripto Sereniſſimi Magni Ducis miſit Excell. Abrahamus Ecchellenſis deſumptam ex editione Abuſahli Alkuhi qui pariter librum ordinationis lemmatum Archimedis conſcripſit, vt in proemio huius operis teſtatur Almochtaſſo. Verba eius ſunt hæc, quæ paulò clarius propoſitum confirmare videntur:* & meminit Eutocius Aſcalonita in Comment. huius libri, quod Archimedes promiſerit demonſtrationem huius in hoc ſuo libro, quod in nullo exemplari reperitur, quod promiſit. Atque ita vnuſquiſque tam Dyoniſodorus, quàm Diocles poſt illum progreſſus eſt per aliam viam, quàm ille (ſcilicet Archimedes) in hoc libro in diuiſione Sphæræ in duas partes, quæ datam habeant proportionem. Dixit, & ego reperi in

Veteri Libro Theoremata ſatis obſcura propter multitudinem errorum, qui in eo ſunt, nec non menda, quæ occurrunt in figuris propter ignorantiam amanuenſium, erantque in eo Doricæ dictiones, quarum vſus Archimedi familiaris erat, & vocabula ipſi propria; hinc vtebatur loco ſectionum parabolæ, & hyperbolæ, rectanguli, & obtuſanguli coni ſectionibus quamobrem operam ipſi nauaui, donec aſſecutus ſum iſtam propoſitionem, & eſt iſta, &c.

Modo quia in prædicto libro antiquo ab Eutocio reperto recenſentur duæ propoſitiones, quarum vnam promiſerat ſe demonſtraturum Archimedes, & vtraque in noſtro opuſculo iniuria temporum deficit; earum altera forſan erit 16. illa propoſitio in proemio ab Almochtaſſo numerata vbi ait propoſitiones huius opuſculi ſexdecim eſſe, cum tamen poſtrema ſit 15. quare inutile forſan non erit eas hic reponere, præcipuè quia Eutocius non rite eas reſtituit, nec omninò repurgauit à mendis, quibus ſcatebat exemplar antiquum ab ipſo inuentum. Et primo nota, quod Eutocius eas vocat theoremata, cum potius problemata ſint, & ſic etiam ab eodem Eutocio poſtmodum appellantur. Forſan hoc accidit, quia in libro illo antiquo in formam theorematum ſcripta erant, ſed Eutocius vt ad propoſitionem Archimedis ea accomodaret, forma problematica ea expoſuit. Rurſus Eutocius primum theorema ſe expoſiturum pollicetur, vt deinde analyſi problematis Archimedei accomodetur. Vnde conijcere licet alterum theorema additum, vel alteratum ab Eutocio, vel ab aliquo alio fuiſſe, in quo proponit, quod, ſi aliqua recta linea ſecta ſit in duo ſegmenta, quorum vnum duplum ſit alterius, ſolidum parallelepipedum rectangulum contentum ſub quadrato maioris, & ſub minore ſegmento maximum erit omnium ſimilium ſolidorum, quæ ex diuiſione eiuſdem rectæ lineæ in quolibet alio eius puncto conſurgunt. Et hoc quidem oſtenditur per ſectiones conicas, contra artis præcepta; peccatum enim eſt non paruum apud Geometras, problema planum per conicas ſectiones reſoluere cum via plana abſolui poſſit, hoc autem pręclari nonnulli viri pariter adnotarunt, & præſtiterunt, vt nuper accepi.

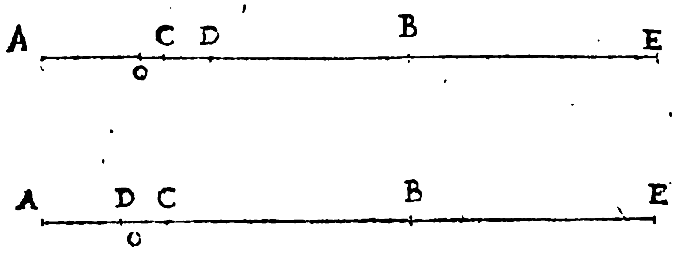
PROPOSITIO XVI.

SI recta linea A B ſit tripla A C, non vero tripla ipſius A D; Dico parallelepipedum rectangulũ contentum ſub quadrato C B in A C maius eſſe parallelepipedo ſub quadrato D B in A D.

Producatur A B in E, vt ſit B E æqualis B C. Quoniam B C dupla erat ipſius A C, erit E C quadrupla ipſius A C, & propterea rectangulum A C E æquale erit quadruplo quadrati A C, ſcilicet æquale erit quadrato C B; Eſt vero in primo caſu, rectangulum A D E maius rectangulo A C E, in ſecundo vero minus, (eo quod punctum D in primo caſu propinquius eſt ſemipartitioni totius A E, quàm C, in ſecuudo verò remotius); igitur ſi fiat C D ad D O, vt quadratum C B ad rectangulum

gulum

gulum A D E, erit in primo caſu D O maior, quàm C D, in ſecundo vero minor; & propterea A O minor erit, quàm A C in vtroque caſu. Et quia quadratum C B ad rectangulum A D E eſt vt C D ad D O, igitur ſolida parallelepipeda reciproca erunt æqualia, ſcilicet ſolidum quadrato C B in D O ducto æquale erit ſolido, cuius baſis rectangulum A D E, altitudo vero C D, ſeu potius æquale erit ſolido, cuius baſis rectangulum E D C, altitudo vero A D, & propterea vt quadratum B C ad rectangulum E D C, ita erit reciproce A D ad D O, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in primo caſu, & ad eorundem ſummas in ſecundo caſu, erit quadratum B C ad quadratum D B vt A D ad A O, & denuo ſolidum parallelepipedum rectangulum contentum ſub quadrato B C in A O æquale erit ei, cuius baſis quadratum D B, altitudo vero A D: Eſt vero A O oſtenſa minor, quàm A C in vtroque caſu, igitur parallelepipedum, cuius baſis quadratum B C, altitudo A C maius eſt eo, cuius baſis eſt idem quadratum B C, altitudo A O; ideoque parallelepipedum, cuius baſis quadratum B C, altitudo A C maius eſt quolibet parallelepipedo, cuius baſis quadratum B D, altitudo A D: quare patet propoſitum.



PROPOSITIO XVII.

SIt A B tripla ipſius A E, maior vero quàm tripla alterius C A, ſecari debet eadem A B citra, & vltra E, in O, ita vt parallelepipedum, cuius baſis quadratum O B, altitudo O A æquale ſit parallelepipedo, cuius baſis quadratum E B, altitudo A C.

Fiat rectangulum A C B F, & producantur latera C A, F B, & fiat rectangulum C F N æquale quadrato E B, & ducta diametro C E G com-

Dominus Carolus de Datis videat, & referat an in hoc opere ſit aliquid quod repugnet fidei Catholicæ, & bonis moribus. Die 3. Iulij 1660.

Vinc. de Bardis Vicar. Gener. Florent.

Illuſtriſſime, ac Reuerendiſs. Dom.

Vidi hæc antiquorum, maximorumq; Geometrarum Apollonij, atq; Archimedis Opera nunquam edita, nec in ijs reperi aliquid fidei Catholicæ, & bonis moribus aduerſum; Quamobrem maximo Reip. literariæ bono, & gloria eorum qui in ijs vertendis, atq; illuſtrandis ſtudium, atque operam feliciſsimè collocarunt euulganda cenſeo: dummodo quædam loca notentur Arabicorum interpretum, quibus Maumedanos ſe præbent. Florentiæ die 7. Iulij 1660.

Carolus Dati manupropria.

Imprimatur ſeruatis ſeruandis 7. Iulij 1660.

Vinc. d. Bardis Vicar. Gener. Flor.

Excellentiſs. Aduocatus Dominus Auguſtinus Coltellini S. Offic. Florentiæ Conſultor videat hoc opus intitulatum APOLLONII PERGÆI, &c. & referat.
Die 7. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Offic. Flor. Canc. de mand.

Reuerendiſs. Pater Domine.

Duorum Geometriæ luminum monumenta, quæ diu in tenebris ſepulta, adeò ſtudioſorum oculos latuerunt, vt inter deperdita fruſtra deſiderarentur, & nunc Opera Clariſs. Virorum, verſa, & illuſtrata in lucem prodeant remoranda non puto; cum etſi Ethnico fonte cadant, nihil tamen (ſalutaribus monitis Arabica interpretum ſuperſtitione detecta) aduerſus Chriſtianam pietatem contineant.

Auguſt. Coltellini S. Officij Conſultor, & librorum cenſor.

Stante ſupradicta atteſtatione Imprimatur. Die 16. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Off. Florent. Cancell. de mand.

Alexander Vettorius Senator Sereniſs. Magni Ducis Auditor.

REGISTRVM.

* ** *** **** A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff

Omnes ſunt duerni, excepto * qui eſt ternus.

Errata præcipua ſic corrige.

PAgina 7. linea 27. ad margine . *prop.1.huius* . pag.14. lin.4. *ad differentiam* . p. 24. l. 21. marg. *prop. 2. addit* . p.31. l.27.marg. *in lib.*1. lin.34. *& B A* . lin.40. *I D , D K* . p.32. l.15. *& D H* . p.36. l.21. *figura*) p.40. l.17. (53. *ex* 5.) l.33. *intercipiuntur, &* . l.38. *ergo C A* . p.46. l.5. *ita inquam* . p.49. l.35. *componebatur inſuper* . p.50. l.46. *B G b , & d e b* . p.56. l.15.marg. 4. *&* 13. l.48. *pariterque L D* . p.62. l.7. *ſit D A* . p.70. l.14.marg. 56. 57. *lib.* 1. *&* 30. *lib.* 2. p.72. l.12. *maior quam* . p.73. l.13.mar. 33. 34. *lib.* 1. p.78. l.4. *reddantur , & textus* . p.86. l.17. *appliceturque recta* . p.96. l.7. *ſuper bipartitionem axis* . p.99. l.11. *ex vero P F minor quam D P* . l.44. *legi* 44. 45. *iu qua* . p.109. l.20. dele poſtillam. p.110. l.31. marg.appone *d* . p.111. l.31. *aut minor angulo* . p.129. l.35. *& inuertendo* . ibidem marg. 10.*hui.* p.130. l.26. dele omnia ab O G vſq; ad comparando. p.138. l.8. *oppoſita* . p.139. l.18. mar. *d* . p.141. l.8.mar. 14. *lib.*1. p.146. l.18.mar. 12. 13. *lib.*1. p.151. l.18.mar. 8. *&* 11. *addit. lib.*5. l.19. *M L , & R L* . l.22. *æqualibus axium* . p.161. l.13. *ductam in hyperbola*) p.168. l.30. *quod eſt* . p.172. l.29. *ſed in primo caſu recta linea* . l.30. *baſim F I* . ibid. *puncta I , & F ; nec F I ſecat bifariam ſubtenſas G E , M K ; propterea* . p.175. l.26. mar. *a* . l.35. *ad duas* . p.176. l.15. mar. *d* . p.183. l.1. mar. *d* . p.189. l.29. mar. *lemma* 7. l.47. *applicata* . p.190. l.8.mar. *prop.2.præmiſ.* p.193. l.6. *XX. XXI. XXII. XXIII, XXIV* . p.196. l.25. *nempe X a* . p.197. l.29. *ad L P* . p.202. l.23. mar. 18. *huius* . p.207. l.6. *quod* . l.33.mar. *a* . p.213. l.11. *hyperbolen E Z* . p.214. l.38.mar. *ex* 20. *huius* . p.217. l.21. *ideoque ei æqualis omnino erit . Simili ratiocitio oſtendetur qualibet alia intercepta K L æquidiſtans* . p.223. l.6.mar. *Schol.prop. 6. addit.* p.228. l.18. *ergo comparando homologorum differentias* . ibid. mar. *lem.* 3. *lib.*1. p.233. l.4.mar. *prop.7. & ex* 8. *addit.* p.235. l.37. *hyperbolen H I K* . p.240. l.3.mar. *f* . p.244. l.14. *& I F R , ſeu H F N , & I F S* . p.248. l.35. *ſit ſectio* . p.250. l.4. *quod L O* . p.256. l.12. *parallela* ; p.259. l.12. *quàm A C* . p.260. l.16. *per eundem* . p.262. l.1. *eandem* . l.4. *A D , &* . l.41. *& eam , quæ* . p.264. l.13. *ſecabit rectam* . p.268. l.22. *conus E A C* . p.269. l.8.mar. *ex prop.* 5. *lib.*1. l.9.10.20. expunge recto. l.15. *ſectionis F A G* . p.275. l.10. *rectangulo A D F* . p.280. l.14. *G E A eandem* . p.291. l.3. *XXIX . XXVII.* p.298. l.6. *XXIIX . XXVI.* p.303. l.16. *erectum* . p.306. l.23. *ad perſectionem prop.* 26. p.313. l.7.mar. *prop.* 26. *huius* . p.318. l.25. *quàm G H E ad E H , & (quando G cadit inter E , & H) , multo maiorem quàm G E* . p.319. l.17. *E H ab ipſo quadrato G E* . p.321. l.9. *quadrato E G* . l.11. *XXXV . XXXVI.* p.323. l.2. *diametri ad eaſdem partes* . p.325. l.7. 21. & 23. (16. *ex*. 7.) p.326. l.11. *quæ eſt dupla* . l.14. *M E ad* . l.20. (16. *ex* 7.) p.327. *quàm D H A ad A H , & in primo caſu multo maiorem , quàm* . p. 328. l.33. *latus C O* . p.329. l.22. *quàm E D O in O E* . p.331. l.27. *vt axis tranſuerſus A C* . p.335. l.7. *ipſius P R ſupra P Q* . l.11. *aggregati M G , H E* . p.338. l.18. *G E , & E H* . p.341. l.3. *axis tranſuerſi C A* . p.343. l.9.mar. dele b . p.344. l.7. mar. *b* . p.346. l.15.mar. *c* . p.347. l.7. *ad quadratum Q P R , &* . p.350. l.13. *O H , & G E* . p.356. l.14.mar. *lem.*15. p.386. l.31.mar. *lib.*4. *Coll. prop.* 14. p.391. l.9. mar. *lib.* 4. *Coll. prop.* 13. p.392. l.15. *quæ erit* . p.404. l.37. *A B E , A C E* .

Errata in figuris.

Pag.12. in eius figura deeſt recta N Q , & D terminus axis , pag.22.fig.1. deeſt recta I N . pag.30. in parabola deeſt N in occurſu B F , G H . pag.37. deeſt P in puncto incidentiæ perpendicularis à puncto I ſuper S K , pag.46. deeſt A in vertice axis . pag.93. deeſt recta L O . pag.112. in tribus ſequentibus figuris deeſt ramus I B . pag. 213. fig.1. litteræ C , Q commutari debent . pag. 240. fig.2. & pag .246. producantur F L , H I ad K . pag. 268. fig.2. linea curua A Z duci debet inter A G , & A D , pag.368.fig.3. in puncto I ponatur X.